北京一六一中学2023—2024学年度第一学期10月阶段性测试

高 三 数 学 试 卷

班级______ 姓名______ 学号______

考	1. 本试卷共3页，满分150分，考试时长120分钟。
生	2. 试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效。
须	3. 在答题纸上，选择题用2B铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答。
知	4. 考试结束后，将答题纸、试卷和草稿纸一并交回。

一、选择题：本大题共10道小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1. 已知复数 $z=\frac{i}{1-i}$，则 $|z|=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1\}$，$C_U(A\cup B)=\{3\}$，则集合 B 可能是

A. $\{4\}$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1,2,3\}$

3. 下列函数 $f(x)$ 中，其图象上任意一点 $P(x,y)$ 的坐标都满足条件 $y\le|x|$ 的函数是

A. $f(x)=x^3$　　B. $f(x)=\sqrt{x}$　　C. $f(x)=e^x-1$　　D. $f(x)=\ln(x+1)$

4. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

5. 已知 $a=3^{0.5}$，$b=\log_3 2$，$c=\tan\frac{2\pi}{3}$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　A. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

6. 某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如表所示：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

根据这些数据，要得到函数 $y=A\sin\omega x$ 的图象，需要将函数 $f(x)$ 的图象

A. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位　　B. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位　　D. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

7. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是

A. $f(x+1)-1$　　B. $f(x+1)+1$　　C. $f(x-1)+1$　　D. $f(x-1)-1$

8. 已知 $f(x)=\sin x-x$，命题 P：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$，则

A. P 是假命题，$\neg P$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)\geq 0$　　B. P 是假命题，$\neg P$：$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x_0)\geq 0$

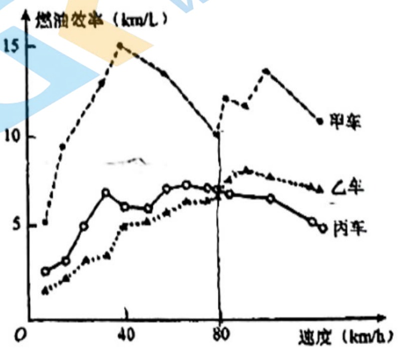
C. P 是真命题，$\neg P$：$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x)>0$　　D. P 是真命题，$\neg P$：$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(x_0)\geq 0$

9. 已知 α，$\beta\in R$，则 “存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$” 是 “$\sin\alpha=\sin\beta$” 的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗1升汽油行驶的里程，右图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况. 下列叙述中正确的是



①消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米；

②以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最少；

③甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油；

④某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油.

A. ②④　　B. ①③　　C. ①②　　D. ③④

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 在 $(x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，$\frac{1}{x}$ 的系数为________.

12. 已知角 α,β 的终边关于原点 O 对称，则 $\cos(\alpha-\beta)=$__________

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x+1)>1$ 的 x 的取值范围是______.

14. 若方程 $e^x-ax+a=0$ 有根，则实数 a 的取值范围是________.

15. 已知函数 $f(x)$ 由下表给出：

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

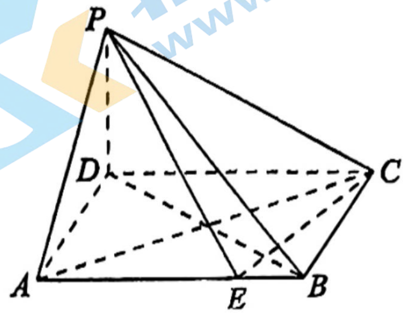
其中 $a_k\ (k=0,1,2,3,4)$ 等于 a_0，a_1，a_2，a_3 中 k 所出现的次数.

则 $a_4=$_______；$a_0+a_1+a_2+a_3=$________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程，并写在答题纸相应位置。

16.（本小题 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$PD=AD=2$，$AB=4$，点 E 在线段 AB 上，且 $AE=\frac{3}{4}AB$.



（Ⅰ）求证：$CE\perp$ 平面 PBD；

（Ⅱ）求二面角 $P-CE-A$ 的余弦值.

17.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)+\cos 2x$，其中 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$. 再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，使 $f(x)$ 存在，并完成下列两个问题.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）当 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 时，若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m$ 恰有一个公共点，求 m 的取值范围.

