

顺义区 2018 届高三第二次统练

数学试卷（理科）

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

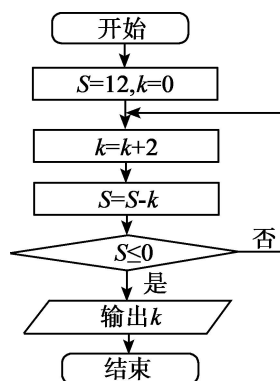
1. 设集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-2, -1\}$ B. $\{-2, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x + y \leq 3, \\ y \geq x, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 则 $2x + y$ 的最大值为

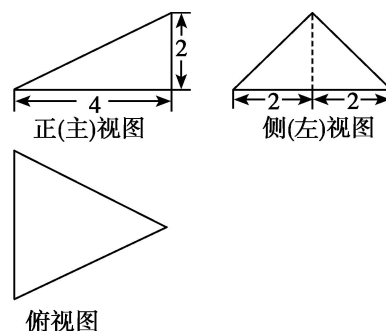
- A. 1 B. 3 C. 4 D. $\frac{9}{2}$

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

4. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积是



A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $8\sqrt{3}$ D. 16

5. 已知直线 a, b, m , 其中 a, b 在平面 α 内. 则“ $m \perp a, m \perp b$ ”是“ $m \perp \alpha$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $a = \log_3 \frac{1}{2}, b = \log_3 9.1, c = 2^{0.8}$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

7. 已知 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心. 若 $\overrightarrow{CO} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{\lambda}{\mu}$ 的值为

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

8. 已知点 $A(-1, -1)$. 若曲线 T 上存在两点 B, C , 使 $\triangle ABC$ 为正三角形, 则称 T 为“正三角形”曲线. 给定下列三条曲线:

① $x + y - 3 = 0 (0 \leq x \leq 3)$; ② $x^2 + y^2 = 2 (-\sqrt{2} \leq x \leq 0)$; ③ $y = -\frac{1}{x} (x > 0)$.

其中, “正三角形”曲线的个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 若 $(x - 2i)i = 2 + i (x \in \mathbb{R})$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1 = -1, S_{10} = 35$, 则 $a_{20} =$ _____.

11. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $(4, 1)$, 且与 $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ 具有相同渐近线, 则 C 的方程为_____; 渐近线方程为_____.

12. 曲线 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$ 的对称中心到直线 $2x - y + 2 = 0$ 的距离为_____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 他们的终边关于 x 轴对称, 若 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

14. 已知 P 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 2k-1\} (k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$ 的非空子集, 且当 $x \in P$ 时, 有 $2k - x \in P$. 记满足条件的集合 P 的个数为 $h(k)$, 则 $h(2) =$ _____;
 $h(k) =$ _____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b > c$, $a = 6, b = 5$, $\triangle ABC$ 的面积为 9.

(I) 求 $\cos C$ 的值; (II) 求 c 及 $\sin B$ 的值.

16. (本小题满分 13 分)

2018 年 2 月 25 日第 23 届冬季奥运会在韩国平昌闭幕, 中国以 1

金 6 银 2 铜的成绩结束本次冬奥会的征程. 某校体育爱好者协会在高

三年级某班进行了“本届冬奥会中国队表现”的满意度调查(结果只有“满意”和“不满意”两种),按分层抽样从被调查的学生中随机抽取了 11 人,具体的调查结果如下表:

某班	满意	不满意
男生	2	3
女生	4	2

(I) 若该班女生人数比男生人数多 4 人,求该班男生人数和女生人数

(II) 在该班全体学生中随机抽取一名学生,由以上统计数据估计该生持满意态度的概率;

(III) 若从该班调查对象中随机选取 2 人进行追踪调查,记选中的 2 人中对“本届冬奥会中国队表现”满意的人数为 ξ ,求随机变量 ξ 的分布列及其数学期望.

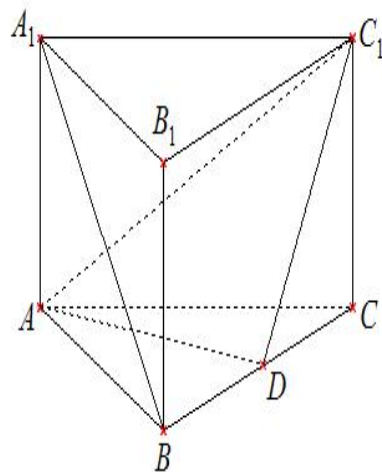
17. (本小题满分 14 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱长和底面边长均为 1, D 是 BC 的中点.

