

海淀区高一年级练习

数 学

2023.01

学校_____

班级_____

姓名_____

考	1. 本试卷共 6 页, 共三道大题, 19 道小题。满分 100 分。考试时间 90 分钟。
生	2. 在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。
须	3. 答案一律填涂或书写在试卷上, 用黑色字迹签字笔作答。
知	4. 考试结束, 请将本试卷交回。

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

(1) 已知集合 $A = \{x | x > 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 若 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | x < 2\}$ B. $\{x | 0 < x < 2\}$ C. $\{x | 1 < x < 2\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$

(2) 下列函数中, 是奇函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ B. $f(x) = x^2$ C. $f(x) = \frac{1}{x}$ D. $f(x) = x^3$

(3) 某学校想了解高一学生社会实践项目的选择意向, 采用分层抽样的方式抽取 100 人进行问卷调查. 已知高一年级有 270 名男生, 从男生中抽取了 60 名, 则该校高一年级共有学生 ()

- A. 445 人 B. 450 人 C. 520 人 D. 540 人

(4) 下列结论正确的是 ()

- A. 若 $a > b$, $c < 0$, 则 $a + c < b + c$ B. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 则 $a < b$
C. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$ D. 若 $a^2 > b^2$, 则 $a > b$

(5) 某班分成了 A、B、C、D 四个学习小组学习二十大报告, 现从中随机抽取两个小组在班会课上进行学习成果展示, 则 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的概率为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

(6) 已知 $a = 4^{0.1}$, $b = 2^{0.6}$, $c = \log_4 0.6$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $c < a < b$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < a < c$

(7) 甲、乙两名学生，六次数学测验成绩（百分制）如图所示：

甲	茎	乙
1	6	
2	7	7
9	8	2 5 7
5 3 0	9	2 3

①甲同学成绩的中位数和极差都比乙同学大；

②甲同学的平均分比乙同学高；

③甲同学的成绩比乙同学稳定；

④甲同学成绩的方差大于乙同学成绩的方差.

上面说法正确的是

()

A. ①③

B. ①④

C. ②④

D. ②③

(8) 已知 $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, 则不等式 $f(x) \geq -\frac{4}{3}(x-1)$ 的解集为

()

A. $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$

B. $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $(0, \frac{1}{4}] \cup [1, +\infty)$

(9) 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的图像是连续不断的, 则 “ $f(1)f(2) \geq 0$ ” 是 “函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上没有零点” 的

()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(10) 已知 $f(x) = x^2 - 2x$. 若对于 $\forall x_1, x_2 \in [m, m+1]$, 均有 $f(x_1+1) \geq f(x_2)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是

()

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

D. $[1, +\infty)$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。把答案填在题中横线上。

(11) 函数 $f(x) = \ln(1-x)$ 的定义域为_____。

(12) $3^0 + 8^{\frac{2}{3}} =$ _____, $\lg 6 - \lg\left(\frac{3}{5}\right) + \ln e^2 =$ _____。

(13) 已知 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 - mx + m^2 - 6 = 0$ 的两个实根，且 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$ ，则 $m =$ _____。

(14) 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x < 0 \\ x^2 - ax, & x \geq 0 \end{cases}$ ，当 $a = 2$ 时， $f(x)$ 的单调减区间为_____；若 $f(x)$ 存在最小值，则实数 a 的取值范围是_____。

(15) 请阅读以下材料，并回答后面的问题：

材料 1：人体成分主要由骨骼、肌肉、脂肪等组织及内脏组成，肌肉是最大的组织，且肌肉的密度相比脂肪而言要大很多。肌肉和脂肪在体重中占比个体差异较大，脂肪占体重的百分比（称为体脂率，记为 $F\%$ ）经常作为反映肥胖程度的一个重要指标，但是不易于测量。

