2022 北京海淀高二（下）期末

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x|x\leqslant 3\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$\{1,2\}$　　B．$\{1,2,3\}$　　C．$\{3,4,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5\}$

2．设命题 $p:\forall x\in R$，$e^x\geqslant x+1$，则 $\neg p$ 为$($　　$)$

A．$\exists x\in R$，$e^x<x+1$　　B．$\forall x\in R$，$e^x<x+1$　　C．$\exists x\in R$，$e^x>x+1$　　D．$\exists x\in R$，$e^x\geqslant x+1$

3．在 $(x-\frac{2}{x})^6$ 的展开式中，常数项为$($　　$)$

A．-20　　B．20　　C．-160　　D．160

4．如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是$($　　$)$

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B．$a^2<b^2$　　C．$\frac{a}{b}<1$　　D．$ab>b^2$

5．已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(0<\xi<2)=0.3$，则 $P(\xi>4)=($　　$)$

A．0.6　　B．0.4　　C．0.3　　D．0.2

6．某班周一上午共有四节课，计划安排语文、数学、美术、体育各一节，要求体育不排在第一节，则该班周一上午不同的排课方案共有$($　　$)$

A．24 种　　B．18 种　　C．12 种　　D．6 种

7．小王同学制作了一枚质地均匀的正十二面体骰子，并在十二个面上分别画了十二生肖的图案，且每个面上的生肖各不相同，如图所示．小王抛掷这枚骰子 2 次，恰好出现一次龙的图案朝上的概率为$($　　$)$

A．$\frac{11}{144}$　　B．$\frac{1}{12}$　　C．$\frac{11}{72}$　　D．$\frac{1}{6}$

8．若曲线 $y=f(x)$ 在某点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 1，则该曲线不可能是$($　　$)$

A．$y=-\frac{1}{x}$　　B．$y=\sin x$　　C．$y=xe^x$　　D．$y=x+lnx$

9．已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$0>a_1>a_2$”是“$\{a_n\}$ 为递减数列”的$($　　$)$

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知函数 $f(x)=lnx-k\sin x$，$x\in(0,\pi]$，给出下列三个结论：

① $f(x)$ 一定存在零点；

②对任意给定的实数k，$f(x)$一定有最大值；

③ $f(x)$在区间$(0,\pi)$上不可能有两个极值点.

其中正确结论的个数是(　　)

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

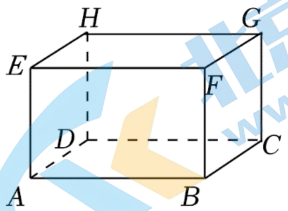
二、填空题共5小题，每小题4分，共20分。

11．在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(-2,1)$，则$i\cdot z=$____.

12．不等式$\dfrac{3}{x-2}>-1$的解集是____.

13．若函数$f(x)=x^3+ax^2+2$在区间$[1，+\infty)$上单调递增，则a的取值范围是____.

14．某地要建造一批外形为长方体的简易工作房，如图所示．房子的高度为$3m$，占地面积为$6m^2$，墙体$ABFE$和$DCGH$的造价均为80元$/m^2$，墙体$ADHE$和$BCGF$的造价均为120元$/m^2$，地面和房顶的造价共2000元．则一个这样的简易工作房的总造价最低为____元.



15．已知数列$\{a_n\}$的每一项均不为0，其前n项和为S_n，且$3S_n=a_na_{n+1}+10$.

①当$a_1=1$时，$a_3=$____；

②若对任意的$n\in N^*$，$S_n\geqslant S_4$恒成立，则a_1的最大值为____.

三、解答题共4小题，共40分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．(9分)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，满足$a_1=1$，$d>0$，且a_1，a_2，S_3成等比数列.