(I) 求证: $A_1B \parallel$ 平面 ADC_1 ;

(II) 求 A_1A 与平面 ADC_1 所成角的正弦值;

(III) 试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E , 使 $CE \perp$ 平面 ADC_1 ? 若存在,求 $\frac{A_1E}{A_1B_1}$ 的值,若不存在,说明理由.



18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^{2x} + mx$, 其中 $m \leq 0$.

(I) 当 $m = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 若不等式 $f(x) > 0$ 在定义域内恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 14 分) 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左焦点为 F , 左顶点为 A , 离心率为 e , 点 $M(t, 0) (t < -2)$ 满足条件 $\frac{|FA|}{|AM|} = e$.

(I) 求实数 t 的值;

(II) 设过点 F 的直线 l 与椭圆 G 交于 P, Q 两点, 记 $\triangle MPF$ 和 $\triangle MQF$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 证明: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|MP|}{|MQ|}$.

20. (本小题满分 13 分) 已知数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$. 如果数列 $B_n: b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足 $b_1 = a_n$, $b_k + b_{k-1} = a_k + a_{k-1}$, 其中 $k = 2, 3, \dots, n$, 则称 B_n 为 A_n 的“陪伴数列”.

(I) 写出数列 $A_4: 3, 1, 2, 5$ 的“陪伴数列” B_4 ;

(II) 若 A_9 的“陪伴数列”是 B_9 . 试证明: b_9, a_9, a_1 成等差数列.

(III) 若 n 为偶数, 且 A_n 的“陪伴数列”是 B_n , 证明: $b_n = a_1$.

顺义区 2018 届高三第二次统练

数学试卷答案 (理科)

一、ADDB BCCC

二、9. 1. 10. 18 11. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1, y = \pm \frac{1}{2}x$.

12. $\sqrt{5}$. 13. $-\frac{7}{8}$. 14. 3, $2^k - 1$

15. 解: (I) 因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \sin C = 9$$

$$\text{所以 } \sin C = \frac{3}{5}.$$

$$\text{因为 } b > c, \text{ 所以 } \cos C = \frac{4}{5}. \text{-----7 分}$$

(II) 由 (I) 知在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 13$,

$$\text{所以 } c = \sqrt{13}. \text{-----10 分}$$

$$\text{又因为 } b = 5, \sin C = \frac{3}{5}$$

$$\text{所以在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理得 } \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

-----13 分

16. (I) 不妨设女生人数为 X , 男生人数为 Y , 则可得 $X - Y = 4$ (1)

$$\text{又由分层抽样可知, } \frac{X}{Y} = \frac{6}{5} \text{ (2)}$$

联立 (1) (2) 可解得 $X = 24, Y = 20$

(II) 设该生持满意态度为事件 A , 则基本事件的总数有 11 种, 事件 A 中包含的基本事件

$$P(A) = \frac{6}{11}$$

有 6 种, 所以

(III) ξ 的可能取值有 0, 1, 2

$\xi = 0$ 对应的事件为从该班 11 名调查对象中抽取 2 人, 2 人中恰好有 0 人持满意态度

基本事件的总数为 $C_{11}^2 = 55$, 其中包含的基本事件数有 $C_5^2 = 10$ 种

$$\text{所以 } P(\xi = 0) = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$

$$\text{同理: } P(\xi = 1) = \frac{C_6^1 \cdot C_5^1}{C_{11}^2} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}, \quad P(\xi = 2) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$$

所以分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{11}$

$$\text{所以期望 } E\xi = 0 \times \frac{2}{11} + 1 \times \frac{6}{11} + 2 \times \frac{3}{11} = \frac{12}{11}$$