材料 2：体重指数 BMI（Body Mass Index 的缩写）计算公式为：体重指数 $BMI = \frac{G}{h^2}$ （ G 为体重，单位：千克； h 为身高，单位：米），是衡量人体整体胖瘦程度的一个简单易得的重要指标。1997 年，世界卫生组织经过大范围的调查研究后公布：BMI 值在 18.5~24.9 为正常； $BMI \geq 25$ 为超重； $BMI \geq 30$ 为肥胖。由于亚洲人与欧美人的体质有较大差异，国际肥胖特别工作组经调查研究后，于 2000 年提出了亚洲成年人 BMI 值在 18.5~22.9 为正常。中国肥胖问题工作组基于中国人体质特征，于 2003 年提出中国成年人 BMI 值在 18.5~23.9 为正常； $BMI \geq 24$ 为超重； $BMI \geq 28$ 为肥胖。

30 岁的小智在今年的体检报告中，发现体质指数 BMI 值为 24.8，依照标准属于超重。因为小智平时还是很注意体育锻炼的，正常作息，且每周去健身房有大约 2 小时的健身运动，周末还经常会和朋友去打篮球，所以小智对自己超重感觉很困惑。

请你结合上述材料，从数学模型的视角，帮小智做一下分析（包括：是否需要担心？为什么？）：_____

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(16) (本小题 9 分)

已知集合 $A = \{x \mid |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \mid m < x < 2m + 3\}$

(I) 求集合 A 中的所有整数;

(II) 若 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

(17) (本小题 9 分)

高考英语考试分为两部分，一部分为听说考试，满分 50 分，一部分为英语笔试，满分 100 分。英语听说考试共进行两次，若两次都参加，则取两次考试的最高成绩作为听说考试的最终得分，如果第一次考试取得满分，就不再参加第二次考试。为备考英语听说考试，李明每周都进行英语听说模拟考试训练，下表是他在第一次听说考试前的 20 次英语听说模拟考试成绩。

假设：①模拟考试和高考难度相当；②高考的两次听说考试难度相当；③若李明在第一次考试未取得满分后能持续保持听说训练，到第二次考试时，听说考试取得满分的概率可以达到 $\frac{1}{2}$ 。

46	50	47	48	49	50	50	47	48	47
48	49	50	49	50	50	48	50	49	50

(I) 设事件 A 为“李明第一次英语听说考试取得满分”，用频率估计事件 A 的概率；

(II) 基于题干中假设，估计李明英语高考听说成绩为满分的概率的最大值。

(18)(本小题 12 分)

已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} + b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数, 且满足下列三个条件中的两个.

①函数 $f(x)$ 为奇函数; ② $f(1) = -\frac{3}{5}$; ③ $f(-1) = -\frac{3}{5}$.

(I) 从中选择的两个条件的序号为 _____, 依所选择的条件求得 $b =$ _____, $a =$ _____;

(II) 利用单调性定义证明函数 $g(t) = \frac{2}{t} - t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(III) 在 (I) 的情况下, 若方程 $f(x) = m + 4^x$ 在 $[0, 1]$ 上有且只有一个实根, 求实数 m 的取值范围.

(19)(本小题 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 M , 且区间 $I \subseteq M$, 对任意 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$, 记 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. 若 $\Delta y + \Delta x > 0$, 则称 $f(x)$ 在 I 上具有性质 A ; 若 $\Delta y - \Delta x > 0$, 则称 $f(x)$ 在 I 上具有性质 B ; 若 $\Delta y \cdot \Delta x > 0$, 则称 $f(x)$ 在 I 上具有性质 C ; 若 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, 则称 $f(x)$ 在 I 上具有性质 D .

(I) 记: ①充分而不必要条件; ②必要而不充分条件;

③充要条件; ④既不充分也不必要条件

则 $f(x)$ 在 I 上具有性质 A 是 $f(x)$ 在 I 上单调递增的 _____ (填正确选项的序号);

$f(x)$ 在 I 上具有性质 B 是 $f(x)$ 在 I 上单调递增的 _____ (填正确选项的序号);

$f(x)$ 在 I 上具有性质 C 是 $f(x)$ 在 I 上单调递增的 _____ (填正确选项的序号);

(II) 若 $f(x) = ax^2 + 1$ 在 $[1, +\infty)$ 满足性质 B , 求实数 a 的取值范围;

(III) 若函数 $g(x) = \frac{1}{|x|}$ 在区间 $[m, n]$ 上恰满足性质 A 、性质 B 、性质 C 、性质 D 中的一个, 直接写出实数 m 的最小值.