条件①：$f(\frac{\pi}{6})=-1$；

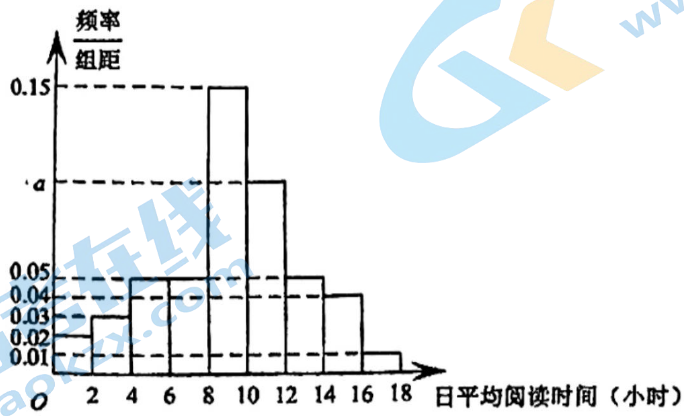
条件②：$-\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 的一个零点；

条件③：$f(0)=f(\frac{\pi}{3})$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （本小题 14 分）

为了解某地区高一学生阅读时间的分配情况，从该地区随机抽取了 500 名高一学生进行在线调查，得到了这 500 名学生的日平均阅读时间（单位：小时），并将样本数据分成$[0,2]$，$(2,4]$，$(4,6]$，$(6,8]$，$(8,10]$，$(10,12]$，$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）为进一步了解这 500 名学生数字媒体阅读时间和纸质图书阅读时间的分配情况，从日平均阅读时间在$(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了 10 人，现从这 10 人中随机抽取 3 人，记日平均阅读时间在$(14,16]$内的学生人数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）以调查结果的频率估计概率，从该地区所有高一学生中随机抽取 20 名学生，用“$P_{20}(k)$”表示这 20 名学生中恰有 k 名学生日平均阅读时间在$(10,12]$（单位：小时）内的概率，其中 $k=0,1,2,\cdots,20$. 当 $P_{20}(k)$ 最大时，写出 k 的值.（只需写出结论）

19.（本小题 14 分）

设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=x+1$，

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间.

20. （本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\left(\frac{a+1}{2}\right)x^2+ax+1$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 1，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，不等式 $f(x_1)-f(x_2)<(a-2)x_1-(a-2)x_2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21. （本小题 15 分）

已知数列 $\{a_n\}$，记集合 $T=\{S(i,j)|S(i,j)=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j,1\leqslant i<j,i,j\in\mathbf{N}^*\}$.

（Ⅰ）对于数列 $\{a_n\}$：1, 2, 3, 4，写出集合 T；

（Ⅱ）若 $a_n=2n$，是否存在 $i,j\in\mathbf{N}^*$，使得 $S(i,j)=1024$？若存在，求出一组符合条件的 i,j；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）若 $a_n=2n-2$，把集合 T 中的元素从小到大排列，得到的新数列为 $B:b_1,b_2,\cdots,b_m,\cdots$. 若 $b_m\leq 2024$，求 m 的最大值.

北京一六一中学 2023—2024 学年度第一学期 10 月阶段测试

高三数学标准答案和评分标准

一、选择题　每小题 4 分，共计 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	A	A	B	C	D	C	A

二、填空题　每小题 5 分，共计 25 分.

11. -10.　12. -1.　13. $(-1,+\infty)$.　14. $(-\infty,\ 0)\cup\left[e^2,+\infty\right)$　15. 0,　4.

三、解答题　共计 85 分.

16.（本题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $CE\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp CE$.

因为 $AB=4$， $AE=\dfrac{3}{4}AB$，

所以 $AE=3$， $BE=1$.

所以 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{BE}=2$.

所以 $\mathrm{Rt}\triangle CBE\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAD$，

所以 $BD\perp CE$.

又因为 $PD\perp CE$， $PD\cap BD=D$，

所以 $CE\perp$ 平面 PBD.　…………………5 分

（Ⅱ）因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$， $CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AD$， $PD\perp CD$.

又因为 $ABCD$ 是矩形， $AD\perp CD$，

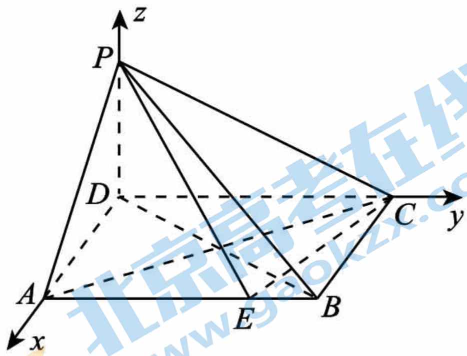
所以 AD,CD,PD 两两垂直，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $C(0,4,0)$， $P(0,0,2)$， $E(2,3,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,4,-2)$， $\overrightarrow{CE}=(2,-1,0)$.

