

2024 北京丰台高三（上）期末

数 学

2024.01

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 选择题（共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $A = \{-1, 0, 1\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ，则 $\complement_U(A \cup B) =$

- (A) $\{-3, -2\}$ (B) $\{-3, -2, 1, 2\}$
(C) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ (D) $\{-3, -2, -1, 0, 2\}$

2. 若 $\bar{z}(1-i) = 1+i$ ，则 $|z| =$

- (A) i (B) 1
(C) $\sqrt{2}$ (D) 2

3. 在 $(x-2y)^6$ 的展开式中， x^4y^2 的系数为

- (A) -120 (B) 120
(C) -60 (D) 60

4. 在中国文化中，竹子被用来象征高洁、坚韧、不屈的品质。竹子在中国的历史可以追溯到远古时代，早在新石器时代晚期，人类就已经开始使用竹子了。竹子可以用来加工成日用品，比如竹筒、竹签、竹扇、竹筐、竹筒等。现有某饮料厂共研发了九种容积不同的竹筒用来罐装饮料，这九种竹筒的容积 $a_1, a_2, \dots, a_9$ （单位：L）依次成等差数列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ， $a_8 = 0.4$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 =$

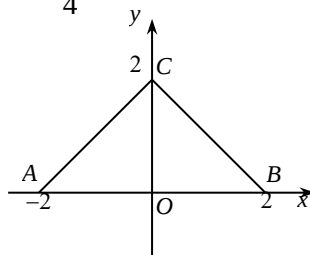
- (A) 5.4 (B) 6.3
(C) 7.2 (D) 13.5

5. 已知直线 $y = kx + \sqrt{3}$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，则 $k =$

- (A) ± 1 (B) $\pm\sqrt{2}$
(C) $\pm\sqrt{3}$ (D) ± 2

6. 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB ，则不等式 $f(x) > \tan \frac{\pi}{4}x$ 的解集是

- (A) $\{x | -2 < x < 0\}$
(B) $\{x | 0 < x < 1\}$
(C) $\{x | -2 < x < 1\}$
(D) $\{x | -1 < x < 2\}$



7. 在某次数学探究活动中, 小明先将一副三角板按照图 1 的方式进行拼接, 然后他又将三角板 ABC 折起, 使得二面角 $A-BC-D$ 为直二面角, 得图 2 所示四面体 $ABCD$. 小明对四面体 $ABCD$ 中的直线、平面的位置关系作出了如下的判断: ① $CD \perp$ 平面 ABC ; ② $AB \perp$ 平面 ACD ; ③ 平面 $ABD \perp$ 平面 ACD ; ④ 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD . 其中判断正确的个数是

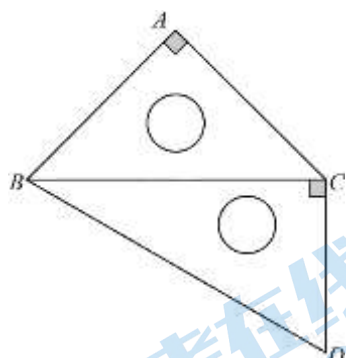


图 1

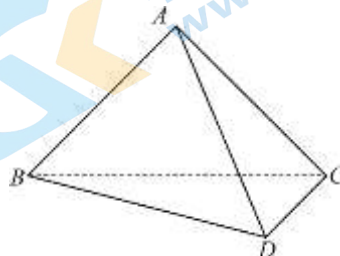


图 2

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4
8. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是两个不共线的单位向量, 向量 $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$). “ $\lambda > 0$, 且 $\mu > 0$ ” 是 “ $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) > 0$ ” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
9. 在八张亚运会纪念卡中, 四张印有吉祥物宸宸, 另外四张印有莲莲. 现将这八张纪念卡平均分配给 4 个人, 则不同的分配方案种数为
- (A) 18 (B) 19
(C) 31 (D) 37
10. 已知函数 $f(x) = |x^2 + a| + 2|x|$, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, 记函数 $f(x)$ 的最大值为 $M(a)$, 则 $M(a)$ 的最小值为
- (A) 3.5 (B) 4
(C) 4.5 (D) 5

第二部分 非选择题 (共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为_____.