(I)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(II)记$b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

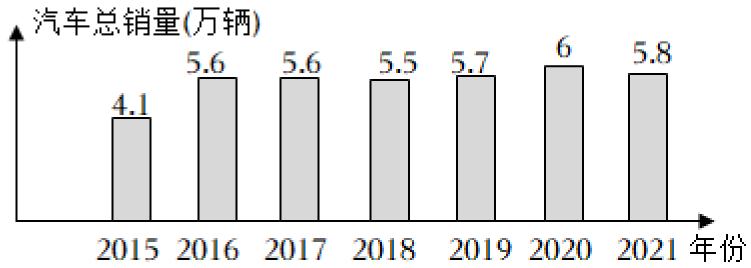
17．(10分)研究表明，过量的碳排放会导致全球气候变暖等环境问题，减少碳排放具有深远的意义．中国明确提出节能减排的目标与各项措施，在公路交通运输领域，新能源汽车逐步取代燃油车是措施之一．中国某地区从2015年至2021年每年汽车总销量如图，每年新能源汽车销量占比如表．(注:汽车总销量指新能源汽车销量与非新能源汽车销量之和)

年份	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
新能源汽车销量占比	1.5%	2%	3%	5%	8%	9%	20%

(I)从2015年至2021年中随机选取一年，求这一年该地区汽车总销量不小于5.5万辆的概率；

(II)从2015年至2021年中随机选取两年，设X表示新能源汽车销量超过0.5万辆的年份的个数，求X的分布列和数学期望；

(III)对该地区连续三年的新能源汽车销量作统计分析时，若第三年的新能源汽车销量大于前两年新能源汽车销量之和，则称第三年为“爆发年”．请写出该地区从2017年至2021年中“爆发年”的年份．(只需写出结论)



18.（10 分）已知函数$\{a_n\}=x^2-a\ln x$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $f(x)$ 有两个不同的零点，求 a 的取值范围.

19.（11 分）已知n为正整数，数列$X:x_1$，x_2，…，x_n，记$S(X)=x_1+x_2+\cdots+x_n$，对于数列X，总有$x\in\{0，1\}$，$k=1$，2，…，n，则称数列X为n项$0-1$数列.

若数列$A:a_1$，a_2，…，a_n，$B:b_1$，b_2，…，b_n，均为n项$0-1$数列，定义数列$A*B:m_1$，m_2，…，m_n，其中$m_k=1-|a_k-b_k|$，$k=1$，2，…，n.

（I）已知数列A:1，0，1，B:0，1，1，直接写出$S(A*A)$和$S(A*B)$的值；

（II）若数列A，B均为n项$0-1$数列，证明：$S((A*B)*A)=S$（B）；

（III）对于任意给定的正整数n，是否存在n项$0-1$数列A，B，C，使得$S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=2n$，并说明理由.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【分析】利用交集定义直接求解.

【解答】解：集合 $A=\{1，2，3，4，5\}$， $B=\{x\mid x\leqslant 3\}$，

则 $A\bigcap B=\{1，2，3\}$.

故选： B.

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2.【分析】根据题意，由全称命题和特称命题的关系，分析可得答案.

【解答】解：根据题意，设命题 $p:\forall x\in R$， $e^{x}\geqslant x+1$，则 $\neg p$ 为 $\exists x\in R$， $e^{x}<x+1$，

故选： A.

【点评】本题考查命题的否定，注意全称命题和特称命题的关系，属于基础题.

3.【分析】由题意，在二项式展开式的通项公式，令 x 的幂指数等于 0，求得 r 的值，即可求得展开式中的常数项的值.

【解答】解：在 $(x-\dfrac{2}{x})^{6}$ 的展开式中，通项公式为 $T_{r+1}=C_{6}^{r}\cdot(-2)^{r}\cdot x^{6-2r}$，

令 $6-2r=0$，求得 $r=3$，可得常数项为 $T_{4}=C_{6}^{3}\cdot(-2)^{3}=-160$，

故选： C.

【点评】本题主要考查二项式定理的应用，二项式展开式的通项公式，属于基础题.

4.【分析】运用不等式的性质直接求解.

【解答】解：选项 A， $\because a<b<0$， $\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，选项 A 错误；

选项 B， $\because a<b<0$， $\therefore a^{2}-b^{2}=(a+b)(a-b)>0$， $a^{2}>b^{2}$，选项 B 错误；

选项 C， $\because a<b<0$， $\therefore \dfrac{a}{b}>1$，选项 C 错误；

选项 D， $\because a<b<0$， $\therefore ab>b^{2}$，选项 D 正确.

