

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试（理工类）

2017.3

（考试时间：120 分钟 满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{0, 1\}$

B. $\{-1, 0, 1\}$

C. $\{-1, 0, 1, 2\}$

D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则 $2x + y$ 的最大值为 ()

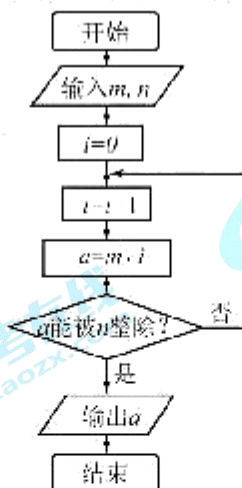
A. 0

B. 3

C. 4

D. 5

3. 执行如图所示的程序框图，若输入 $m = 4, n = 6$, 则输出 $a =$ ()



A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

4. 给出如下命题：

①若 “ $p \wedge q$ ” 为假命题，则 p, q 均为假命题；

②在 $\triangle ABC$ 中，“ $A > B$ ” 是 “ $\sin A > \sin B$ ” 的充要条件；

③ $(1+x)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项是第五项。

其中正确的是 ()

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ①②③

5. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，准线为 l ， P 为抛物线上一点， $PA \perp l$ ， A 为垂足。若直

线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$ ，则 $|PF| =$ ()

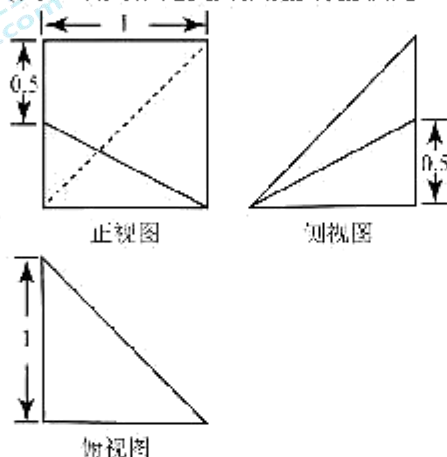
- A. $4\sqrt{3}$ B. 6 C. 8 D. 16

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_4 x|, & 0 < x \leq 4, \\ x^2 - 10x + 25, & x > 4. \end{cases}$ 若 a, b, c, d 是互不相同的正数，

且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$ ，则 $abcd$ 的取值范围是 ()

- A. (24, 25) B. (18, 24) C. (21, 24) D. (18, 25)

7. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的底面的面积是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 现有 10 支队伍参加篮球比赛，规定：比赛采取单循环比赛制，即每支队伍与其他 9 支队伍各比赛一场；每场比赛中，胜方得 2 分，负方得 0 分，平局双方各得 1 分。下面关于这 10 支队伍得分的叙述正确的是 ()

- A. 可能有两支队伍得分都是 18 分 B. 各支队伍得分总和为 180 分
C. 各支队伍中最高得分不少于 10 分 D. 得偶数分的队伍必有偶数个

第 II 卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。）

9. 复数 $\frac{1+i}{i}$ 在复平面内对应的点的坐标是_____。

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $BC = 3$ ， $AB = \sqrt{6}$ ，则 $\angle C =$ _____。

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， S_n 为其前 n 项和。若 $S_5 = 51$ ， $a_1 + a_9 = 26$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的公差

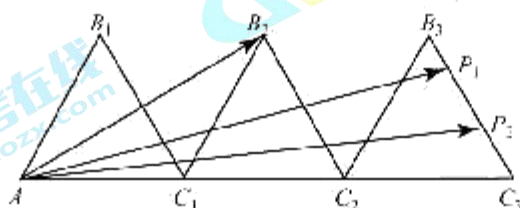
12. 在极坐标系中，直线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ，若以极点为原点，极轴为 x

轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy ，则直线 C_1 的直角坐标方程为_____；曲线

C_2 的方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ (t 为参数)，则 C_2 被 C_1 截得的弦长为_____.