12. 已知 $f(x) = 4^x - 4^{-x}$, 则 $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) =$ _____.

13. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, 且 E, F 分别为 BC, CD 的中点, 则

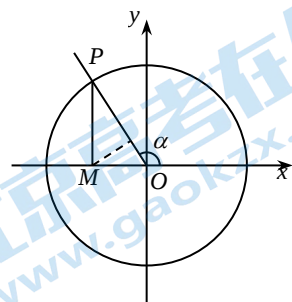
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 $\alpha (0 < \alpha < \pi)$ 的始边为 x

轴的非负半轴, 终边与单位圆 O 交于点 P , 过点 P 作 x 轴

的垂线, 垂足为 M . 若记点 M 到直线 OP 的距离为 $f(\alpha)$,

则 $f(\alpha)$ 的极大值点为 $\underline{\hspace{1cm}}$, 最大值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



15. 在平面直角坐标系内, 动点 M 与定点 $F(0,1)$ 的距离和 M 到定直线 $l: y=3$ 的距离的和为 4. 记动

点 M 的轨迹为曲线 W , 给出下列四个结论:

① 曲线 W 过原点;

② 曲线 W 是轴对称图形, 也是中心对称图形;

③ 曲线 W 恰好经过 4 个整点 (横、纵坐标均为整数的点);

④ 曲线 W 围成区域的面积大于 $8\sqrt{3}$.

则所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } a = \sqrt{3}c, \quad A = \frac{2\pi}{3}.$$

(I) 求 C 的大小;

(II) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 并求出 AC 边上的中线的长度.

条件①: $a = 2b$; 条件②: $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$; 条件③: $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (II) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

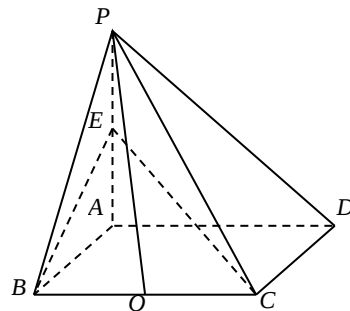
17. (本小题 14 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = PA$, 点 E 为 PA 中点.

(I) 求证: $AD \parallel$ 平面 BCE ;

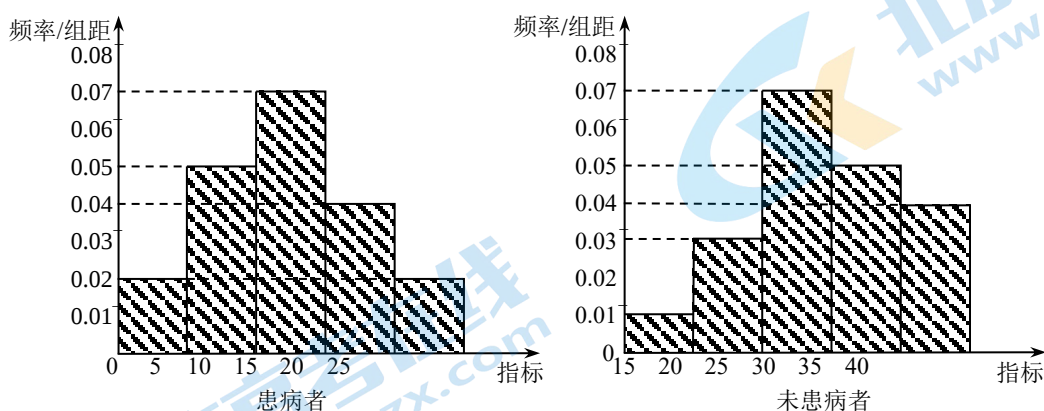
(II) 点 Q 为棱 BC 上一点, 直线 PQ 与平面 BCE 所成角的正弦

值为 $\frac{2\sqrt{5}}{15}$, 求 $\frac{BQ}{BC}$ 的值.