17. (I) 连结 A_1C 交 AC_1 于点 O , 连结 OD

$\because A_1C$ 交 AC_1 于点 O $\therefore O$ 是 A_1C 的中点

又 $\because D$ 是 BC 的中点 $\therefore OD$ 是 $\triangle A_1BC$ 的一条中位线

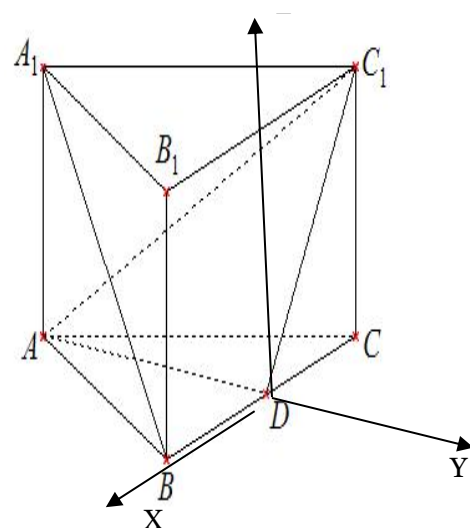
$\therefore A_1B \parallel OD$ 又 $\because OD \subset \text{平面 } ADC_1$

$\therefore A_1B \parallel \text{平面 } ADC_1$ 4 分

(II) 以点 D 为坐标原点, DB 所在直线为 X 轴, AD 所在直线为 Y 轴, 垂直于面 ABC 的直线为 Z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0)$,

$$A(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C(-\frac{1}{2}, 0, 0), C_1(-\frac{1}{2}, 0, 1)$$

$$\text{在平面 } ADC_1 \text{ 中, } \vec{DA} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), \vec{DC_1} = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$$



设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 ADC_1 的一个法向量, 则有
$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{DA} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DC_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + z = 0 \end{cases}$$

不妨令 $x = 2$, 则 $z = 1$, $y = 0$, 所以 $\vec{m} = (2, 0, 1)$

又 $A_1 \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$, 则 $\vec{A_1A} = (0, 0, -1)$

设 A_1A 与平面 ADC_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{A_1A} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{A_1A}|}{|\vec{m}| |\vec{A_1A}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore A_1A$ 与平面 ADC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 9 分

(III) 假设点 E 在线段 A_1B_1 上, 使 $CE \perp$ 平面 ADC_1

不妨设 $\vec{A_1E} = \lambda \vec{A_1B_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$\therefore A_1 \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right), B_1 \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right) \quad \therefore \vec{A_1B_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$

$\therefore \vec{A_1E} = \lambda \vec{A_1B_1} = \left(\frac{1}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, 0 \right) \quad \therefore E \left(\frac{1}{2}\lambda, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, 1 \right)$

$\therefore \vec{CE} = \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$

在平面 ADC_1 中, $\vec{DA} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \vec{AC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$

$\therefore \vec{CE} \cdot \vec{DA} = 0 \quad (1) \quad \vec{CE} \cdot \vec{AC_1} = 0 \quad (2)$

由 (1) 可解得 $\lambda = 1$ 又 (2) 可解得 $\lambda = 0$

(1) 与 (2) 矛盾, 所以这样的点 E 不存在14 分

18. 解: (I) 当 $m = -1$ 时, $f(x) = e^{2x} - x$

$\therefore f'(x) = 2e^{2x} - 1$ 2 分

则 $f'(0)=1$ ，又 $f(0)=1$ -----4 分

∴ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为： $y=x+1$ -----5 分

(II) 函数 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，且 $f'(x)=2e^{2x}+m$ ($m \leq 0$)-----6 分

下面对实数 m 进行讨论：

① 当 $m=0$ 时， $f(x)=e^{2x} \geq 0$ 恒成立，满足条件-----7 分

② 当 $m < 0$ 时，由 $f'(x) > 0$ 解得 $x > \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{m}{2}\right)$ ，从而知

函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{m}{2}\right), +\infty\right)$ 内递增；同理函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{m}{2}\right)\right)$ 内递减，

-----9 分

因此 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{m}{2}\right)$ 处取得最小值 $\frac{m}{2} \left[\ln\left(-\frac{m}{2}\right) - 1 \right]$ -----10 分

$$\therefore \frac{m}{2} \left[\ln\left(-\frac{m}{2}\right) - 1 \right] > 0,$$

解得 $-2e < m < 0$ -----12 分

综上：当 $m \in (-2e, 0]$ 时，不等式 $f(x) > 0$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内恒成立。---13 分

19. 解：(I) 椭圆 G 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

∴ $a=2, b=\sqrt{3}$ ， $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$ -----2 分

则 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ， $|FA|=1, |AM|=-2-t$ -----3 分