13. 如图， $\triangle AB_1C_1$ ， $\triangle C_1B_2C_2$ ， $\triangle C_2B_3C_3$ 是三个边长为 2 的等边三角形，且有一条边在同一

直线上，边 B_3C_3 上有 2 个不同的点 P_1 ， P_2 ，则 $\overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) =$ _____.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中，动点 $P(x, y)$ 到两坐标轴的距离之和等于它到定点 $(1, 1)$ 的

距离，记点 P 的轨迹为 C ，给出下面四个结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 关于直线 $y = x$ 对称；

③点 $(-a^2, 1)$ ($a \in \mathbb{R}$) 在曲线 C 上；

④在第一象限内，曲线 C 与 x 轴的非负半轴、 y 轴的非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本大题 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\cos \omega x - \sqrt{3} \sin \omega x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$.

(I) 求 ω 的值；

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

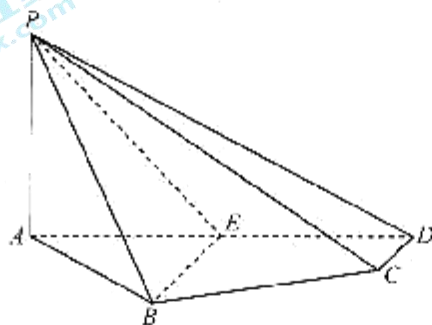
16. (本小题满分 13 分)

某单位共有员工 45 人，其中男员工 27 人，女员工 18 人。上级部门为了对该单位员工的工作业绩进行评估，采用按性别分层抽样的方法抽取 5 名员工进行考核。

- (I) 求抽取的 5 人中男、女员工的人数分别是多少？
 (II) 考核前，评估小组从抽取的 5 名员工中，随机选出 3 人进行访谈，设选出的 3 人中男员工人数为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望；
 (III) 考核分笔试和答辩两项，5 名员工的笔试成绩分别为 78, 85, 89, 92, 96；结合答辩情况，他们的考核成绩分别为 95, 88, 102, 106, 99。这 5 名员工笔试成绩与考核成绩的方差分别记为 s_1^2, s_2^2 ，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小。(只需写出结论)

17. (本小题满分 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 为 AD 的中点， $PA \perp AD$ ， $BE \parallel CD$ ， $BE \perp AD$ ， $PA = AE = BE = 2$ ， $CD = 1$ 。



- (I) 求证：平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ；
 (II) 求二面角 $C-PB-E$ 的余弦值；
 (III) 在线段 PE 上是否存在点 M ，使得 $DM \parallel$ 平面 PBC ？若存在，求出点 M 的位置；若不存在，说明理由。

18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax - 1 (a \in \mathbb{R})$ ， $g(x) = xf'(x) + \frac{1}{2}x^2 + 2x$ 。

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间；
 (II) 当 $a=1$ 时，若函数 $g(x)$ 在区间 $(m, m+1) (m \in \mathbb{Z})$ 内存在唯一的极值点，求 m 的值。

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$. 直线 $l: x = my + 1$ 与 x 轴交于点 A , 与

椭圆 C 相交于 E, F 两点. 自点 E, F 分别向直线 $x = 3$ 作垂线, 垂足分别为 E_1, F_1 .

(I) 求椭圆 C 的方程及焦点坐标;

(II) 记 $\triangle AEE_1, \triangle AE_1F_1, \triangle AFF_1$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 试证明 $\frac{S_1 S_3}{S_2^2}$ 为定值.

20. (本小题满分 13 分)

对于正整数集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3)$, 如果去掉其中任意一个元素

$a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 之后, 剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合,

且这两个集合的所有元素之和相等, 就称集合 A 为“和谐集”.

(I) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 是否是“和谐集”(不必写过程);

(II) 求证: 若集合 A 是“和谐集”, 则集合 A 中元素个数为奇数;

(III) 若集合 A 是“和谐集”, 求集合 A 中元素个数的最小值.



扫描二维码, 关注北京高考官方微信!

查看更多北京高考相关资讯!