故：选 D.

答案为： D.

【点评】本题考查了不等式的性质，是基础题.

5.【分析】根据已知条件，结合正态分布的对称性，即可求解.

【解答】解： $\because$ 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^{2})$，且 $P(0<\xi<2)=0.3$，

$\therefore P(\xi>4)=P(\xi<0)=0.5-P(0<\xi<2)=0.5-0.3=0.2$.

故选： D.

【点评】本题主要考查正态分布的对称性，属于基础题.

6.【分析】先安排体育课，有 3 种选择，剩下的 3 节课全排，然后根据分步乘法计数原理计算即可.

【解答】解：先安排体育课，体育不排在第一节有 3 种方法，

剩下的 3 节课有 $A_{3}^{3}=6$ 种方法，

则该班周一上午不同的排课方案共有$3\times 6=18$种．

故选：B．

【点评】本题考查排列组合公式的运用，特殊元素优先安排是基本的指导思想．

7．【分析】可以利用对立事件求，先求两次都是龙朝上的概率P（A），再求两次都不是龙朝上的概率P（B），再求$1-P$（A）$-P$（B）即可．

【解答】解：设A表示两次都是龙朝上，B表示两次都不是龙朝上．C表示恰好出现一次龙的图案朝上的概率．

则P（A）$=\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{144}$；$P$（B）$=\dfrac{11}{12}\times\dfrac{11}{12}=\dfrac{121}{144}$．

故P（C）$=1-\dfrac{1}{144}-\dfrac{121}{144}=\dfrac{11}{72}$．

故选：C．

【点评】本题主要考查相互独立事件和对立事件，属于基础题．

8．【分析】对函数求导，然后判断该导数等于1是否有根即可．

【解答】解：对于A，令$y'=\dfrac{1}{x^2}=1$得$x=\pm 1$，故A不符合题意；

对于B，令$y'=\cos x=1$得$x=2k\pi$，$k\in Z$，故B不符合题意；

对于C，令$y'=(x+1)e^x=1$，易知，$x=0$是该方程的一个根，故C不符合题意；

对于D，令$y'=1+\dfrac{1}{x}=1(x>0)$，显然该方程没有实数根，故D满足题意．

故选：D．

【点评】本题考查导数的几何意义和切线方程的求法，属于基础题．

9．【分析】根据充分与必要条件的概念，数列的单调性概念即可判断．

【解答】解：$\because\{a_n\}$是等比数列，$\therefore$由$0>a_1>a_2$可得公$q=\dfrac{a_2}{a_1}>1$且$a_1<0$，

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}$单调递减，$\therefore\{a_n\}$为递减数列，

反过来，由$\{a_n\}$为递减数列可得到$a_n>a_{n+1}$，$\therefore a_1>a_2$，但不能得到$0>a_1>a_2$，

$\therefore$“$0>a_1>a_2$”是“$\{a_n\}$为递减数列”的充分而不必要条件，

故选：A．

【点评】本题考查充分与必要条件的概念，数列的单调性概念，属基础题．

10．【分析】依据零点存在定理并分类讨论求得$f(x)$的零点判断①；利用导数并分类讨论判定$f(x)$是否有最大值判断②；举反例否定③．

【解答】解：①当$k=0$时，$f(x)=lnx$，由f（1）$=ln1=0$，可得$f(x)$在$(0，\pi]$存在零点，

当$k>0$时，$f(x)=lnx-k\sin x$，由f（1）$=ln1-k\sin 1=-k\sin 1<0$，

$f(\pi)=ln\pi-k\sin\pi=ln\pi>0$，可得$f(x)$在$(0，\pi]$存在零点，

当$k<0$时，$y=-k\sin x$在$(0，1]$单调递减，值域$[k\sin 1，0)$，

又$y=lnx$在$(0，1]$单调递增，值域$(-\infty，0]$，

则$y=-k\sin x$与$y=lnx$的图象在$(0，1]$必相交，

则 $f(x)=lnx-k\sin x$ 在 $(0，\pi]$ 存在零点，

综上，$f(x)$ 一定存在零点判断正确；

②当 $k=0$ 时，$f(x)=lnx$，$x\in(0，\pi]$，$f(x)$ 在 $(0，\pi]$ 单调递增，存在最大值；

当 $k\neq 0$ 时，$f(x)=lnx-k\sin x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x, x\in(0,\pi]$