18. (本小题 13 分)

2023 年冬, 甲型流感病毒来势汹汹. 某科研小组经过研究发现, 患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异. 在某地的两类人群中各随机抽取 20 人的该项医学指标作为样本, 得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图:



利用该指标制定一个检测标准, 需要确定临界值 a , 将该指标小于 a 的人判定为阳性, 大于或等于 a 的人判定为阴性. 此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率, 记为 $p(a)$; 误诊率是将未患病者判定为阳性的概率, 记为 $q(a)$. 假设数据在组内均匀分布, 用频率估计概率.

- (I) 当临界值 $a = 20$ 时, 求漏诊率 $p(a)$ 和误诊率 $q(a)$;
- (II) 从指标在区间 $[20, 25]$ 样本中随机抽取 2 人, 记随机变量 X 为未患病者的人数, 求 X 的分布列和数学期望;
- (III) 在该地患病者占全部人口的 5% 的情况下, 记 $f(a)$ 为该地诊断结果不符合真实情况的概率. 当 $a \in [20, 25]$ 时, 直接写出使得 $f(a)$ 取最小值时的 a 的值.

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 - ax - a)$.

- (I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求实数 a 的值;
- (II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

20. (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- (I) 求椭圆 E 的离心率和焦点坐标;
- (II) 设直线 $l_1: y = kx + m$ 与椭圆 E 相切于第一象限内的点 P , 不过原点 O 且平行于 l_1 的直线 l_2 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 点 A 关于原点 O 的对称点为 C .

记直线 OP 的斜率为 k_1 , 直线 BC 的斜率为 k_2 , 求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值.

21. (本小题 15 分)

对于数列 $\{a_n\}$ ，如果存在正整数 T ，使得对任意 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ ，都有 $a_{n+T} = a_n$ ，那么数列 $\{a_n\}$ 就叫做周期数列， T 叫做这个数列的周期. 若周期数列 $\{b_n\}$ ， $\{c_n\}$ 满足：存在正整数 k ，对每一个 $i(i \leq k, i \in \mathbf{N}^*)$ ，都有 $b_i = c_i$ ，我们称数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 为“同根数列”.

(I) 判断下列数列是否为周期数列. 如果是，写出该数列的周期，如果不是，说明理由：

$$\textcircled{1} a_n = \sin n\pi; \textcircled{2} b_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 3, & n=2, \\ b_{n-1} - b_{n-2}, & n \geq 3. \end{cases}$$

(II) 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是“同根数列”，且周期的最小值分别是 3 和 5，求证： $k \leq 6$ ；

(III) 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是“同根数列”，且周期的最小值分别是 $m+2$ 和 $m+4$ ($m \in \mathbf{N}^*$)，求 k 的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效)

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	A	B	D	B	B	C	C	A	B	C

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) $y = \pm \frac{x}{2}$

(12) 0

(13) $-\frac{7}{4}$

(14) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{1}{2}$

(15) ①③④

注：(15) 题给出的结论中有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或错选得 0 分，其他得 3 分。

(15) 曲线方程为 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + |y-3| = 4$,

移项平方得: $x^2 = 24 - 4y - 8|y-3|$,

当 $y \geq 3$ 时, 有 $x^2 = 48 - 12y$; 当 $y < 3$ 时, 有 $x^2 = 4y$.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

(16) (本小题 14 分)

解：(I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 又 $a = \sqrt{3}c$, 所以

$$\sin A = \sqrt{3} \sin C.$$

因为 $A = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin C = \frac{1}{2}$.

因为 $0 < C < \frac{\pi}{3}$, 所以 $C = \frac{\pi}{6}$6 分

(II) 选择条件①不符合要求, 得 0 分;

选择条件②: 因为 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{2\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6}$, $A + B + C = \pi$,

所以 $B = \frac{\pi}{6}$, 即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 其中 $b = c$.

因为 $a = \sqrt{3}b$, 所以 $a + b + c = \sqrt{3}b + 2b = 4 + 2\sqrt{3}$.

所以 $b = 2$.