海淀区高一年级练习

数学参考答案

2023.01

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) B (2) D (3) B (4) B (5) C
(6) A (7) B (8) D (9) B (10) C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

- (11) $(-\infty, 1)$ （注：如没写成集合形式，0 分） (12) 5; 3（注：每空 2 分）
(13) 2（注：如果仅是没考虑判别式舍 -3，给 3 分）
(14) $(0, 1)$; $[2, +\infty)$ （注：每空 2 分，第一空区间开闭均正确）
(15) 参考答案：小智平时注意锻炼，肌肉占比相对高，意味着身体密度大，相同体型和身高情况下，BMI 值与密度成正比（或者说，体重更大），所以他的 BMI 值就会偏高，如果小智体型基本正常（或者说身高远高于中国人平均值），就不必担心。（注：也可以从其他角度进行分析，只要言之有理即可）

评分标准说明：本题主要考查数学建模素养的表现，需要学生能从数学的眼光去看，即能够从现象中的数量及其关系和空间形式与结构去分析，能基于数学关系进行逻辑推理和运用数学的语言去阐述. 关注以下两个方面：

【3 分】由材料 1 做出合理假设，并结合其他学科和生活常识得出结论.

假设：①体脂率相同，即认为人体密度相同；②体型相同的人体视为相似几何体.

推理：由于相似的人体体积与身高的立方成正比，体重取决于人体密度和体积，所以根据 BMI 定义可以推导出体型和体脂率相同的人的 BMI 值和身高呈正比. (*)

没有指出 (*) 结论的两条前提假设，每缺一个少给 1 分；

【1 分】能够基于上述结论给出言之成理并且符合生活常识的结论的.

这 1 分主要关注数学语言和自然语言之间的互相翻译，如果学生在说理时有明显的数学术语错误(说明概念理解有误)，或只给出了一些数学推导但无法翻译回现实结论，则不给分.

如果没有从上述(*)结论出发进行分析,但是体现出准确使用了函数单调性分析、量纲分析的学生可酌情给分.

三、解答题(本大题共4小题,共40分)

(16)(本小题9分)

解:(I) 由 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, 解 $|x-1| < 2$, 得 $-1 < x < 3$. -----3分

所以集合 A 中的所有整数为: 0, 1, 2. -----4分

(II) 法一:

由 (I) 得: $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, -----5分

① $B = \emptyset$ 时, 即 $m \geq 2m+3$,

所以 $m \leq -3$, 符合 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$; -----6分

② $B \neq \emptyset$ 时, 即 $m < 2m+3$,

所以 $m > -3$,

由于 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$,

所以 $\begin{cases} m \geq -1 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases}$, -----7分

所以 $-1 \leq m \leq 0$. -----8分

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$. -----9分

法二:

由 (I) 得: $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 由 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$, 得 $B \subseteq A$. -----5分

① $B = \emptyset$ 时, 即 $m \geq 2m+3$,

所以 $m \leq -3$, 符合题意; -----6分

② $B \neq \emptyset$ 时, 即 $m < 2m+3$,

所以 $m > -3$,

由于 $B \subseteq A$,

所以 $\begin{cases} m \geq -1 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases}$, -----7分

所以 $-1 \leq m \leq 0$. -----8分

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$. -----9分

(17) (本小题 9 分)

解: (I) 依题意, 李明在 20 次英语听说模拟考试中有 8 次取得满分,

$$\text{取得满分的频率为 } \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\text{所以用频率估计事件 } A \text{ 的概率 } P(A) = \frac{2}{5}. \quad \text{-----3 分}$$

(II) 设事件 B 为“李明第二次英语听说考试取得满分”,

事件 C 为“李明高考英语听说考试取得满分”. -----5 分

$$\text{依题意, } P(B) = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } P(C) \leq P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{10}, \quad \text{-----8 分}$$