$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递减，值域 $[\frac{1}{\pi},+\infty)$，

当 $|k|\leqslant\frac{1}{\pi},k\neq 0$ 时，$y=k\cos x$ 在 $(0，\pi]$ 上值域 $[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]$

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x\geqslant 0$ 在 $(0，\pi]$ 上恒成立，则 $f(x)$ 在 $(0，\pi]$ 单调递增，存在最大值；

当 $k<-\frac{1}{\pi}$ 时，$y=-k\cos x$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递减，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递减，$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}>0, f'(\pi)=\frac{1}{\pi}+k<0$，

则 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使得 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x=0$，

则 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(x_0，\pi)$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0，\pi)$ 单调递减，$f(x)$ 存在最大值；

当 $k>\frac{1}{\pi}$ 时，$y=-k\cos x$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递增，

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$y=-k\cos x\geqslant 0, f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x\geqslant 0$ 恒成立，

则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 单调递增，

当 $k>\frac{1}{\pi}$ 时，$y=-k\cos x$ 在 $(0，\pi]$ 上单调递增，

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，$y=-k\cos x\geqslant 0, f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x\geqslant 0$ 恒成立，

则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 单调递增，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$y=-k\cos x$ 单调递增，值域为 $(-k,0)$

又当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$y=\frac{1}{x}$ 单调递减，值域为 $(\frac{2}{\pi},+\infty)$

则当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

若 $f'(x)=\frac{1}{x}-k\cos x\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，

则 $f(x)$ 在 $(0，\pi]$ 单调递增，$f(x)$ 存在最大值；

若 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $x\in(0,x_0)$ 时 $f'(x)>0$；$x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时 $f'(x)<0$；

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，又 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2},\pi](0,x_0)$ 单调递增，

则 $f(x)$ 在 $(0$，$\pi]$ 有最大值；

综上，对任意给定的实数 k， $f(x)$ 在 $(0$，$\pi]$ 有最大值．判断正确；

③令 $k=\frac{6.5}{\pi}$，则 $f(x)=lnx-\frac{6.5}{\pi}\sin x, x\in(0,\pi], f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{6.5}{\pi}\cos x$，

$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0$，$\pi]$ 上单调递减，值域 $[\frac{1}{\pi},+\infty)$，

$y=-\frac{6.5}{\pi}\cos x$ 在 $(0$，$\pi]$ 上单调递增，值域 $[-\frac{6.5}{\pi},\frac{6.5}{\pi}]$，

又 $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{6}{\pi}-\frac{6.5\times\sqrt{3}}{2\pi}>0, f'(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{\pi}-\frac{6.5}{2\pi}<0, f'(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}>0$，

则 $x_1\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}),\exists x_2\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，

则当 $x\in(0,x_1)$，或 $x\in(x_2$，$\pi)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_1$，$x_2)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

则 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有两个极值点．判断错误．

故选：C．

【点评】本题考查利用导数研究函数是的极值，考查学生的运算能力，属于难题．

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11．【分析】根据已知条件，结合复数的几何意义，以及复数的四则运算，即可求解．

【解答】解：$\because$ 复数 z 对应的点的坐标是 $(-2,1)$，

$\therefore z=-2+i$，

$\therefore z\cdot i=(-2+i)i=-1-2i$．

故答案为：$-1-2i$．

【点评】本题主要考查复数的几何意义，以及复数的四则运算，属于基础题．

12．【分析】不等式可化为即 $\frac{x+1}{x-2}>0$，即 $(x+1)(x-2)>0$，由此求得它的解集．

【解答】解：不等式 $\frac{3}{x-2}>-1$，即 $\frac{x+1}{x-2}>0$，即 $(x+1)(x-2)>0$，求得 $x>2$，或 $x<-1$，