∴ $\frac{|FA|}{|AM|} = \frac{1}{-2-t} = \frac{1}{2}$ ，解得 $t=-4$ -----4 分

(II) 方法一：

① 若直线 l 的斜率不存在，则 $S_1=S_2$ ， $|MP|=|MQ|$ ，符合题意-----5 分

②若直线 l 的斜率存在，因为左焦点 $F(-1,0)$ ，则可设直线 l 的方程为： $y = k(x+1)$ ，

并设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 。

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得: } (3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 \text{---6 分}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2} \text{-----7 分}$$

$$\therefore k_{MP} + k_{MQ} = \frac{y_1}{x_1+4} + \frac{y_2}{x_2+4} = \frac{k(x_1+1)}{x_1+4} + \frac{k(x_2+1)}{x_2+4} \text{-----9 分}$$

$$= \frac{k(x_1+1)(x_2+4) + k(x_2+1)(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}$$

$$= \frac{2kx_1x_2 + 5k(x_1+x_2) + 8k}{(x_1+4)(x_2+4)}$$

$$= \frac{2k \cdot \frac{4k^2-12}{3+4k^2} + 5k \cdot \frac{-8k^2}{3+4k^2} + 8k}{(x_1+4)(x_2+4)} = 0$$

$$\therefore \angle PMF = \angle QMF \text{-----12 分}$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} |MF| |MP| \sin \angle PMF, S_2 = \frac{1}{2} |MF| |MQ| \sin \angle QMF$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{|MP|}{|MQ|} \text{-----14 分}$$

方法二：依题意可设直线 l 的方程为： $x = my - 1$ ，并设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 。—5 分

$$\text{联立方程组} \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{消去 } x, \text{ 得 } (3m^2+4)y^2 - 6my - 9 = 0 \text{-----6 分}$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2 = \frac{-9}{3m^2+4} \text{-----7 分}$$

$$\therefore k_{MP} + k_{MQ} = \frac{y_1}{x_1+4} + \frac{y_2}{x_2+4} = \frac{y_1}{my_1+3} + \frac{y_2}{my_2+3} \text{-----9 分}$$

$$= \frac{y_1(my_2 + 3) + y_2(my_1 + 3)}{(my_1 + 3)(my_2 + 3)}$$

$$= \frac{2my_1y_2 + 3(y_1 + y_2)}{(my_1 + 3)(my_2 + 3)}$$

$$= \frac{2m \cdot \frac{-9}{3m^2 + 4} + 3 \times \frac{6m}{3m^2 + 4}}{(my_1 + 3)(my_2 + 3)} = 0$$

$\therefore \angle PMF = \angle QMF$ -----12 分

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} |MF| |MP| \sin \angle PMF, \quad S_2 = \frac{1}{2} |MF| |MQ| \sin \angle QMF$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{|MP|}{|MQ|} \text{ -----14 分}$$

20.

(I) 解 :
 $B_4 : 5, -1, 4, 3.$ 3

分

(II) 证明: 对于数列 A_n 及其“陪伴数列” B_n ,

因为 $b_1 = a_9$,

$$b_1 + b_2 = a_1 + a_2,$$

$$b_2 + b_3 = a_2 + a_3,$$

.....

$$b_8 + b_9 = a_8 + a_9,$$

将上述几个等式中的第 2, 4, 6, 8, 这 4 个式子都乘以 -1 ,

相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \cdots + (b_8 + b_9) = a_9 - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \cdots + (a_8 + a_9)$$

$$\text{即 } b_9 = a_9 - a_1 + a_9 = 2a_9 - a_1$$

$$\text{故 } 2a_9 = b_9 + a_1$$

所以 b_9, a_9, a_1 成等差数列 .

.....8 分

(III) 证明: 因为 $b_1 = a_n$,

$$b_1 + b_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$b_2 + b_3 = a_2 + a_3 ,$$

.....

$$b_{n-1} + b_n = a_{n-1} + a_n ,$$

由于 n 为偶数, 将上述 n 个等式中的第 $2, 4, 6, \dots, n$ 这 $\frac{n}{2}$ 个式子都

乘以 -1 , 相加得

$$b_1 - (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) - \dots - (b_{n-1} + b_n) = a_n - (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) - \dots - (a_{n-1} + a_n)$$

$$\text{即} \quad -b_n = -a_1 ,$$

$$b_n = a_1 . \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980