2023年全国统一高考数学试卷天津卷

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。

2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。

3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。

5．考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共9小题，每小题5分，共45分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$， $A=\{1,3\}$， $B=\{1,2,4\}$，则 $A\cup(\complement_U B)=$，，，，，

A． $\{1,3,5\}$　　B． $\{1,3\}$　　C． $\{1,2,4\}$　　D． $\{1,2,4,5\}$

【答案】A

【解析】因为 $U=\{1,2,3,4,5\}$， $B=\{1,2,4\}$，所以 $\complement_U B=\{3,5\}$．又 $A=\{1,3\}$，所以 $A\cup(\complement_U B)=\{1,3\}\cup\{3,5\}=\{1,3,5\}$．故选：A．

2．“ $a^2=b^2$ ”是“ $a^2+b^2=2ab$ ”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】由 $a^2=b^2$ 得 $|a|=|b|$，即 $a=b$ 或 $a=-b$；

由 $a^2+b^2=2ab$ 得 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2=0$，即 $a=b$．

因为 $a^2=b^2$ 不能推断 $a^2+b^2=2ab$，但 $a^2+b^2=2ab$ 能推断 $a^2=b^2$，

所以“ $a^2=b^2$ ”是“ $a^2+b^2=2ab$ ”的必要不充分条件．故选B．

3．若 $a=1.01^{0.5}$， $b=1.01^{0.6}$， $c=0.6^{0.5}$，则 a,b,c 的大小关系为

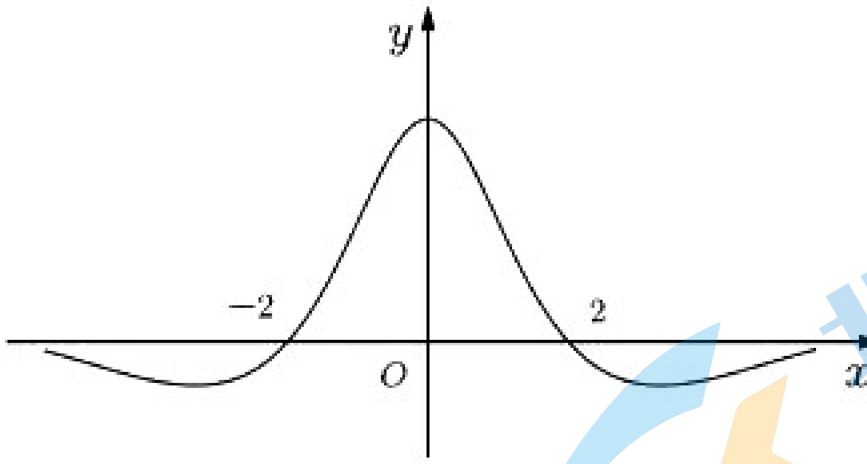
A． $c>a>b$　　B． $c>b>a$

C． $a>b>c$　　D． $b>a>c$

【答案】D

【解析】因为指数函数 $f(x)=1.01^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $0.5<0.6$，所以 $f(0.5)<f(0.6)$，即 $1.01^{0.5}<1.01^{0.6}$，即 $b>a$；又因为幂函数 $g(x)=x^{0.5}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0.6<1.01$，所以 $g(0.6)<g(1.01)$，即 $0.6^{0.5}<1.01^{0.5}$，即 $a>c$，由此可知， a,b,c 的大小关系为 $b>a>c$．故选D．

4．函数 $f(x)$ 的图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为



A．$\dfrac{5\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　　　B．$\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$

C．$\dfrac{5\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$　　　　D．$\dfrac{5\cos x}{x^{2}+1}$

【答案】

【解析】对于 A，若 $f(x)=\dfrac{5\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$，则 $f(-x)=\dfrac{5\left(e^{-x}-e^{x}\right)}{(-x)^{2}+2}=-\dfrac{5\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x^{2}+2}=-f(x)$，函数为奇函数，其图象关于原点对称，故 A 不符合题意；

对于 B，若 $f(x)=\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}$，则 $f(-x)=\dfrac{5\sin(-x)}{(-x)^{2}+1}=-\dfrac{5\sin x}{x^{2}+1}=-f(x)$，函数为奇函数，其图象关于原点对称，故 B 不符合题意；

对于 C，若 $f(x)=\dfrac{5\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{x^{2}+2}$，由于 $e^{x}+e^{-x}\geq 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}=2>0$，且 $x^{2}+2>2>0$，则对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>0$，即函数图象在 x 轴上方，不可能在 x 轴下方，故 C 不符合题意；

对于 D，若 $f(x)=\dfrac{5\cos x}{x^{2}+1}$，则 $f(-x)=\dfrac{5\cos(-x)}{(-x)^{2}+1}=\dfrac{5\cos x}{x^{2}+1}=f(x)$，函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 D 符合题意．

故选 D.