所以如果李明在第一次未取得满分时, 坚持训练参加第二次考试, 那么他英语高考听说考试最终成绩为满分的概率的最大值可以达到 $\frac{7}{10}$. -----9 分

(18) (共 12 分)

解: (I) 选择①②; -----2 分

$$b = 0, \quad \text{-----3 分}$$

$$a = \frac{1}{2}; \quad \text{-----5 分}$$

(II) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, -----6 分

$$\text{则 } g(x_2) - g(x_1) = \left(\frac{2}{x_2} - x_2 \right) - \left(\frac{2}{x_1} - x_1 \right) = (x_1 - x_2) \left(\frac{2}{x_1 x_2} + 1 \right), \quad \text{-----7 分}$$

$$\text{由于 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 - x_2 < 0, \frac{2}{x_1 x_2} + 1 > 0, \quad \text{-----8 分}$$

$$\text{所以 } g(x_2) - g(x_1) < 0, \text{ 即 } g(x_2) < g(x_1), \quad \text{-----9 分}$$

所以函数 $g(t) = \frac{2}{t} - t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(III) 由 (I) 可得 $f(x) = \frac{1-4^x}{1+4^x}$,

$$\text{所以方程为 } \frac{1-4^x}{1+4^x} = m + 4^x, \text{ 即 } m = \frac{1-4^x}{1+4^x} - 4^x = \frac{2}{4^x+1} - (4^x+1),$$

令 $t = 4^x + 1$, 由于 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [2, 5]$,

$$\text{则问题转化为 } m = \frac{2}{t} - t \text{ 在 } [2, 5] \text{ 上有唯一解.} \quad \text{-----10 分}$$

由 (II) 知, 函数 $g(t) = \frac{2}{t} - t$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减,

所以 $g(t)_{\min} = g(5) = \frac{2}{5} - 5 = -\frac{23}{5}$, $g(t)_{\max} = g(2) = \frac{2}{2} - 2 = -1$, -----11 分

所以, 实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{23}{5}, -1\right]$. -----12 分

(19) (本小题 10 分)

解: (I) ②; ①; ③. -----3 分

(II) 对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

有 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2$,

由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 满足性质 B, 即 $\Delta y - \Delta x > 0$,

所以 $(ax_2^2 - ax_1^2) - (x_2 - x_1) > 0$, 所以 $(ax_1 + ax_2 - 1)(x_2 - x_1) > 0$,

因为 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $a(x_1 + x_2) > 1$, 所以 $a > \frac{1}{x_1 + x_2}$, -----4 分

由于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 + x_2 > 2$, -----5 分

所以 $\frac{1}{x_1 + x_2} < \frac{1}{2}$, -----6 分

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. -----7 分

(III) 实数 m 的最小值为 1. -----10 分

补充: (III) 详细解答参考如下:

因为 $g(x) = \frac{1}{|x|}$ 在 $[m, n]$ 上恰满足性质 A、性质 B、性质 C、性质 D 中的一个,

所以对任意 $x_1, x_2 \in [m, n]$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $-1 < \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ 恒成立.

因为 $g(x) = \frac{1}{|x|}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 所以 $0 \notin [m, n]$.

当 $m < n < 0$ 时, $y = \frac{1}{-x}$,

所以 $\Delta y = -\frac{1}{x_2} - \left(-\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x}{x_1 x_2}$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_1 x_2} > 0$, 不合题意;

当 $0 < m < n$ 时, $y = \frac{1}{x}$,

所以 $\Delta y = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\Delta x}{x_1 x_2}$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$,

要使 $-1 < \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ 恒成立, 只需使 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} > -1$, 即 $x_1 x_2 > 1$ 恒成立,

若 $m < 1$, 则 $\exists x_1 = m, x_2 < 1$, 使 $x_1 x_2 < 1$, 这与 $x_1 x_2 > 1$ 矛盾,

所以 m 的最小值为 1.

