

2019 北京市石景山高二（上）期末

数 学

一、选择题（本大题共 8 小题，共 32.0 分）

1. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ ，且 $a > b$ ，则()

- A. $ac > bc$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

2. 命题“存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ ， $2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是()

- A. 不存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ ， $2^{x_0} > 0$ B. 存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ ， $2^{x_0} \geq 0$
C. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ， $2^x \leq 0$ D. 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ ， $2^x > 0$

3. 设 a, b 是两条直线， α, β 是两个平面，则由下列条件可以得到 $a \perp b$ 的是()

- A. $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$
C. $a \perp \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ D. $a \subset \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$

4. “ $x < 1$ ”是“ $\ln(x+1) < 0$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 不充分也不必要条件

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ，且 $a_3 = 0$ ，若 a_k 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项，则 $k =$ ()

- A. 5 B. 6 C. 9 D. 11

6. 设 $a > 0, b > 0$ ，则以下不等式中不恒成立的是()

- A. $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$ B. $a^3 + b^3 \geq 2ab^2$
C. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$ D. $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

7. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle BCA = 90^\circ$ ，M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点， $BC = CA = CC_1$ ，则 BM 与 AN 所成角的余弦值为()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元.若每批生产 x 件，则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元.为使平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品()

- A. 60 件 B. 80 件 C. 100 件 D. 120 件

二、填空题（本大题共 6 小题，共 24.0 分）

9. 设 $A(1,3,2), B(3,1,4), C(0,1,1)$ ，则 AB 的中点 M 到点 C 的距离为_____.

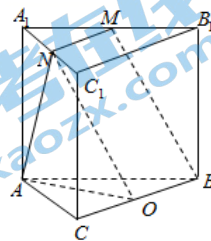
10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 10n (n = 1, 2, 3, \dots)$ ，则此数列的通项公式_____.

11. 已知 $\vec{a} = (1,1,0), \vec{b} = (-1,0,2)$ ，若 $k\vec{a} + \vec{b}$ 和 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 相互垂直，则 $k =$ _____.

12. 能够说明“存在不相等的正数 a, b ，使得 $a + b = ab$ ”是真命题的一组 a, b 的值为_____.

13. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - 4x - m \geq 0$ 对任意 $x \in (0,1]$ 恒成立，则 m 的取值范围是_____.

14. 下列五个正方体图形中， l 是正方形的一条对角线，点 M、N、P 分别为其所在棱的中点，能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____ (写出所有符合要求的图形序号).

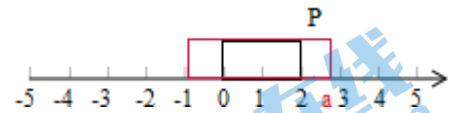


三、解答题（本大题共 5 小题，共 44.0 分）

15. 记关于 x 的不等式 $\frac{x-a}{x+1} < 0$ 的解集为 P ，不等式 $|x-1| \leq 1$ 的解集为 Q .

(I) 若 $a = 3$ ，求 P ；

(II) 若 $Q \subseteq P$ ，求正数 a 的取值范围.

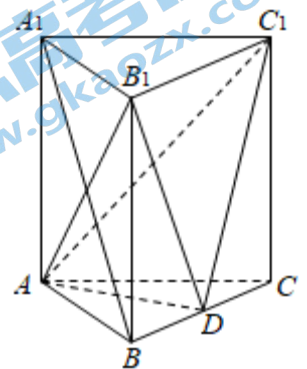


16. 如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱长和底边长均为 2， D 是 BC 的中点.

(I) 求证： $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 ；

(II) 求证： $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ；

(III) 求三棱锥 $C_1 - ADB_1$ 的体积.



17. 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列， $a_1 \cdot a_4 = 8$ ， $a_2 + a_3 = 6$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

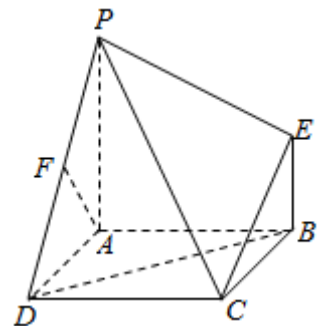
(II) 记 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EB \parallel PA$ ， $AB = PA = 4$ ， $EB = 2$ ， F 为 PD 的中点.