5．已知函数 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=2$，一个周期为 4，则 $f(x)$ 的解析式可能为

A．$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$　　　　B．$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

C．$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$　　　　D．$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

【答案】

【解析】由于 CD 的周期为 8，AB 的周期为 4，故排除 CD.

对于 A，当 $x=2$ 时，$f(2)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times 2\right)=\sin\pi=0$，所以直线 $x=2$ 不是该函数的对称轴；

对于 B，当 $x=2$ 时，$f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\cos\pi=-1$，所以直线 $x=2$ 是该函数的对称轴.

故选 B.

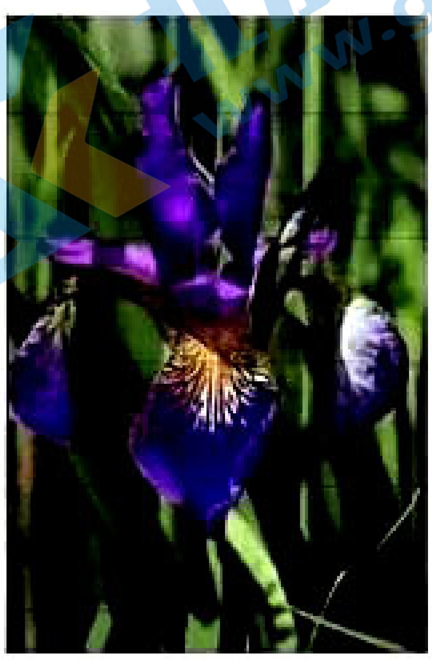
6．已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_{n+1}=2S_n+2$，则 a_4 的值为

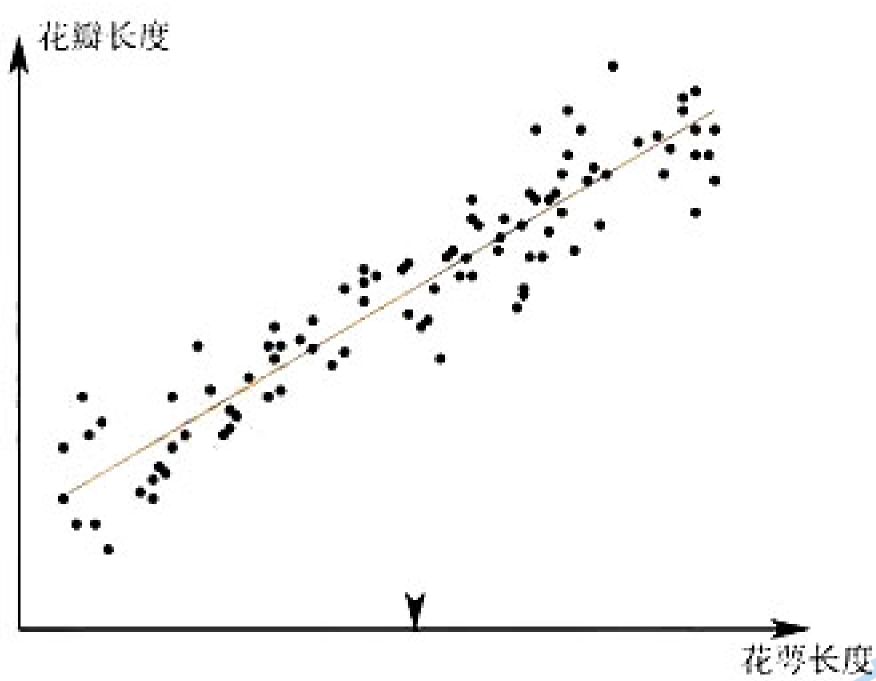
A．3　　B．18　　C．54　　D．152

【答案】C

【解析】由题意，$\{a_n\}$ 为等比数列且 $a_{n+1}=2S_n+2$，有 $a_n=2S_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，两式相减得 $a_{n+1}=3a_n(n\geqslant 2)$，$a_2$ 和 a_1 同样满足条件，故 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $\{a_n\}$ 为公比为3的等比数列. 而 $a_2=2a_1+2$，知 $a_1=2$，从而 $a_n=2\times 3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，易得本题正确选项为 C.