海淀区高一年级练习

数学参考答案

2023.01

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) B (2) D (3) B (4) B (5) C
(6) A (7) B (8) D (9) B (10) C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

- (11) $(-\infty, 1)$ （注：如没写成集合形式，0 分） (12) 5; 3（注：每空 2 分）
(13) 2（注：如果仅是没考虑判别式舍 -3，给 3 分）
(14) $(0, 1)$; $[2, +\infty)$ （注：每空 2 分，第一空区间开闭均正确）
(15) 参考答案：小智平时注意锻炼，肌肉占比相对高，意味着身体密度大，相同体型和身高情况下，BMI 值与密度成正比（或者说，体重更大），所以他的 BMI 值就会偏高，如果小智体型基本正常（或者说身高远高于中国人平均值），就不必担心。（注：也可以从其他角度进行分析，只要言之有理即可）

评分标准说明：本题主要考查数学建模素养的表现，需要学生能从数学的眼光去看，即能够从现象中的数量及其关系和空间形式与结构去分析，能基于数学关系进行逻辑推理和运用数学的语言去阐述。关注以下两个方面：

【3 分】由材料 1 做出合理假设，并结合其他学科和生活常识得出结论。

假设：①体脂率相同，即认为人体密度相同；②体型相同的人体视为相似几何体。

推理：由于相似的人体体积与身高的立方成正比，体重取决于人体密度和体积，所以根据 BMI 定义可以推导出体型和体脂率相同的人的 BMI 值和身高呈正比。（*）

没有指出（*）结论的两条前提假设，每缺一个少给 1 分；

【1 分】能够基于上述结论给出言之成理并且符合生活常识的结论的。

这 1 分主要关注数学语言和自然语言之间的互相翻译，如果学生在说理时有明显的数学术语错误（说明概念理解有误），或只给出了一些数学推导但无法翻译回现实结论，则不给分。

如果没有从上述(*)结论出发进行分析,但是体现出准确使用了函数单调性分析、量纲分析的学生可酌情给分.

三、解答题(本大题共4小题,共40分)

(16)(本小题9分)

解:(I) 由 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, 解 $|x-1| < 2$, 得 $-1 < x < 3$. -----3分

所以集合A中的所有整数为: 0, 1, 2. -----4分

(II) 法一:

由(I)得: $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, -----5分

① $B = \emptyset$ 时, 即 $m \geq 2m+3$,

所以 $m \leq -3$, 符合 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$; -----6分

② $B \neq \emptyset$ 时, 即 $m < 2m+3$,

所以 $m > -3$,

由于 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$,

所以 $\begin{cases} m \geq -1 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases}$, -----7分

所以 $-1 \leq m \leq 0$. -----8分

综上, 实数m的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$. -----9分

法二:

由(I)得: $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 由 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \emptyset$, 得 $B \subseteq A$. -----5分

① $B = \emptyset$ 时, 即 $m \geq 2m+3$,

所以 $m \leq -3$, 符合题意; -----6分

② $B \neq \emptyset$ 时, 即 $m < 2m+3$,

所以 $m > -3$,

由于 $B \subseteq A$,

所以 $\begin{cases} m \geq -1 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases}$, -----7分

所以 $-1 \leq m \leq 0$. -----8分

综上, 实数m的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [-1, 0]$. -----9分

(17) (本小题 9 分)

解: (I) 依题意, 李明在 20 次英语听说模拟考试中有 8 次取得满分,

$$\text{取得满分的频率为 } \frac{8}{20} = \frac{2}{5},$$

$$\text{所以用频率估计事件 } A \text{ 的概率 } P(A) = \frac{2}{5}. \quad \text{-----3 分}$$

(II) 设事件 B 为“李明第二次英语听说考试取得满分”,

事件 C 为“李明高考英语听说考试取得满分”. -----5 分

$$\text{依题意, } P(B) = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } P(C) \leq P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{10}, \quad \text{-----8 分}$$

所以如果李明在第一次未取得满分时, 坚持训练参加第二次考试, 那么他英语高考听说考试最终成绩为满分的概率的最大值可以达到 $\frac{7}{10}$. -----9 分