(I) 求证： $AF \perp PC$ ；

(II) 求证： $BD \parallel$ 平面 PEC ；

(III) 求二面角 $D - PC - E$ 的大小.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $p > 0$). 数列 $\{b_n\}$ 定义如下：对于正整数 m ， b_m 是使得不等式 $a_n \geq m$ 成立的所有 n 中的最小值.

(I) 若 $p = \frac{1}{2}$ ， $q = -\frac{1}{3}$ ，求 b_3 ；

(II) 若 $p = 2$ ， $q = -1$ ，求数 $\{b_m\}$ 的前 $2m$ 项和公式.

数学试题答案

一、选择题（本大题共 8 小题，共 32.0 分）

1.

【答案】D

【解析】解：A、当 $c = 0$ 时，该不等式不成立，故本选项错误；

B、由 $a > b$ 得到 $0 > a > b$ ， $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不成立，故本选项错误；

C、当 $a = 1, b = -2$ 时， $a^2 > b^2$ ，即不等式 $1 > 4$ 不成立，故本选项错误；

D、当 $a, b, c \in R$ ，且 $a > b$ ， $a^3 > b^3$ 成立，故本选项正确；

故选：D.

利用不等式的性质或通过取特殊值即可得出.

熟练掌握不等式的性质及通过取特殊值否定一个命题等是解题的关键.

2.

【答案】D

【解析】解： $\because$ 特称命题的否定是全称命题.

$\therefore$ 命题“存在 $x_0 \in R, 2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是：“对任意的 $x \in R, 2^x > 0$ ”.

故选：D.

利用特称命题的否定是全称命题写出结果即可.

本题考查命题的否定，注意量词的变化，基本知识的考查.

3.

【答案】A

【解析】解：由设 a, b 是两条直线， α, β 是两个平面，得：

在 A 中，由 $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ ，得 $b \perp \alpha, \therefore a \perp b$ ，故 A 正确；

在 B 中，由 $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ ，利用线面垂直的性质定理得 $a // b$ ，故 B 错误；

在 C 中，由 $a \perp \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ ，得 a, b 相交、平行或异面，故 C 错误；

在 D 中，由 $a \subset \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ ，得 a, b 相交、平行或异面，故 D 错误.

故选：A.

在 A 中，推导出 $b \perp \alpha$ ，从而 $a \perp b$ ；在 B 中，利用线面垂直的性质定理得 $a // b$ ；在 C 中， a, b 相交、平行或异面；

在 D 中， a, b 相交、平行或异面.

本题考查命题真假的判断，考查空间中直线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，是中档题.

4.

【答案】B

【解析】解：由 $\ln(x+1) < 0$ 得 $0 < x+1 < 1$ ，得 $-1 < x < 0$ ，

则 $x < 1$ 是 “ $\ln(x+1) < 0$ ” 的必要不充分条件，

故选：B.

求出 $\ln(x+1) < 0$ 的等价条件，结合充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

本题主要考查充分条件和必要条件的判断，结合不等式的关系是解决本题的关键.

5.

【答案】C

【解析】解： $\because a_3 = 0 = a_1 + 2d, \therefore a_1 = -2d$.

$\because a_k$ 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项，

$\therefore a_k^2 = a_6 \cdot a_{k+6}$,

$\therefore [(k-3)d]^2 = 3d \cdot (k+3)d \neq 0$,

化为： $k-9=0$ ，解得 $k=9$.

故选：C.

$a_3 = 0 = a_1 + 2d$, 可得 $a_1 = -2d$. 根据 a_k 是 a_6 与 a_{k+6} 的等比中项, 可得 $a_k^2 = a_6 \cdot a_{k+6}$, 代入化简整理即可得出. 本题考查了等差数列与等比数列的通项公式及其性质, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

6.

【答案】B

【解析】解: $\because a > 0, b > 0$,

$\therefore A. (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq 4$ 故 A 恒成立,

B. $a^3 + b^3 \geq 2ab^2$, 取 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$, 则 B 不成立

C. $a^2 + b^2 + 2 - (2a + 2b) = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ 故 C 恒成立

D. 若 $a < b$ 则 $\sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ 恒成立

若 $a \geq b$, 则 $(\sqrt{|a-b|})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2\sqrt{ab} - 2b = 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$,

$$\therefore \sqrt{|a-b|} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

故选: B.