7．调查某种花萼长度和花瓣长度，所得数据如图所示，其中相关系数 $r=0.8245$，下列说法正确的是





A．花瓣唱的和花萼长度没有相关性

B．花瓣长度和花萼长度呈负相关

C．花瓣长度和花萼长度呈正相关

D．若从样本中抽取一部分，则这部分的相关系数一定是0.8245

【答案】C

【解析】如上右图所示，这些散点图大致落在一条从左下角到右上角的直线附近，表明随花萼长度的增加，相应的花瓣长度呈增加的趋势，由成对样本数据的分布规律，两者呈现线性相关关系，且为正相关. 同时样本具有随机性，样本相关系数会随着样本成对数据的改变而发生变化，故 D 选项不正确，本题正确答案为 C.

8．在三棱锥 $P-ABC$ 中，线段 PC 上的点 M 满足 $PM=\frac{1}{3}PC$，线段 PB 上的点 N 满足 $PN=\frac{2}{3}PB$，则三棱锥 $P-AMN$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比为

A．$\frac{1}{9}$　　B．$\frac{2}{9}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{4}{9}$

【答案】B

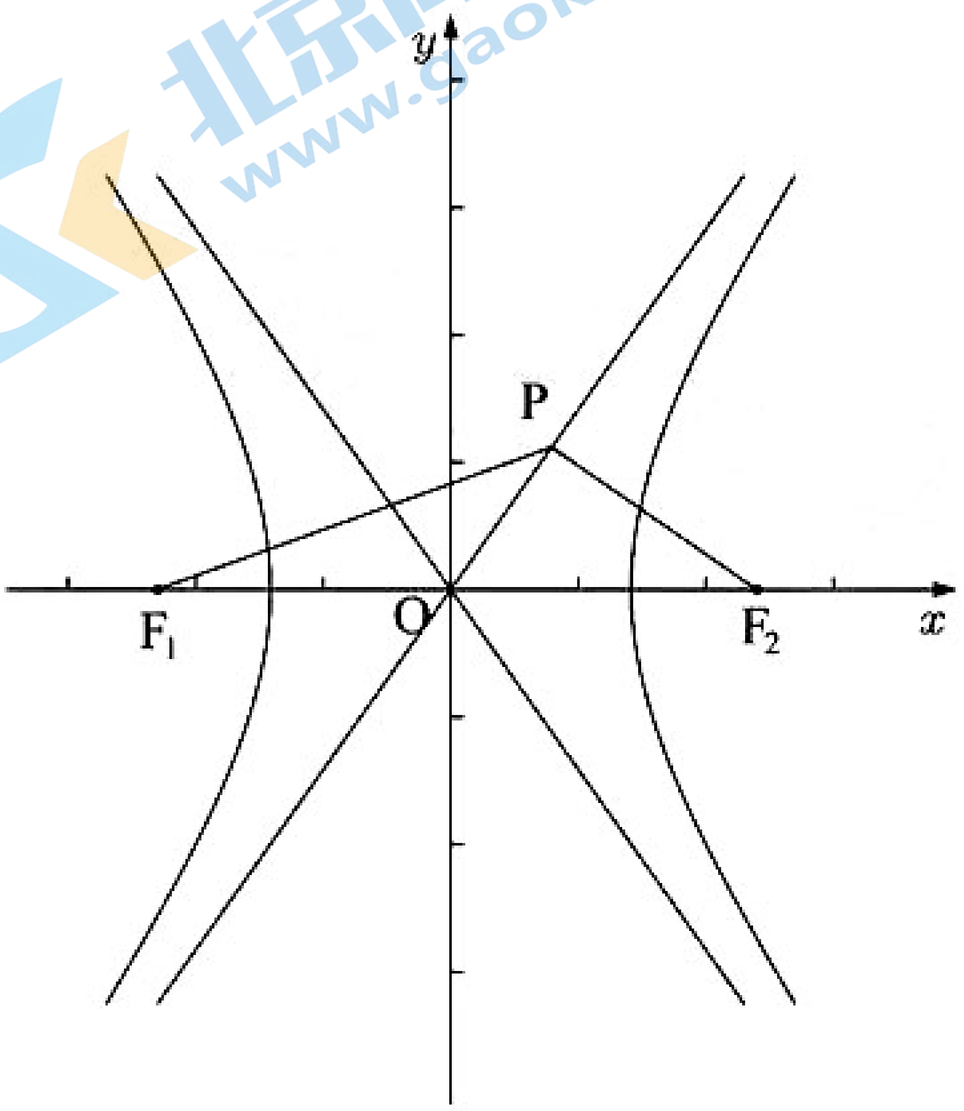
【解析】由已知分析，$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}PC\times\frac{2}{3}PB\times\sin\angle BPC=\frac{2}{9}S_{\triangle PBC}$

又 $V_{P-AMN}=V_{A-PMN}=\frac{2}{9}V_{A-PBC}=\frac{2}{9}V_{P-ABC}$，故选 B.