故不等式的解集为 $(2$，$+\infty)\cup(-\infty$，$-1)$，

故答案为：$(2$，$+\infty)\cup(-\infty$，$-1)$．

【点评】本题主要考查分式不等式的解法、一元二次不等式的解法，属于基础题．

13．【分析】求出函数的导数，问题转化为 $a\geqslant-\frac{3}{2}x$ 在 $[1$，$+\infty)$ 上恒成立，从而求出 a 的取值范围．

【解答】解：若函数 $f(x)=x^3+ax^2+2$ 在区间 $[1$，$+\infty)$ 上单调递增，

则 $f'(x)=3x^2+2ax\geqslant0$ 在 $[1$，$+\infty)$ 上恒成立，

则 $a\geqslant -\frac{3}{2}x$ 在 $[1，+\infty)$ 上恒成立，

而 $y=-\frac{3}{2}x$ 在 $[1，+\infty)$ 上的最大值是 $-\frac{3}{2}$，

故 a 的取值范围是 $[-\frac{3}{2}，+\infty)$，

故答案为：$[-\frac{3}{2}，+\infty)$．

【点评】本题考查了函数的单调性问题，考查导数的应用以及转化思想，是基础题．

14．【分析】设 $AB=xm(x>0)$，由题意可得 $BC=\frac{6}{x}m$，则矩形 $ABFE$ 的面积为 $3xm^2$，矩形 $BCGF$ 的面积为 $\frac{18}{x}m^2$，写出总造价，再由基本不等式求最值．

【解答】解：设 $AB=xm(x>0)$，由题意，$AB\cdot BC=BC\cdot x=6$，可得 $BC=\frac{6}{x}m$，

则矩形 $ABFE$ 的面积为 $3xm^2$，矩形 $BCGF$ 的面积为 $\frac{18}{x}m^2$，

可得简易工作房的总造价为 $y=2\cdot 3x\cdot 80+2\cdot\frac{18}{x}\cdot 120+2000$

$=480x+\frac{4320}{x}+2000\geqslant 2\sqrt{480x\cdot\frac{4320}{x}}+2000=4880$，

当且仅当 $480x=\frac{4320}{x}$，即 $x=3$ 时取等号．

$\therefore$ 一个这样的简易工作房的总造价最低为 4880 元．

故答案为：4880．

【点评】本题考查函数模型的选择及应用，训练了利用基本不等式求最值，考查运算求解能力，是基础题．

15．【分析】①由已知可得 $a_{n+1}-a_{n-1}=3$，可求 a_3 的值；

②由①知序号为奇数的项构成以 a_1 为首项公差的等差数列，序号为偶数的项构成以 a_2 为首项公差的等差数列，设 a_1 为 m，可得 $a_2=3-\frac{10}{m}$，由题意计算可得结论．

【解答】解：①由 $3S_n=a_na_{n+1}+10$．得 $3S_{n-1}=a_{n-1}a_n+10(n\geqslant 2)$．

可得 $3S_n-3S_{n-1}=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$，$\therefore 3a_n=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$，

$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$，$\therefore a_3-a_1=3$，当 $a_1=1$ 时，$a_3=4$；

②由①知序号为奇数的项构成以 a_1 为首项公差的等差数列，

序号为偶数的项构成以 a_2 为首项公差的等差数列，

设 a_1 为 m，可得 $a_2=3-\frac{10}{m}$，

对任意的 $n\in N^*$，$S_n\geqslant S_4$ 恒成立，

故有 $m\geqslant m+3-\frac{10}{m}+m+3+3-\frac{10}{m}$ ①，

$m+3-\frac{10}{m} \geqslant m+3-\frac{10}{m}+m+3+3-\frac{10}{m}$ ②，

$m+3-\frac{10}{m}+m+3 \geqslant m+3-\frac{10}{m}+m+3+3-\frac{10}{m}$ ③，

同时成立，解之可得 $m \leqslant 1$，

经验证，$m=1$ 时，对任意的 $n \in N^*$，$S_n \geqslant S_4$ 恒成立，

故 a_1 的最大值为 1.

故答案为：4；1.

【点评】本题考查数列的递推式的应用，属中档题.