根据基本不等式的性质可知. $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ 排除 A, 取 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$, 判断出 B 不成立. $a^2 + b^2 + 2 - (2a + 2b) = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ 排除 C; 看 $a < b$ 和 $a \geq b$, 时 D 项均成立排除 D.

本题主要考查了基本不等式问题, 考查了学生对基础知识的掌握.

7.

【答案】C

【解析】解: 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, 如图: BC 的中点为 O, 连结 ON,

$MN \parallel \frac{1}{2}B_1C_1 = OB$, 则 MNOB 是平行四边形, BM 与 AN 所成角就是 $\angle ANO$,

$\because BC = CA = CC_1$,

设 $BC = CA = CC_1 = 2$, $\therefore CO = 1, AO = \sqrt{5}, AN = \sqrt{5}, MB = \sqrt{B_1M^2 + BB_1^2} =$

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6},$$

在 $\triangle ANO$ 中, 由余弦定理可得: $\cos \angle ANO = \frac{AN^2 + NO^2 - AO^2}{2AN \cdot NO} = \frac{6}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

故选: C.

画出图形, 找出 BM 与 AN 所成角的平面角, 利用解三角形求出 BM 与 AN 所成角的余弦值.

本题考查异面直线对称角的求法, 作出异面直线所成角的平面角是解题的关键, 同时考查余弦定理的应用.

8.

【答案】B

【解析】解: 根据题意, 该生产 x 件产品的生产准备费用与仓储费用之和是 $800 + x \cdot \frac{x}{8} = 800 + \frac{1}{8}x^2$

这样平均每件的生产准备费用与仓储费用之和为 $f(x) = \frac{800 + \frac{1}{8}x^2}{x} = \frac{800}{x} + \frac{1}{8}x$ (x 为正整数)

由基本不等式, 得 $f(x) \geq 2\sqrt{\frac{800}{x} \cdot \frac{1}{8}x} = 20$

当且仅当 $\frac{800}{x} = \frac{1}{8}x = 10$ 时, $f(x)$ 取得最小值.

可得 $x = 80$ 时, 每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小

故选: B.

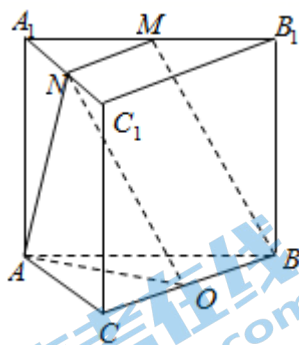
若每批生产 x 件, 则平均仓储时间为 $\frac{x}{8}$ 天, 可得仓储总费用为 $\frac{1}{8}x^2$ 元, 再加上生产准备费用为 800 元, 可得生产 x

件产品的生产准备费用与仓储费用之和是 $800 + x \cdot \frac{x}{8} = 800 + \frac{1}{8}x^2$ 元, 由此求出平均每件的生产准备费用与仓储费用之和, 再用基本不等式求出最小值对应的 x 值

本题结合了函数与基本不等式两个知识点, 属于中档题, 运用基本不等式时应该注意取等号的条件, 才能准确给出答案.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 24.0 分)

9.



【答案】3

【解析】解：∵ $A(1,3)$ 、 $B(3,1)$ 、 $C(0,1)$ ，

∴ AB 的中点 $M(2,2)$ ，

∴ AB 的中点 M 到点 C 的距离：

$$|MC| = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2 + (1-3)^2} = 3.$$

故答案为：3.

先利用中点坐标公式求出 AB 的中点 M ，再利用两点间距离公式能求出 AB 的中点 M 到点 C 的距离.

本题考查两点间距离的求法，考查中点坐标公式、两点间距离公式等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

10.

【答案】 $2n-11$

【解析】解：由题意可得：当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = (n-1)^2 - 10(n-1) = n^2 - 12n + 11$ ，

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 11$.

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = -9$ ，也符合 $a_n = 2n - 11$ ，

所以数列的通项公式为： $a_n = 2n - 11$.

故答案为： $a_n = 2n - 11$.

由题意可得：当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 11$. 当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = -9$ ，也符合 $a_n = 2n - 11$ ，进而求出数列的通项公式.

解决此类问题的关键是熟练掌握数列通项公式的方法，以及结合正确的运算.

11.