9．双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1 和 F_2，过 F_2 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 P．已知 $PF_2=2$，直线 PF_1 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，则双曲线的方程为

A．$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

C．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$



【答案】D

【解析】由题意，$PF_2=2$，又焦点到任一条渐近线的距离为 b，故 $b=2$．在 $\triangle POF_2$ 中由等面积法易得点 P 坐标为 $(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$，故 $k_{PF_1}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2=0$，故 $a=\sqrt{2}$．

易得本题答案为 D.

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

10．已知 i 是虚数单位，化简 $\frac{5+14i}{2+3i}$ 的结果为______.

【答案】4+i

【解析】$\frac{5+14i}{2+3i}=\frac{(5+14i)\times(2-3i)}{(2+3i)\times(2-3i)}=\frac{52+13i}{13}=4+i$

11．在$(2x^3-\frac{1}{x})^6$的展开式中，x^2的系数为______.

【答案】60 来源：高三答案公众号

【解析】$(2x^3-\frac{1}{x})^6$的展开式的通项是$C_6^k(2x^3)^{6-k}(-\frac{1}{x})^k=(-1)^k2^{6-k}C_6^kx^{18-4k}$．根据题意，得$18-4k=2$，$k=4$．因此，$x^2$项的系数为$(-1)^4\times2^2\times C_6^4=60$．

12．过原点的一条直线与圆$C:(x+2)^2+y^2=3$相切，交曲线$y^2=2px(p>0)$于点P，若$OP=8$，则p的值为______.

【答案】6

【解析1】易知过原点的直线斜率存在，故设过原点的直线为$y=kx$，

根据直线与圆$C:(x+2)^2+y^2=3$相切，得圆心$C(-2,0)$到直线$y=kx$的距离为

$d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，解得$k=\pm\sqrt{3}$．

联立$\begin{cases}y^2=2px\\y=\pm\sqrt{3}x\end{cases}$，解得$P(\frac{2p}{3},\pm\frac{2\sqrt{3}p}{3})$．由$|OP|=\sqrt{(\frac{2p}{3})^2+(\pm\frac{2\sqrt{3}p}{3})^2}=8$，$p>0$，得$p=6$．

【解析2】由题目得：圆心$(-2,0)$，$r=\sqrt{3}$，直线与圆相切，可得直线斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，过P点作x轴垂线，交x轴于点A，在Rt△OPA中，$\angle POA=\frac{\pi}{3}$，$OP=8$，

可得$P(4,4\sqrt{3})$带入抛物线方程可得$p=6$

13．甲乙丙三个盒子中装有一定量得黑球和白球，其总数之比为$5:4:6$，这三个盒子中黑球占总数得比例分别为40%，25%，50%，现从三个盒子中各取一个球，取到的三个球都是黑球的概率为______；将三个盒子混合在一起后任取一个球，是白球的概率为______.

【答案】$\frac{1}{20}$；$\frac{3}{5}$

【解析】第一空：设A_1=“甲盒子中取到一个黑球”，A_2=“乙盒子中取到一个黑球”，A_3=“丙盒子中取到一个黑球”，A=“取到的三个球都是黑球”，根据独立事件的概率公式，得

$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=\frac{40}{100}\cdot\frac{25}{100}\cdot\frac{50}{100}=\frac{1}{20}$．

第二空：设C=“三个盒子混合后任取一个球，是白球”，B_1=“白球为甲盒子中的”，B_2=“白球为乙盒子中的”，B_3=“白球为丙盒子中的”，则$\Omega=B_1\cup B_2\cup B_3$，且$B_1$，$B_2$，$B_3$两两互斥，根据题意得

$P(C)=P(B_1)P(C|B_1)+P(B_2)P(C|B_2)+P(B_3)P(C|B_3)=\frac{5}{15}\cdot\frac{40}{100}+\frac{4}{15}\cdot\frac{25}{100}+\frac{6}{15}\cdot\frac{50}{100}=\frac{3}{5}$.

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$BC=1$，点D为BC的中点，点E为CD的中点，若设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AE}$可用$\vec{a},\vec{b}$表示为________；若$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最大值为________.