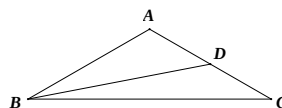
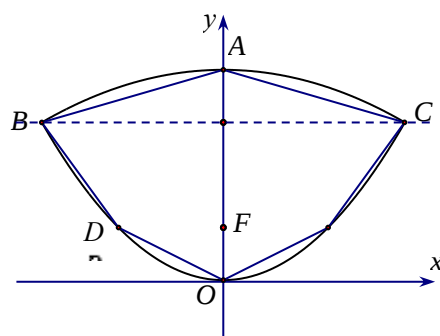
设点 D 为线段 AC 的中点, 在 $\triangle ABD$ 中, $AD = 1$.

因为 $\triangle ABD$ 中,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$$

$$= 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7,$$

所以 $BD = \sqrt{7}$, 即 AC 边上的中线的长度为 $\sqrt{7}$.



选择条件③：因为 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{2\pi}{3}$ ， $C = \frac{\pi}{6}$ ， $A + B + C = \pi$ ，

所以 $B = \frac{\pi}{6}$ ，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，其中 $b = c$ 。

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，即 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$ ，

所以 $b = c = 2$ 。

设点 D 为线段 AC 的中点，在 $\triangle ABD$ 中， $AD = 1$ 。

因为 $\triangle ABD$ 中， $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD$

$$= 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 7,$$

所以 $BD = \sqrt{7}$ ，即 AC 边上的中线的长度为 $\sqrt{7}$ 。

.....14分

(17) (本小题 14 分)

解：(I) 证明：因为正方形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ 。

因为 $BC \subset$ 平面 BCE ， $AD \not\subset$ 平面 BCE ，所以 $AD \parallel$ 平面 BCE 。

.....4分

(II) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，正方形 $ABCD$ 中 $AB \perp AD$ ，

所以如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ，则 $A(0,0,0)$ 。

不妨设 $PA = 2$ ，因为 $AD = PA$ ，点 E 为 PA 的中点，点 Q 为棱 BC 上一点，

所以 $B(2,0,0)$ ， $C(2,2,0)$ ， $E(0,0,1)$ ， $P(0,0,2)$ ， $Q(2,m,0)$ ($0 \leq m \leq 2$)。

所以 $\overrightarrow{BC} = (0,2,0)$ ， $\overrightarrow{BE} = (-2,0,1)$ ， $\overrightarrow{PQ} = (2,m,-2)$ 。

设 $\mathbf{n} = (x,y,z)$ 为平面 BCE 的法向量，则 $\overrightarrow{BC} \perp \mathbf{n}$ ， $\overrightarrow{BE} \perp \mathbf{n}$ 。

因为 $\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} 2y = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$ 。

令 $x = 1$ ，得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ，所以 $\mathbf{n} = (1,0,2)$ 。

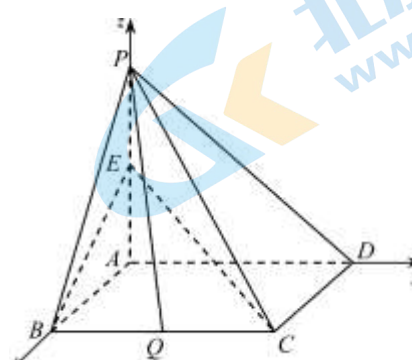
设直线 PQ 与平面 BCE 所成角为 θ ，则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PQ}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PQ}| |\mathbf{n}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{8+m^2} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15},$$

所以 $m^2 = 1$ 。

因为 $0 \leq m \leq 2$ ，所以 $m = 1$ ，所以 $\frac{BQ}{BC} = \frac{1}{2}$ 。

.....14分



(18) (本小题 13 分)

解: (I) 由频率分布直方图可知 $p(20) = 0.02 \times 5 = 0.1$, $q(20) = 0.01 \times 5 = 0.05$.

.....3 分

(II) 样本中患病者在指标为区间 $[20, 25]$ 的人数是 $20 \times 0.02 \times 5 = 2$, 未患病者在指标为区间 $[20, 25]$ 的人数是 $20 \times 0.03 \times 5 = 3$, 总人数为 5 人.