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习解析

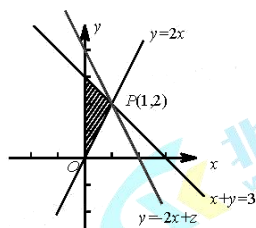
学而思高考研究中心

1. B

【解析】由题意知 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 2\} = \{-1, 0, 1\}$,
所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$

2. C

【解析】由已知条件可得可行域如图阴影区域, 设目标函数为 $z = 2x + y$, 易知, 当目标函数过 $P(1, 2)$ 点时, z 取得最大值为 4.



3. C

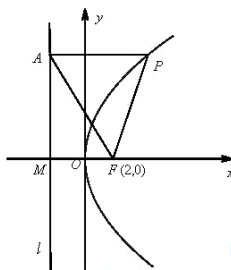
【解析】Step 1: $i=1, a=4, n=6$, a 不能被 n 整除, 继续循环;
Step 2: $i=2, a=8, n=6$, a 不能被 n 整除, 继续循环;
Step 3: $i=3, a=12, n=6$, a 能被 n 整除, 循环结束, 输出 $a=12$.

4. B

【解析】(1) 当 p 为真, q 为假时, 此时“ $p \wedge q$ ”为假, 故①错;
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由“大边对大角, 大角对大边”和“ $A > B$ ”是“ $a > b$ ”的充要条件, 再由正弦定理知“ $a > b$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充要条件, 所以“ $A > B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充要条件故②正确;
(3) $(1+x)^9$ 的展开式中二项式系数最大时为 C_9^4 , 即第五项, 故③正确

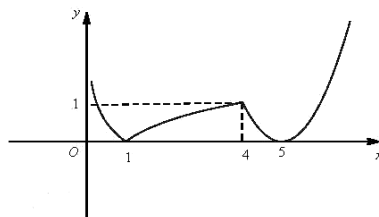
5. C

【解析】如图, 记 l 与 x 轴交点为 M , 易知 $|AM| = \sqrt{3}|MF| = 4\sqrt{3}$,
设 P 点坐标为 $(x, 4\sqrt{3})$, 代入抛物线方程 $y^2 = 8x$ 得
 $8x = (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 6$, 所以 $|PF| = |PA| = 8$



6. A

【解析】 $f(x)$ 大致图象如图所示：



a, b, c, d 互不相等，不妨设 $a < b < c < d$ ，

由图象易知 $0 < a < 1 < b < 4 < c < 5 < d$ ，

又 $\because |\log_4 a| = |\log_4 b|$ ， $\therefore -\log_4 a = \log_4 b$ ，

$\therefore \log_4 ab = 0, ab = 1$ ，

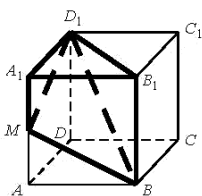
同时易知 c, d 关于 $x = 5$ 对称， $\therefore c + d = 10, c \in (4, 5)$ ， $c \cdot d = c(10 - c)$ ，

当 $c \in (4, 5)$ 时， $c(10 - c) \in (24, 25)$

$\therefore abcd \in (24, 25)$

7. D

【解析】 由三视图可得直观图如图所示：



该四棱锥 $D_1-A_1B_1BM$ 可由边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截得，其中 M 为 AA_1

中点，所以梯形 A_1B_1BM 为底面，其面积为 $S_{\text{梯形}A_1B_1BM} = \frac{1}{2}(0.5+1) \times 1 = \frac{3}{4}$

8. D

【解析】 若存在两支队伍都是 18 分，则需要两支队伍全胜，显然不可能有两支队伍全胜。

A 错；每场比赛产生的分数为不变量：2。各支队伍总得分为产生的分数总和：

$2C_{10}^2 = 90$ 。B 错；如果所有比赛均平局，所有队伍均得 9 分，C 错；假设得分为偶

数的队伍有奇数支，因为队伍总数为 10，所以得分为奇数的队伍也为奇数支，那么

总得分必是奇数，这与总得分 90 矛盾，所以得分为偶数的队伍一定为偶数支，故

选 D。

9. (1, -1)