【答案】$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；$\frac{13}{24}$

【解析】（1）$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

（2）由$BC=1$，余弦定理及基本不等式，得$1=BC^2=x^2+y^2-xy\geqslant xy$，则$xy\leqslant 1$，当且仅当$x=y=1$等号成立.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b})=\frac{1}{12}(2\vec{a}^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2)$

$=\frac{1}{12}(2x^2+\frac{5}{2}xy+2y^2)=\frac{1}{12}(2xy+\frac{5}{2}xy+2)=\frac{1}{12}(\frac{9}{2}xy+2)$

$\leqslant\frac{1}{12}(\frac{9}{2}+2)=\frac{13}{24}$.

15. 若函数$f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|$有且仅有两个零点，则a的取值范围为________.

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】当$x^2-ax+1\geqslant 0$时，$f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|=ax^2-2x-(x^2-ax+1)$

$=(a-1)x^2+(a-2)x-1=(x+1)[(a-1)x-1]$；此时有$x_1=-1$；$x_2=\frac{1}{a-1}$.

又$x^2-ax+1\geqslant 0$时，所以$x_1=-1$对应$a\geqslant -2$；所以$x_2=\frac{1}{a-1}$对应$a\leqslant 2$.

当$x^2-ax+1<0$时，$f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|=ax^2-2x+(x^2-ax+1)$

$=(a+1)x^2-(a+2)x+1=(x-1)[(a+1)x-1]$；此时有$x_3=1$；$x_4=\frac{1}{a+1}$.

又$x^2-ax+1<0$时，所以$x_3=1$对应$a>2$；所以$x_4=\frac{1}{a+1}$对应$a<-2$.

特别地，当$a=1$时，函数$f(x)$只有一个零点为-1，不符合题意；

当$a=0$时，函数$f(x)$只有一个零点为-1，不符合题意；

当$a=-1$时，函数$f(x)$有两个零点分别为-1和$-\frac{1}{2}$，符合题意；

综上，a的取值范围为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

三、解答题：共5小题，共75分．解答应写出文字说明

程。

16. （12 分）

在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c .已知 $a=\sqrt{39},b=2,\angle A=120^\circ$.

（1）求 $\sin B$ 的值；

（2）求 c 的值；

（3）求 $\sin(B-C)$.

【答案】(I) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ ；(II) 5 ；(III) $-\dfrac{7\sqrt{3}}{26}$ ；

【解析】因为 $\angle A=120^\circ$，所以 $\angle B,\angle C$ 都为锐角，且 $\angle B+\angle C=60^\circ$，

(I)由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{\sqrt{39}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$，

$\sin B=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

(II)由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$39=4+c^2+2c$，

$c^2+2c-35=0$，$c=5$ 或 $c=-7$（舍），$c=5$.

(III)方法一. 因为 $\sin B=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，$\angle B$ 都为锐角，所以 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

$\sin(B-C)=\sin(B-(60^\circ-B))=\sin(2B-60^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\sin 2B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B=\sin B\cos B-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-2\sin^2 B)=-\dfrac{7\sqrt{3}}{26}$

方法二. 因为 $\sin B=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，$\angle B$ 都为锐角，所以 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\dfrac{\sqrt{39}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{5}{\sin C}$，$\sin C=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$，

$\angle C$ 都为锐角，$\cos C=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$，

$\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=-\dfrac{7\sqrt{3}}{26}$.

17. （12 分）

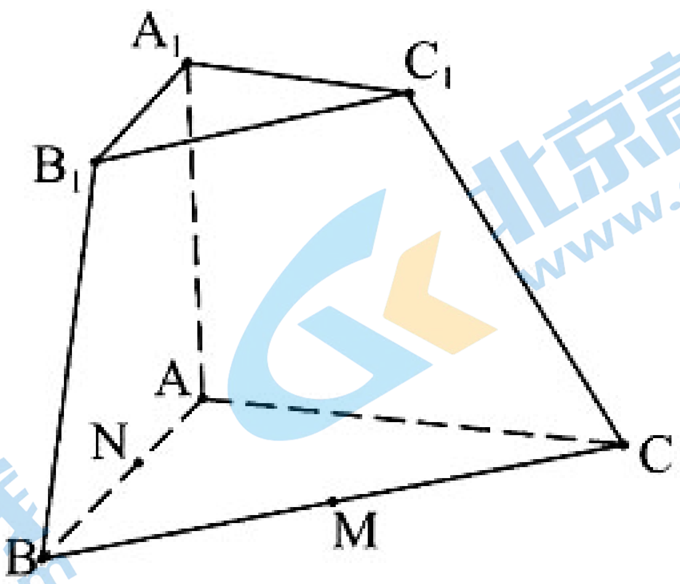
三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $A_1A\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=2$，

$A_1C_1=1$，N 为线段 AB 的中点，M 为线段 BC 的中点.