X 可能的取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^2 C_3^0}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \quad P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}, \quad P(X=2) = \frac{C_2^0 C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}.$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的期望为 } E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

.....10 分

(III) $a = 20$.

.....13 分

(19) (本小题 14 分)

解: (I) 由题可得 $f'(x) = e^x [x^2 + (2-a)x - 2a]$,

因为 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 所以 $f'(1) = 0$,

即 $e(3-3a) = 0$,

解得 $a = 1$, 经检验 $a = 1$ 符合题意.

.....5 分

(II) 因为 $f'(x) = e^x [x^2 + (2-a)x - 2a]$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = a$.

当 $a < -2$ 时, 随 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	$f(a)$	单调递减	$f(-2)$	单调递增

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在区间 $(a, -2)$ 上单调递减, 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a = -2$ 时, 因为 $f'(x) = e^x (x+2)^2 \geq 0$, 当且仅当 $x = -2$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > -2$ 时, 随 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表所示

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$f(x)$	单调递增	$f(-2)$	单调递减	$f(a)$	单调递增
--------	------	---------	------	--------	------

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在区间 $(-2, a)$ 上单调递减, 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述,

当 $a < -2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, a)$, $(-2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, -2)$;

当 $a = -2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > -2$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -2)$, $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-2, a)$.

.....14 分

(20) (本小题 15 分)

解: (I) 由题意得
$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}.$$

所以椭圆 E 的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 焦点坐标分别为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

.....5 分

(II) 由
$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得: } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0 \quad \text{①}$$

其判别式 $\Delta = 0$ 得 $(8km)^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0$, 化简为 $m^2 = 4k^2 + 3$.

此时方程①可化为 $m^2x^2 + 8kmx + 16k^2 = 0$, 解得 $x = -\frac{4k}{m}$.

记 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0 = -\frac{4k}{m}$, 所以 $y_0 = k(-\frac{4k}{m}) + m = \frac{m^2 - 4k^2}{m} = \frac{3}{m}$, 即点 $P(-\frac{4k}{m}, \frac{3}{m})$.

所以 OP 的斜率 $k_1 = \frac{\frac{3}{m}}{-\frac{4k}{m}} = -\frac{3}{4k}$.

法一: 因为 $l_1 \parallel l_2$, 所以可设直线 l_2 的方程为 $y = kx + n (n \neq 0, n \neq m)$.

由
$$\begin{cases} y = kx + n, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得: } (4k^2 + 3)x^2 + 8knx + 4n^2 - 12 = 0.$$

当其判别式大于零时, 有两个不相等的实根, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8kn}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4n^2 - 12}{4k^2 + 3}$.

因为 C 是 A 关于原点 O 的对称点, 所以点 C 的坐标为 $C(-x_1, -y_1)$.

所以直线 BC 的斜率

$$k_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{kx_2 + n + kx_1 + n}{x_2 + x_1} = k + \frac{2n}{x_2 + x_1} = k + \frac{2n}{-\frac{8kn}{4k^2 + 3}} = k - \frac{4k^2 + 3}{4k} = -\frac{3}{4k}.$$

所以 $\frac{k_1}{k_2} = 1$.

法二：记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

因为点 C 与点 A 关于原点对称，所以 $C(-x_1, -y_1)$.

因为 $l_1 \parallel l_2$ ，所以直线 AB 的斜率为 k ，所以 $k \cdot k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}$.

因为点 A, B 在椭圆上，所以 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$, $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$.

两式相减得： $\frac{x_2^2 - x_1^2}{4} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{3} = 0$.

所以 $\frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -\frac{3}{4}$ ，即 $k \cdot k_2 = -\frac{3}{4}$ ，所以 $k_2 = -\frac{3}{4k}$.

所以 $\frac{k_1}{k_2} = 1$.

.....15 分

(21) (本小题 15 分)

解：(I) $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 均是周期数列，理由如下：

因为 $a_{n+1} = \sin(n+1)\pi = 0 = \sin n\pi = a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是周期数列，其周期为 1 (或任意正整数).