【答案】 $\frac{16}{5}$

【解析】解： $k\vec{a} + \vec{b} = (k-1, k, 2)$ ， $\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 1, -6)$ ；

∵ $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 互相垂直；

$$\therefore (k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 4(k-1) + k - 12 = 0;$$

$$\text{解得 } k = \frac{16}{5}.$$

故答案为： $\frac{16}{5}$.

可求出 $k\vec{a} + \vec{b} = (k-1, k, 2)$ ， $\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 1, -6)$ ，根据 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 垂直，即可得出 $(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 0$ ，进行数量积的坐标运算即可求出 k .

考查向量垂直的充要条件，向量坐标的加法、减法、数乘和数量积的运算.

12.

【答案】 $\frac{3}{2}, 3$

【解析】解：取 $a = \frac{3}{2}$ ， $b = 3$ ，得到 $a + b = ab$ ，

∴ 能够说明“存在不相等的正数 a, b ，使得 $a + b = ab$ ”是真命题的一组 a, b 的值为 $\frac{3}{2}, 3$.

故答案为： $\frac{3}{2}, 3$ (答案不唯一)

取 $a = \frac{3}{2}$ ， $b = 3$ ，得到 $a + b = ab$ ，由此能求出结果.

本题考查简单的合理推理，考查推理论证能力等基础知识，考查运用求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

13.

【答案】 $(-\infty, -3]$

【解析】解：∵ $x^2 - 4x \geq m$ 对任意 $x \in (0, 1]$ 恒成立

$$\text{令 } f(x) = x^2 - 4x, x \in (0, 1]$$

∵ $f(x)$ 的对称轴为 $x = 2$

∴ $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减

∴ 当 $x = 1$ 时取到最小值为 -3

∴ 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3]$

故答案为： $(-\infty, -3]$.

构造函数 $f(x)$ ，将不等式恒成立问题转化为求函数 $f(x)$ 的最小值问题，求出二次函数的对称轴，判断出其单调性，

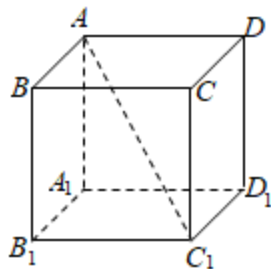
求出 $f(x)$ 的最小值，令最小值大于等于 m 即得到 m 的取值范围.

本题考查了解决不等式恒成立问题，分离参数转化为求函数的最值问题；求二次函数的最值问题，常利用公式求出对称轴，据区间与对称轴的关系判断出其单调性，求出最值.

14.

【答案】①④⑤

【解析】解：如图，设正方体为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$.



在题图①中，连结 AB_1 ，则 $AB_1 \perp MN$ ，又 AB_1 是 l 在面 ABB_1A_1 内的射影，

$\therefore l \perp MN$.同理， $l \perp MP$.

$\therefore l \perp$ 平面 MNP .故①符合.

在题图②中，延长 MP 交 C_1D_1 的延长线于 E ，连结 NE ，若 $l \perp$ 面 MNP ，则 $l \perp NE$.

又 C_1D 是 l 在平面 CDD_1C_1 内的射影， $CD_1 \perp C_1D$ ，

$\therefore l \perp CD_1$. $\therefore l \perp$ 平面 CDD_1C_1 ，矛盾. $\therefore$ ②不符合.

在题图③中，平面 MNP 与题图①中的平面 MNP 不是同一平面，它们又过同一点，

$\therefore$ 题图③不符合.

在题图④中， $l \perp MP$ ， $l \perp MN$ ，

$\therefore l \perp$ 平面 MNP .延长 PM 交 AB 于 F ，取 CD 的中点 G ，则 $GN \parallel MP$ ，

$\therefore G \in$ 平面 MNP .连结 FG 交 BC 于 H ，则 $H \in$ 平面 MNP ，可证 H 是 BC 的中点.

$\therefore$ 题图④与题图⑤中的平面 MNP 实为同一平面.

$\therefore$ ⑤也符合.

答案：①④⑤

能得出 $l \perp$ 面 MNP ，关键是看平面 MNP 中有没有与 l 垂直的直线，逐一判断即可.

点评：本题要先想象直观判断哪些图形符合，再加以推理，考查了空间想象能力、反证法、线面的位置关系等知识，通过这个试题可看出试题在向增加思维量、综合考查同学们的各种能力转化.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 44.0 分）

15.