（Ⅰ）求证：$A_1N//$平面C_1MA；

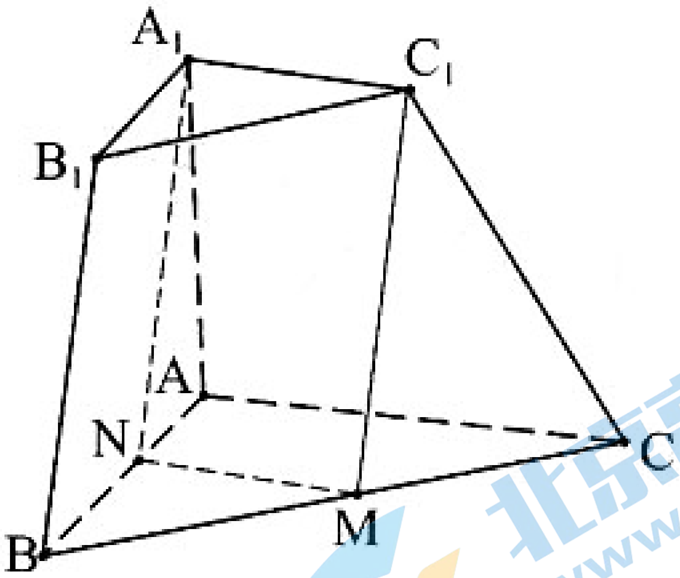
（Ⅱ）求平面C_1MA与平面ACC_1A_1所成角的余弦值；

（Ⅲ）求点C到平面C_1MA的距离.



【答案】（Ⅰ）见解析；（Ⅱ）$\frac{2}{3}$；（Ⅲ）$\frac{4}{3}$.

【解析】（Ⅰ）连结A_1N,MN,MC_1.



因为N为线段AB的中点，M为线段BC的中点，

所以线段MN是ΔABC的中位线，

所以$MN//AC$，且$MN=\frac{1}{2}AC$.

在三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=2$，$A_1C_1=1$，

即$A_1C_1//AC$，且$A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，

所以$MN=A_1C_1$，且$MN//A_1C_1$，

所以四边形A_1C_1MN是平行四边形，$A_1N//C_1M$.

又$A_1N\not\subset$平面C_1MA，$C_1M\subset$平面C_1MA，

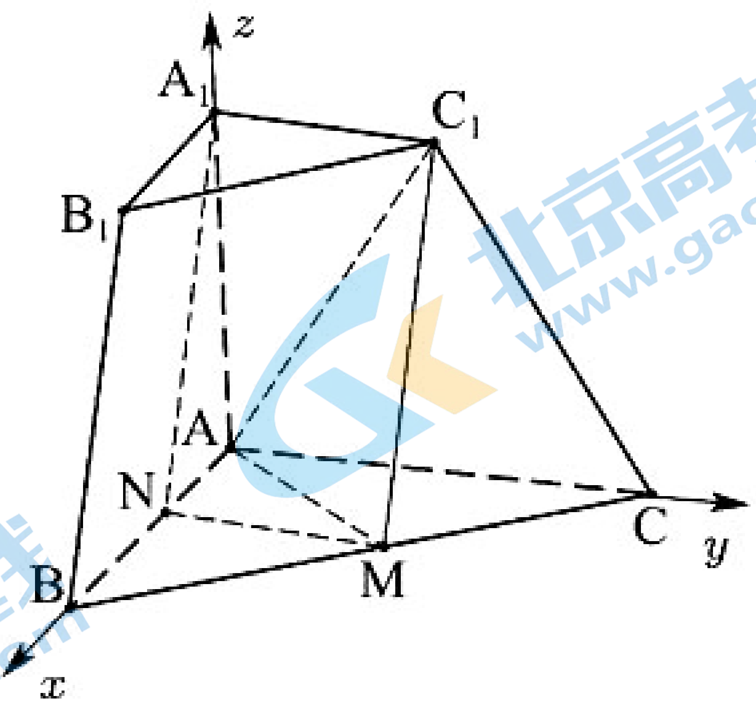
所以$A_1N//$平面C_1MA.

（Ⅱ）因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，且 $AB,AC\subset ABC$，

所以 $A_1A\perp AB$， $A_1A\perp AC$. 来源：高三答案公众号

又 $AB\perp AC$，所以直线 A_1A,AB,AC 两两垂直.