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.【分析】（I）先根据已知条件及等比中项的性质列出关于公差 d 的方程组，解出 d 的值，即可计算出等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）先根据第（I）题的结果计算出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，再运用分组求和法即可计算出前 n 项和 T_n .

【解答】解：（I）由题意，可知 $a_2=1+d$ ，$S_3=3\times1+\frac{3\times2}{2}d=3+3d$ ，

$\because a_1$，a_2，S_3 成等比数列，

$\therefore a_2^2=a_1\cdot S_3$，即 $(1+d)^2=1\cdot(3+3d)$ ，

化简整理，得 $d^2-d-2=0$ ，

解得 $d=-1$（舍去），或 $d=2$ ，

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$，$n\in N*$.

（II）由（I），得 $b_n=a_n+2^{a_n}=2n-1+2^{2n-1}$ ，

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(1+2^1)+(3+2^3)+\cdots\cdot+(2n-1+2^{2n-1})$

$=[1+3+\cdots\cdot+(2n-1)]+(2^1+2^3+\cdots\cdot+2^{2n-1})$

$=\frac{n\cdot(1+2n-1)}{2}+\frac{2^1-2^{2n+1}}{1-2^2}$

$=\frac{2^{2n+1}}{3}+n^2-\frac{2}{3}$.

【点评】本题主要考查数列求通项公式，以及运用分组求和法求前 n 项和问题．考查了方程思想，转化与化归思想，等差数列和等比数列求和公式的应用，以及逻辑推理能力和数学运算能力，属中档题.

17.【分析】（I）根据汽车销量图可知 7 年中有 6 年汽车总销量不小于 5.5 万辆，根据古典概型公式计算即可；

（II）根据图表算出新能源汽车每年的销量，再求出 X 的可能取值及对应概率，根据离散型随机变量的概率分布列及期望公式计算即可；

（III）根据（II）中计分别算出前两年的销量与第三年比较即可.

【解答】解：（I）由汽车销量图可知 7 年中有 6 年汽车总销量不小于 5.5 万辆，

则这一年该地区汽车总销量不小于 5.5 万辆的概率为 $\frac{6}{7}$；

（II）根据图表可知新能源汽车 2015－2021 年的销量如下表：

年份	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
新能源汽车销量	0.0625	0.112	0.168	0.275	0.456	0.54	1.16

由表可知新能源汽车销量超过 0.5 万辆的年份有 2 个，不超过 0.5 万辆的年份有 5 个，

则随机变量 X 可能取值为：0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_5^2}{C_7^2}=\dfrac{10}{21}$； $P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_2^1}{C_7^2}=\dfrac{10}{21}$； $P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{21}$；

$\therefore X$ 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{10}{21}$	$\dfrac{1}{21}$

$\therefore E(x)=0\times\dfrac{10}{21}+1\times\dfrac{10}{21}+2\times\dfrac{1}{21}=\dfrac{4}{7}$.

（III）由（II）中表可知：

2015 年与 2016 年新能源汽车销量之和为 $0.0625+0.112=0.1745>0.168$，2017 年不符合要求，

2016 年与 2017 年新能源汽车销量之和为 $0.112+0.168=0.28>0.275$，2018 年不符合要求，

2017 年与 2018 年新能源汽车销量之和为 $0.168+0.275=0.443<0.456$，2019 年符合要求，

2018 年与 2019 年新能源汽车销量之和为 $0.275+0.456=0.731>0.54$，2020 年不符合要求，

2019 年与 2020 年新能源汽车销量之和为 $0.456+0.54=0.996<1.16$，2021 年符合要求，

故“爆发年”为 2019、2021．

【点评】本题主要考查离散型随机变量的分布列及期望，是中档题．

18．【分析】（I）求出函数的导数，通过讨论 a 的范围，求出函数的单调区间即可；

（II）根据函数的单调性，问题转化为 $f(x)_{min}=f(\sqrt{\dfrac{a}{2}})<0$，解关于 a 的不等式，求出 a 的取值范围即可．

【解答】解： $f(x)=x^2-alnx$，定义域是 $(0,+\infty)$，

（I） $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}$，

① $a\leqslant0$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 的递增区间是 $(0,+\infty)$，无递减区间，