设平面 PCE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$， 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 2x-y=0, \\ 4y-2z=0. \end{cases}$$



令 $x=1$，则 $y=2$， $z=4$．

于是 $\boldsymbol{n}=(1,2,4)$．

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

取平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$．

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{1\cdot\sqrt{1+4+16}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$．

由图可知二面角 $P-CE-A$ 为锐角，

所以二面角 $P-CE-A$ 的余弦值是 $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$．　　　　………………13 分

17.（本题共 14 分）

解：选条件②.

（Ⅰ）由题设 $f(-\dfrac{\pi}{12})=\sin(-\dfrac{\pi}{6}+\varphi)+\cos(-\dfrac{\pi}{6})=0$．　　　　………1 分

所以 $\sin(\varphi-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．　　　　………2 分

因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，　所以 $-\dfrac{2\pi}{3}<\varphi-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$．　　　　………3 分

所以 $\varphi-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{3}$．　　　　………4 分

所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$．　　　　………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})+\cos 2x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$　　　　………7 分

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$．　　　　………8 分

因为 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，　所以 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$．　　　　………9 分

于是，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 1； ………11 分

当且仅当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$． ………12 分

又 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$． ………13 分

所以 m 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup\{1\}$． ………14 分

法二：由（Ⅰ）$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\cos 2x$

$=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x$ ………6 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$ ………7 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$． ………8 分

因为 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$， 所以 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$． ………9 分

所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减. ………10 分

因为 $f(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$，$f(\frac{\pi}{6})=1$，$f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$. ………13 分

所以 m 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cup\{1\}$． ………14 分

选条件③.

（Ⅰ）由题设 $\sin\varphi+\cos 0=\sin(\frac{2\pi}{3}+\varphi)+\cos\frac{2\pi}{3}$． ………1 分

整理得 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$． ………2 分

以下同选条件②.

18.（本题共 14 分）

解：（Ⅰ）由频率分布直方图得:

$2(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)=1$，

解得 $a=0.10$． ………2 分

（Ⅱ）由频率分布直方图得：

这 500 名学生中日平均阅读时间在$(12，14]$，$(14，16]$，$(16，18]$三组内的学生人数分别为：

$500\times0.10=50$人，$500\times0.08=40$人，$500\times0.02=10$人，

若采用分层抽样的方法抽取了 10 人，

则从日平均阅读时间在$(14，16]$内的学生中抽取：$\dfrac{40}{50+40+10}\times10=4$人. ………3 分

现从这 10 人中随机抽取 3 人，则 X 的可能取值为 0，1，2，3， ………4 分

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$， ………10 分

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

………11 分

（Ⅲ）由（1）可知$(10,12]$的概率$P=0.1\times2=0.2$，所以

$P_{20}(k)=C_{20}^k0.2^k(1-0.2)^{20-k}=C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}$

依题意$\begin{cases}P_{20}(k)\geq P_{20}(k-1)\\P_{20}(k)\geq P_{20}(k+1)\end{cases}$，即$\begin{cases}C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}\geq C_{20}^{k-1}0.2^{k-1}0.8^{21-k}\\C_{20}^k0.2^k0.8^{20-k}\geq C_{20}^{k+1}0.2^{k+1}0.8^{19-k}\end{cases}$，即

$\begin{cases}0.2\times\dfrac{20-k+1}{k}\geq0.8\\0.8\geq0.2\times\dfrac{20-(k+1)+1}{k+1}\end{cases}$，解得$\dfrac{16}{5}\leq k\leq\dfrac{21}{5}$，因为$k$为非负整数，所以$k=4$

即当$P_{20}(k)$最大时，$k=4$. ………14 分

19.（本题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，所以 $f'(x)=(1-x)e^{a-x}+b$.

依题设，$\begin{cases} f(1)=1, \\ f'(1)=1, \end{cases}$

解得 $a=1$，$b=1$.　　　　………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=xe^{1-x}+x$.

由 $f'(x)=(1-x)e^{1-x}+1$.

令 $g(x)=(1-x)e^{1-x}+1$，则 $g'(x)=(x-2)e^{1-x}$.