因为 $b_{n+3} = b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n - b_{n+1} = -b_n$,

所以 $b_{n+6} = -b_{n+3} = b_n$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是周期数列，其周期为 6 (或 6 的正整数倍).

.....4 分

(II) 假设 $k \leq 6$ 不成立，则有 $k \geq 7$ ，即对于 $1 \leq i \leq 7$ ，都有 $a_i = b_i$.

因为 $a_7 = a_1$, $b_7 = b_2 = a_2$ ，所以 $a_1 = a_2$.

又因为 $a_6 = a_3$, $b_6 = b_1 = a_1$ ，所以 $a_1 = a_3$.

所以 $a_1 = a_2 = a_3$,

所以 $a_{n+1} = a_n$ ，与 T_1 的最小值是 3 矛盾.

所以 $k \leq 6$.

.....9 分

(III) 当 m 是奇数时，首先证明 $k \geq 2m+5$ 不存在数列满足条件.

假设 $k \geq 2m+5$ ，即对于 $1 \leq i \leq 2m+5$ ，都有 $a_i = b_i$.

因为 $a_{m+t} = b_{m+t} (5 \leq t \leq m+4)$,

所以 $a_{t-2} = b_{t-4} = a_{t-4} (5 \leq t \leq m+4)$,

即 $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{m+2}$, 及 $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_{m+1}$.

又 $t = m+5$ 时, $a_1 = a_{2(m+2)+1} = b_{2m+5} = b_{m+1} = a_{m+1}$,

所以 $a_{n+1} = a_n$, 与 T_1 的最小值是 $m+2$ 矛盾.

其次证明 $k = 2m+4$ 存在数列满足条件.

$$\text{取 } a_{(m+2)l+i} = \begin{cases} 1, i=2k-1 (1 \leq k \leq \frac{m+3}{2}) \\ 2, i=2k (1 \leq k \leq \frac{m+1}{2}) \end{cases} \quad (l \in \mathbf{N})$$

$$\text{及 } b_{(m+4)l+i} = \begin{cases} 1, i=2k-1 (1 \leq k \leq \frac{m+3}{2}) \\ 2, i=2k (1 \leq k \leq \frac{m+1}{2}) \\ 1, i=m+3 \\ 2, i=m+4 \end{cases} \quad (l \in \mathbf{N}),$$

对于 $1 \leq i \leq 2m+4$, 都有 $a_i = b_i$.

当 m 是偶数时, 首先证明 $k \geq 2m+4$ 时不存在数列满足条件.

假设 $k \geq 2m+4$, 即对于 $1 \leq i \leq 2m+4$, 都有 $a_i = b_i$.

因为 $a_{m+t} = b_{m+t} (5 \leq t \leq m+3)$,

所以 $a_{t-2} = b_{t-4} = a_{t-4} (5 \leq t \leq m+3)$,

即 $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{m+1}$, 及 $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = a_m$.

又 $t = m+4$ 时, $a_{m+2} = b_m = a_m$,

所以 $a_{n+2} = a_n$, 与 T_1 的最小值是 $m+2$ 矛盾.

其次证明 $k = 2m+3$ 时存在数列满足条件.

$$\text{取 } a_{(m+2)l+i} = \begin{cases} 1, i=2k-1 (1 \leq k \leq \frac{m+2}{2}) \\ 2, i=2k (1 \leq k \leq \frac{m}{2}) \\ 3, i=m+2 \end{cases} \quad (l \in \mathbf{N})$$

$$\text{及 } b_{(m+4)l+i} = \begin{cases} 1, i=2k-1 (1 \leq k \leq \frac{m+2}{2}) \\ 2, i=2k (1 \leq k \leq \frac{m}{2}) \\ 3, i=m+2 \\ 1, i=m+3 \\ 2, i=m+4 \end{cases} \quad (l \in \mathbf{N}),$$

对于 $1 \leq i \leq 2m+3$ ，都有 $a_i = b_i$ 。

综上，当 m 是奇数时， k 的最大值为 $2m+4$ ；

当 m 是偶数时， k 的最大值为 $2m+3$ 。

.....15 分

（其他正确答案请酌情给分）

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜

京考一点通