② $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{\dfrac{a}{2}}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$，

故 $f(x)$ 的递减区间是 $(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$，递增区间是 $(\sqrt{\dfrac{a}{2}}$， $+\infty)$，

综上， $a\leqslant0$ 时， $f(x)$ 的递增区间是 $(0,+\infty)$，无递减区间，

② $a>0$ 时， $f(x)$ 的递减区间是 $(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$，递增区间是 $(\sqrt{\dfrac{a}{2}}$， $+\infty)$；

（II）结合（I）若 $f(x)$ 有两个不同的零点，

则 $a>0$， $f(x)$ 的递减区间是 $(0,\sqrt{\frac{a}{2}})$，递增区间是 $(\sqrt{\frac{a}{2}}$， $+\infty)$，

$f(x)_{min}=f(\sqrt{\frac{a}{2}})=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}ln\frac{a}{2}<0$，解得 $a>2e$，

即 a 的取值范围是 $(2e,+\infty)$.

【点评】本题考查了函数的单调性问题，考查导数的应用以及函数的零点问题，考查转化思想，分类讨论思想．是中档题.

19.【分析】(I) 易求 $S(A*A)$ 和 $S(A*B)$ 的值；

(II) 记数列 $A*B:c_1$， c_2， $\cdots$， c_n，分 $a_k=1$ 与 $a_k=0$，进行讨论可得结论成立；

(III) 若 n 是奇数，则不存在 n 项 $0-1$ 数列 A， B， C，使得 $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=2n$，若 n 是偶数，即 $n=2k(k\in N^*)$，可构造： $A:\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{n个}$， $B:\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$， $C:\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个}\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，可得结论.

【解答】解：$(I)S(A*A)=3$， $S(A*B)=1$；

(II) 证明：对于两个 $0-1$ 数列 $A:a_1$， a_2， $\cdots$， a_n， $B:b_1$， b_2， $\cdots$， b_n，

记数列 $A*B:c_1$， c_2， $\cdots$， c_n，则对于 $c_k(1$，2，3，$\cdots$， $n)$，

若 $a_k=1$，则此时 $|a_k-b_k|=1-b_k$， $c_k=1-|a_k-b_k|=b_k$，

若 $a_k=0$，则此时 $|a_k-b_k|=b_k$， $c_k=1-|a_k-b_k|=1-b_k$，

故对于数列 $(A*B)*A:d_1$， d_2， $\cdots$， d_n，考虑 d_k 的值 $(k=1$，2，$\cdots$， $n)$:

若 $a_k=1$，则 $d_k=c_k=b_k$，若 $a_k=0$，则 $d_k=1-c_k=1-(1-b_k)=b_k$，

故 $(A*B)*A$ 与 B 是同一数列.

所以 $S((A*B)*A)=S$ （B）;

(III) 若 n 是奇数，则不存在 n 项 $0-1$ 数列 A， B， C，使得 $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=2n$，证明如下：

对于 3 个 n 项 $0-1$ 数列 A， B， C，记 $x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|(i=1$，2，$\cdots$， $n)$:

则 $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=x_1+x_2+\cdots+x_n$，

当 $a_i=b_i=c_i$ 时， $x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|=3$；

当 a_i， b_i， c_i 中有一个不同于另外两个时， $x_i=3-|a_i-b_i|-|b_i-c_i|-|c_i-a_i|=1$，

$\therefore x_i$ 是奇数， $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 为奇数个奇数之和，仍为奇数，不可能为 $2n$，

若 n 是偶数，即 $n=2k(k\in N^*)$，可构造： $A:\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{n个}$， $B:\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$， $C:\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个}\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，

此时数列 $A*B$ 为 $\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{n个}$，数列 $A*C$， $B*C$ 相同，都是： $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k个}\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n个}$，

所以有 $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)=n+k+k=2n$，

综上所述，当 n 为偶数量， $S(A*B)+S(A*C)+S(B*C)$ 可能为 $2n$，当 n 为奇数时，不可能成立.

【点评】本题考查数列的应用，考查推理与运算能力，属难题.