如图，以向量 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



因为 $AB=AC=AA_1=2$， $A_1C_1=1$，

则 $A(0,0,0)$， $C_1(0,1,2)$， $B(2,0,0)$， $C(0,2,0)$.

又点 M 是线段 BC 的中点，可得 $M(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}=(0,1,2)$， $\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$.

设平面 C_1MA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\overrightarrow{AC_1}\perp\boldsymbol{m}$， $\overrightarrow{AM}\perp\boldsymbol{m}$，

即 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0$， $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}=0$，由此可得 $\begin{cases}y+2z=0,\\x+y=0,\end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=-2$， $z=-1$，即 $\boldsymbol{m}=(-2,2,-1)$，

故平面 C_1MA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-2,2,-1)$.

易知，平面 ACC_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$.

设平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ，

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$.

又 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，

故平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知， $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

平面 C_1MA 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(-2,2,-1)$，

设点 C 到平面 C_1MA 的距离为 d，

则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|(0,2,0)\cdot(-2,2,-1)|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\dfrac{4}{3}$.

所以，点 C 到平面 C_1MA 的距离为 $\dfrac{4}{3}$.

18. （12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A_2，右焦点为 F，且 $|A_1F|=3,|A_2F|=1$.

（1）求椭圆 C 的方程及离心率；

（2）设点 P 是椭圆 C 上一动点（不与顶点重合），直线 A_2P 交 y 轴于点 Q，若三角形 A_1PQ 的面积是三角形 A_2FP 面积的二倍，求直线 A_2P 的方程.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，$e=\dfrac{1}{2}$ （2）$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$ $x+y+z=1$

【解析】（1）设椭圆 C 的焦距为 $2c(c>0)$，

则 $\begin{cases}a+c=3\\a-c=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\c=1\end{cases}$，

故 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$；

（2）由（1）可得，$|A_2F|=\dfrac{1}{4}|A_1A_2|$，所以 $S_{\Delta A_2FP}=\dfrac{1}{4}S_{PA_1A_2}$，

又 $S_{\Delta A_1PQ}=2S_{\Delta A_2FP}$，所以 $S_{\Delta A_1PQ}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta PA_1A_2}$，

所以 $|PQ|=\dfrac{1}{2}|PA_2|$，

设 $P(x_0,y_0)$，当 $x_0<0$ 时，$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA_2}$ 点 P 与 A_1 重合，不合题意；

当 $x_0>0$ 时，可得 $\overrightarrow{QP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{QA_2}$，

故 $x_0=\dfrac{2}{3}$，代入椭圆方程，得 $P(\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$，

所以 $k_{A_2P}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以直线 A_2P 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

19. （12 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_3+a_5=16$，$a_5-a_3=4$

（Ⅰ）求 a_n 和 $\sum\limits_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}a_i$

（Ⅱ）设 $\{b_n\}$ 为等比数列，当 $2^{k-1}\le n\le 2^k-1$ 时，$b_k<a_n<b_{k+1}$

(i) 当 $k\ge 2$ 时，求证 $2^k-1<b_k<2^k+1$

(ii) 求 $\{b_n\}$ 的通项及前 n 项和

(Ⅰ) $\begin{cases}a_2+a_5=16\\a_5-a_3=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+5d=16\\2d=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=3\\d=2\end{cases}\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1}a_i=a_{2^{n-1}}+a_{2^{n-1}+1}+a_{2^{n-1}+2}+\cdots+a_{2^n-1}$$

$$=\frac{2^{n-1}\left[2\cdot 2^{n-1}+1+2\cdot\left(2^n-1\right)+1\right]}{2}$$

$$=\frac{2^{n-1}\cdot\left(2^n+1+2\cdot 2^n-1\right)}{2}$$

$$=\frac{2^{n-1}\cdot 3\cdot 2^n}{2}=\frac{3}{2}\cdot 2^{2n-1}=3\cdot 2^{2n-2}=3\cdot 4^{n-1}$$

注：项数 $\Rightarrow\left(2^n-1\right)-\left(2^{n-1}\right)+1=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$

（Ⅱ）(i)

$\because 2^{k-1}\leqslant n\leqslant 2^k-1\Rightarrow 2^k\leqslant 2n\leqslant 2^{k+1}-2\Rightarrow 2^k+1\leqslant 2n+1\leqslant 2^{k+1}-1$

$\therefore 2^k+1\leqslant a_n\leqslant 2^{k+1}-1$ $\because b_k<a_n<b_{k+1}$ 成立

$\therefore\left.\begin{matrix}b_k<(a_n)_{\min}\\b_{k+1}>(a_n)_{\max}\end{matrix}\right\}\Rightarrow b_k<2^k+1$ 且 $b_{k+1}>2^{k+1}-1\Rightarrow b_k>2^k-1\Rightarrow 2^k-1<b_k<2^k+1$

证毕.