(18) (共 12 分)

解: (I) 选择①②; -----2 分

$$b = 0, \quad \text{-----3 分}$$

$$a = \frac{1}{2}; \quad \text{-----5 分}$$

(II) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, -----6 分

$$\text{则 } g(x_2) - g(x_1) = \left(\frac{2}{x_2} - x_2 \right) - \left(\frac{2}{x_1} - x_1 \right) = (x_1 - x_2) \left(\frac{2}{x_1 x_2} + 1 \right), \quad \text{-----7 分}$$

$$\text{由于 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 - x_2 < 0, \frac{2}{x_1 x_2} + 1 > 0, \quad \text{-----8 分}$$

$$\text{所以 } g(x_2) - g(x_1) < 0, \text{ 即 } g(x_2) < g(x_1), \quad \text{-----9 分}$$

所以函数 $g(t) = \frac{2}{t} - t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(III) 由 (I) 可得 $f(x) = \frac{1-4^x}{1+4^x}$,

$$\text{所以方程为 } \frac{1-4^x}{1+4^x} = m + 4^x, \text{ 即 } m = \frac{1-4^x}{1+4^x} - 4^x = \frac{2}{4^x+1} - (4^x+1),$$

令 $t = 4^x + 1$, 由于 $x \in [0, 1]$, 所以 $t \in [2, 5]$,

$$\text{则问题转化为 } m = \frac{2}{t} - t \text{ 在 } [2, 5] \text{ 上有唯一解.} \quad \text{-----10 分}$$

由 (II) 知, 函数 $g(t) = \frac{2}{t} - t$ 在 $[2, 5]$ 上单调递减,

所以 $g(t)_{\min} = g(5) = \frac{2}{5} - 5 = -\frac{23}{5}$, $g(t)_{\max} = g(2) = \frac{2}{2} - 2 = -1$, -----11 分

所以, 实数 m 的取值范围是 $\left[-\frac{23}{5}, -1\right]$. -----12 分

(19) (本小题 10 分)

解: (I) ②; ①; ③. -----3 分

(II) 对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

有 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = ax_2^2 - ax_1^2$,

由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 满足性质 B, 即 $\Delta y - \Delta x > 0$,

所以 $(ax_2^2 - ax_1^2) - (x_2 - x_1) > 0$, 所以 $(ax_1 + ax_2 - 1)(x_2 - x_1) > 0$,

因为 $x_2 - x_1 > 0$, 所以 $a(x_1 + x_2) > 1$, 所以 $a > \frac{1}{x_1 + x_2}$, -----4 分

由于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 + x_2 > 2$, -----5 分

所以 $\frac{1}{x_1 + x_2} < \frac{1}{2}$, -----6 分

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. -----7 分

(III) 实数 m 的最小值为 1. -----10 分

补充: (III) 详细解答参考如下:

因为 $g(x) = \frac{1}{|x|}$ 在 $[m, n]$ 上恰满足性质 A、性质 B、性质 C、性质 D 中的一个,

所以对任意 $x_1, x_2 \in [m, n]$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $-1 < \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ 恒成立.

因为 $g(x) = \frac{1}{|x|}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 所以 $0 \notin [m, n]$.

当 $m < n < 0$ 时, $y = \frac{1}{-x}$,

所以 $\Delta y = -\frac{1}{x_2} - \left(-\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{\Delta x}{x_1 x_2}$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x_1 x_2} > 0$, 不合题意;

当 $0 < m < n$ 时, $y = \frac{1}{x}$,

所以 $\Delta y = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\Delta x}{x_1 x_2}$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$,

要使 $-1 < \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ 恒成立, 只需使 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_1 x_2} > -1$, 即 $x_1 x_2 > 1$ 恒成立,

若 $m < 1$, 则 $\exists x_1 = m, x_2 < 1$, 使 $x_1 x_2 < 1$, 这与 $x_1 x_2 > 1$ 矛盾,

所以 m 的最小值为 1.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