所以，当 $x\in(-\infty,2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上单调递减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(2)=1-e^{-1}$ 是 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值，

从而 $g(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,+\infty)$　　　　………14 分

20.（本题共 15 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$，$\therefore f'(x)=x^2-x=x(x-1)$，　　………………1 分

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增		减		增

…………2 分

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(0)=1$，极小值为 $f(0)=\frac{5}{6}$，.　　………………4 分

（Ⅱ）$f'(x)=(x-1)(x-a)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=a$.　　………………5 分

（1）当 $a\le 0$ 时，则 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\le 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，

$f(x)_{\max}=f(0)=1$ 成立； ………………6 分

（2）当 $0<a<1$ 时，

当 $x\in(0,\ a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(a,1)$ 时，$f'(x)<0$．

故 $f(x)$ 在 $(0,\ a)$ 上单调递增，在 $(a,1)$ 上单调递减；

法一：$f(x)_{\max}=f(a)>f(0)=1$，不合题意； ………………8 分

法二：$f(x)_{max}=f(a)=1$ 解得：$a=0$ 或 $a=3$ 均不合题意

（3）当 $a\geq 1$ 时，则 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

法一：$f(x)_{\max}=f(1)>f(0)=1$，不合题意． ………………9 分

法二：$f(x)_{max}=f(1)=1$ 解得：$a=\frac{1}{3}$ 不合题意

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$． ………………10 分

（III）设 $g(x)=f(x)+(2-a)x$，

则 $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\left(\dfrac{a+1}{2}\right)x^2+2x+1$， ………………11 分

由题知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则有 $x>0$ 时，$g'(x)\geq 0$ 恒成立． ………………12 分

而 $g'(x)=x^2-(a+1)x+2$，即 $x^2-(a+1)x+2\geq 0$ 恒成立．

则有 $a+1\leq x+\dfrac{2}{x}$，而 $x+\dfrac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$（当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立），

所以 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)_{\min}=2\sqrt{2}$，即有 $a\leq 2\sqrt{2}-1$． ………………15 分

21. （本题共 15 分）

解：（Ⅰ）$T=\{3,5,6,7,9,10\}$. …………………3 分

（Ⅱ）假设存在i，$j\in\mathbf{N}^*$，使得$S(i,\ j)$=1024，则有

$$1024=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_j=2i+2(i+1)+\cdots+2j=(j-i+1)(i+j),$$

由于$i+j$与$j-i$奇偶性相同，

所以$i+j$与$j-i+1$奇偶性不同. 又因为$i+j\geqslant3$，$j-i+1\geqslant2$，

所以1024必有大于等于3的奇数因子，这与1024无1以外的奇数因子矛盾.

故不存在i，$j\in\mathbf{N}^*$，使得$S(i,j)$=1024成立. …………………8 分

（Ⅲ）首先证明$a_n=n$时，对任意的$m\in\mathbf{N}^*$都有$b_m\neq2^t$，$t\in\mathbf{N}^*$.

若$\exists i,j\in\mathbf{N}^*$，使得：$i+(i+1)+\cdots+j=\dfrac{(j-i+1)(i+j)}{2}=2^t$，

由于$j-i+1$与$j-i$均大于2且奇偶性不同，所以$(j-i+1)(i+j)=2^{t+1}$不成立.

其次证明除$2^t(t\in\mathbf{N})$形式以外的数，都可以写成若干个连续正整数之和.

若正整数$h=2^t(2k+1)$，其中$t\in\mathbf{N}$，$k\in\mathbf{N}^*$.

当$2^{t+1}>2k+1$时，由等差数列的性质有：

$$h=\underbrace{2^t+2^t+\cdots+2^t}_{(2k+1)\text{个}}=(2^t-k)+\cdots+(2^t-1)+2^t+(2^t+1)\cdots+(2^t+k)$$

此时结论成立.

当$2^{t+1}<2k+1$时，由等差数列的性质有：

$$h=\underbrace{(2k+1)+(2k+1)+\cdots+(2k+1)}_{2^t\text{个}}$$

$$=(k-2^t+1)+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(k+2^t),$$

此时结论成立.

对于数列$a_n=2n-2$. 此问题等价于数列$0,1,2,3,\cdots,n,\cdots$，其相应集合T中满足：

$b_n\le 1012$有多少项.

由前面的证明可知正整数$2,4,8,16,32,64,128,256,512$不是集合$T$中的项，所以$n$的最大值为$1003$. ……………………15 分

微信搜一搜
京考一点通