【答案】解：(I)由 $\frac{x-3}{x+1} < 0$ ，得 $P = \{x | -1 < x < 3\}$.

(II) $Q = \{x | |x - 1| \leq 1\} = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$.

由 $a > 0$ ，得 $P = \{x | -1 < x < a\}$ ，又 $Q \subseteq P$ ，结合图形

所以 $a > 2$ ，即 a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.



【解析】(I)分式不等式 $\frac{x-a}{x+1} < 0$ 的解法，可转化为整式不等式 $(x-a)(x+1) < 0$ 来解；对于(II)中条件 $Q \subseteq P$ ，应结合数轴来解决.

对于条件 $Q \subseteq P$ 的问题，应结合数轴来解决，这样来得直观清楚，便于理解.

16.

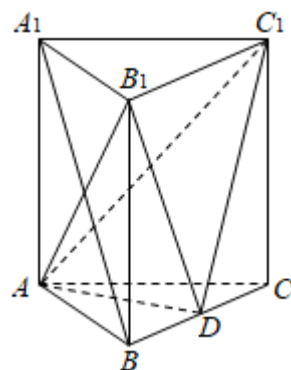
【答案】(I)证明：因为 $ABC - A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC

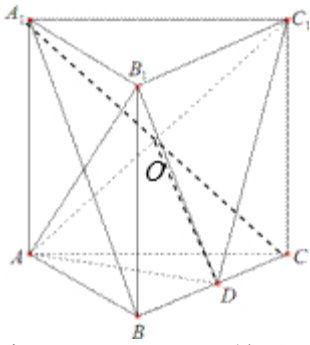
因为 $AD \subset$ 平面 ABC ，所以 $CC_1 \perp AD$

因为 $\triangle ABC$ 是正三角形， D 为 BC 中点，所以 $BC \perp AD$ ，... (4分)

因为 $CC_1 \cap BC = C$ ，所以 $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 ... (5分)

(II)证明：连接 A_1C ，交 AC_1 于点 O ，连接 OD .





由 $ABC - A_1B_1C_1$ 是正三棱柱，得四边形 ACC_1A_1 为矩形，O 为 A_1C 的中点。
又 D 为 BC 中点，所以 OD 为 $\triangle A_1BC$ 中位线，
所以 $A_1B \parallel OD$ ，... (8分)
因为 $A_1B \not\subset$ 平面 ADC_1 ， $OD \subset$ 平面 ADC_1 ，
所以 $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ；(10分)

(III) 解： $V_{C_1-ADB_1} = V_{A-C_1DB_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle C_1DB_1} \times AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$... (14分)

【解析】(I) 证明 $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 ，利用线面垂直的判定，证明 $CC_1 \perp AD$ ， $BC \perp AD$ ，即可。
(II) 连接 A_1C ，交 AC_1 于点 O，连接 OD，利用 OD 为 $\triangle A_1BC$ 中位线，可得 $A_1B \parallel OD$ ，利用线面平行的判定，可证 $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ；
(III) 利用等体积 $V_{C_1-ADB_1} = V_{A-C_1DB_1}$ ，可得结论。
本题考查线面垂直，考查线面平行，考查三棱锥体积的计算，掌握线面垂直、线面平行的判定是关键。
17.

【答案】解：(I) 由 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$ 及 $a_2 + a_3 = 6$... (2分)

得 $\begin{cases} a_2=2 \\ a_3=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_3=2 \\ a_2=4 \end{cases}$ (舍)

... (4分)

所以 $\frac{a_3}{a_2} = q = 2$ ， $a_1 = 1$

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$... (6分)

(II) 由 (I) 得 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1} = 2^{n-1} + n$... (7分)

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}) + (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1-2^n}{1-2} + \frac{(1+n)n}{2} = 2^n - 1 + \frac{n^2+n}{2}$... (13分)

【解析】(I) 由 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$ 及 $a_2 + a_3 = 6$ ， $a_2 < a_3$ ，解出，再利用通项公式即可得出。
(II) 由 (I) 得 $b_n = a_n + \log_2 a_{n+1} = 2^{n-1} + n$ ，再利用求和公式即可得出。
本题考查了等差数列与等比数列的通项公式与求和公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题。
18.

【答案】(本小题共 14 分)

证明：(I) 依题意， $PA \perp$ 平面 ABCD.