(ii) 因为 $\{b_n\}$ 为等比数列，且 $k\in N^*$，$2^k-1<b_k<2^k+1$

$\therefore b_n = 2^n \quad \therefore S_n = \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2} = 2\left(2^n-1\right) = 2^{n+1}-2$

20. （12 分）

已知函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\ln(x+1)$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率；

（2）当 $x>0$ 时，证明：$f(x)>1$；

（3）证明：$\dfrac{5}{6}\le \ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)+n\le 1$.

【解析】（1）$\dfrac{1}{3}-\dfrac{\ln 3}{4}$；(2)(3)见详解.

（1）$f'(x)=\dfrac{x+2}{2x(x+1)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(x+1)$，$x=2$ 处的切线斜率为 $f'(2)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\ln 3}{4}$.

（2）当 $x>0$ 时，$f(x)>1 \Leftrightarrow g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}>0$，而 $g'(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$，$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，因此 $g(x)>g(0)=0$，原不等式得证.

（3）令中间待证式为某数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\ln(n!)-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln(n)+n$，则 $a_1=S_1=1$；

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=1+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{n-1}{n}=1-\left(\dfrac{1}{1/(n-1)}+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)=1-f\left(\dfrac{1}{n-1}\right)$，

由(2)，$a_n<0$，$(n\ge 2)$，故 $S_n\le S_1=1$，不等式右边得证. 欲证 $\dfrac{5}{6}\le S_n$，只需证：对任意的 $n\ge 2$，

$\sum\limits_{k=2}^{n}(-a_k)=\sum\limits_{k=2}^{n}\left(f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)-1\right)\le\dfrac{1}{6}$，令 $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$，$h'(x)=\dfrac{-x^2}{2(x+1)^2}$，当 $x>0$ 时

$h'(x)<0$，$h(x)<h'(0)=0$，$\ln(x+1)<\dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$，$f(x)-1<\dfrac{x+2}{2x}\cdot\dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}-1=\dfrac{x^2}{4(x+1)}<\dfrac{x^2}{4}$，

因此当 $k\ge 2$ 时，$f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)-1<\dfrac{1}{4(k-1)^2}<\dfrac{1}{4(k-1)^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-3}-\dfrac{1}{2k-1}\right)$，

当 $n\ge 4$ 时，累加得

$\sum\limits_{k=4}^{n}(-a_k)=\sum\limits_{k=4}^{n}\left(f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)-1\right)<\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2n-1}\right)<\dfrac{1}{10}$

又 $-a_2=f(1)-1=\frac{3}{2}\ln 2-1<\frac{3}{2}\times 0.694-1=0.041$，$-a_3=\frac{5}{2}\ln\frac{3}{2}-1<\frac{5}{2}(1.1-0.693)-1=0.0175$

故 $\sum_{2}^{n}(-a_k)=(-a_2)+(-a_3)+\sum_{4}^{n}(-a_k)=0.041+0.0175+0.1=0.1585<\frac{1}{6}$，原不等式左边得证.

解法二：（不等式左侧的更精确的放缩）

欲证 $\sum_{k=2}^{n}\left(f\left(\frac{1}{k-1}\right)-1\right)\le\frac{1}{6}$，只需证：$f\left(\frac{1}{n-1}\right)-1<\frac{1}{n(n+1)}$，令 $\frac{1}{n}=x\in(0,1]$，只需证

$x\in(0,1]$时，$f(x)-1<\frac{x^2}{6x(x+1)}$，令 $F(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+1}-\frac{x^3}{3(x+1)(x+2)}$，

则只需证 $0<x\le 1$时，$F(x)<0$，求导得

$$F'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}-\frac{3x^2(x+1)(x+2)-x^3(2x+3)}{3(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{-x^2}{3(x+1)^2(x+2)^2}\cdot(x^2+3x+3)<0,$$

$F(x)$在$(0,1]$上单调递减，故 $0<x\le 1$时，$F(x)<F(0)=0$，因此

$$\sum_{k=2}^{n}\left(f\left(\frac{1}{k-1}\right)-1\right)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{6},$$

原不等式左侧得证.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。