如图，以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系

... (2分)

依题意，可得 $A(0,0,0)$ ， $B(0,4,0)$ ， $C(4,4,0)$ ，

$D(4,0,0)$ ， $P(0,0,4)$ ， $E(0,4,2)$ ， $F(2,0,2)$.

因为 $\overrightarrow{AF} = (2,0,2)$ ， $\overrightarrow{PC} = (4,4,-4)$ ，

所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{PC} = 8 + 0 + (-8) =$

0.

... (5分)

所以 $AF \perp PC$ (6分)

(II) 取 PC 的中点 M，连接 EM，

因为 $M(2,2,2)$ ， $\overrightarrow{EM} = (2,-2,0)$ ， $\overrightarrow{BD} = (4,-4,0)$ ，

所以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EM}$ ，所以 $BD \parallel$

EM.

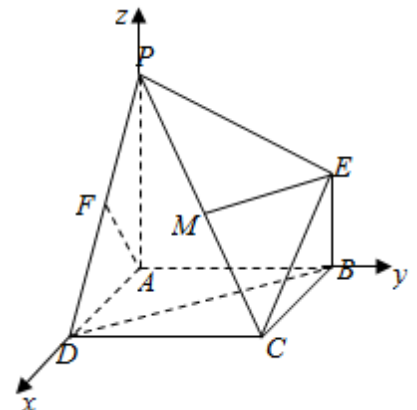
... (8分)

又因为 $EM \subset$ 平面 PEC， $BD \not\subset$ 平面 PEC，

所以 $BD \parallel$ 平面

PEC.

... (9分)



解: (III) 因为 $AF \perp PD$, $AF \perp PC$, $PD \cap PC = P$,

所以 $AF \perp$ 平面 PCD , 故 $\overrightarrow{AF} = (2, 0, 2)$ 为平面 PCD 的一个法向量. (10分)

设平面 PCE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{PC} = (4, 4, -4)$, $\overrightarrow{PE} = (0, 4, -2)$,

$$\text{所以} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

令 $y = -1$, 得 $x = -1$, $z = -2$, 故 $\vec{n} = (-1, -1, -2)$ (12分)

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle = \frac{-2-0-4}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, (13分)

所以二面角 $D-PC-E$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$ (14分)

【解析】(I) 依题意, $PA \perp$ 平面 $ABCD$. 以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 利用向量法能证明 $AF \perp PC$.

(II) 取 PC 的中点 M , 连接 EM . 推导出 $BD \parallel EM$, 由此能证明 $BD \parallel$ 平面 PEC .

(III) 由 $AF \perp PD$, $AF \perp PC$, 得 $AF \perp$ 平面 PCD , 求出平面 PCD 的一个法向量和平面 PCE 的法向量, 利用向量法能求出二面角 $D-PC-E$ 的大小.

本题考查线线垂直、线面平行的证明, 考查二面角的大小的求法, 考查空间中直线、平面、面面间的位置关系等基础知识, 考查运算求解能力, 考查函数与方程思想, 是中档题.

19.

【答案】解: (I) $\because p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{3}$,

$$\therefore a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{3},$$

当 $m = 3$ 时, 由 $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{3} \geq 3$, 得 $n \geq \frac{20}{3}$,

则 $\frac{1}{2}n - \frac{1}{3} \geq 3$ 成立的所有 n 中的最小正整数为 7, 即 $b_3 = 7$.

(II) 由题意, 得 $a_n = 2n - 1$,

对于正整数 m , 由 $a_n \geq m$, 得 $n \geq \frac{m+1}{2}$.

根据 b_m 的定义可知

当 $m = 2k - 1$ 时, $b_m = k (k \in \mathbb{N}^*)$;

当 $m = 2k$ 时, $b_m = k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$.

$$\therefore b_1 + b_2 + \cdots + b_{2m} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2m-1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2m})$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + m) + [2 + 3 + 4 + \cdots + (m + 1)] = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} = m^2 + 2m.$$

【解析】(I) 先得出 a_n , 再解关于 n 的不等式, 利用正整数的条件得出具体结果;

(II) 先得出 a_n , 再解关于 n 的不等式, 根据 $\{b_n\}$ 的定义求得 b_n 再求得 S_{2m} ;

本题主要考查数列的概念、数列的基本性质, 考查运算能力、推理论证能力、分类讨论等数学思想方法.