【解析】 $\because \frac{1+i}{i} = 1-i$ ， $\therefore$ 对应点的坐标为 (1, -1)

10. $\frac{\pi}{4}$

【解析】由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$, 即 $\frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle C = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$,

又 $\because BC > AB$, $\therefore \angle A > \angle C$, $\therefore \angle C = \frac{\pi}{4}$

11. $d=3$; $a_n=3n-2$

【解析】 $\because a_1+a_5=26$, $\therefore a_3=13$, 又 $\because S_5=51$, 即 $3(a_2+a_4)=51$, 即 $a_2+a_4=17$, $\therefore a_2=4$,

$\therefore d = \frac{a_3-a_2}{3} = 3$, $a_n = 3n-2$

12. $x+y-2=0$; $\sqrt{2}$

【解析】 $\because \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \rho \cos \theta = \sqrt{2}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = \sqrt{2}$,

$\therefore C_1$ 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$; 曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$,

由圆心 $(0, 1)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离 $d = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得, 弦长为 $\sqrt{2}$

13. 36

【解析】过 B_1 向 AC_3 作垂线, 垂足为 D , $\because AD=3$, $B_1D=\sqrt{3}$, $\therefore AB_1=2\sqrt{3}$, $\angle B_1AC_2=30^\circ$,

又 $\because \angle B_2C_2A=60^\circ$, $\therefore AB_2 \perp B_2C_2$, 又 $\because B_2C_2 \parallel B_3C_3$, $\therefore AB_2 \perp B_3C_3$,

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}) &= \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AP_2} = \overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{C_3P_1}) + \overrightarrow{AB_2} \cdot (\overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{C_3P_2}) \\ &= \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{C_3P_1} + \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AC_3} + \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{C_3P_2} = 2\overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AC_3} \\ &= 2|\overrightarrow{AB_2}| \times |\overrightarrow{AC_3}| \times \cos 30^\circ = 36 \end{aligned}$$

14. ②③④

【解析】由题意, 点 $P(x, y)$ 满足:

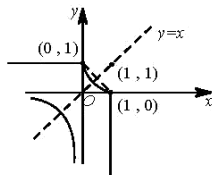
$$|x| + |y| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$\therefore |xy| + x + y - 1 = 0$$

$$xy \geq 0 \text{ 时, } (x+1)(y+1) = 2$$

$$xy < 0 \text{ 时, } (y-1)(x-1) = 0$$

则 $P(x, y)$ 轨迹图象如下:



故选 ②③④.

15.

【解析】(1) $f(x) = \sin \omega x (\cos \omega x - \sqrt{3} \sin \omega x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sin \omega x \cos \omega x - \sqrt{3} \sin^2 \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\omega x - \sqrt{3} \left(\frac{1 - \cos 2\omega x}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x$$

$$= \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$\because \omega > 0, T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}.$

$\therefore \omega = 2$

(2) 由(1)知 $f(x) = \sin \left(4x + \frac{\pi}{3} \right)$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 4x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \leq x \leq \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}, \frac{k\pi}{2} + \frac{7\pi}{24} \right], k \in \mathbb{Z}.$

16.

【解析】(1) 设抽取的 5 人中男、女员工的人数分别为 m, n .

$$\frac{m}{27} = \frac{n}{18} = \frac{5}{45}, \text{ 解得 } m=3, n=2.$$

即抽取的 5 人中男员工 3 人, 女员工 2 人.

(2) 男员工人数 X 的可取值为 1, 2, 3

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^4}{C_5^5} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^3}{C_5^5} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_2^2}{C_5^5} = \frac{1}{10}$$

X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$$

(3) $S_1^2 = S_2^2.$

17.

【解析】(1) $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 且 $PA \perp AD$

$$\therefore PA \perp \text{平面 } ABCD, \text{ 又 } CD \subset \text{平面 } ABCD$$
$$\therefore PA \perp CD,$$

又 $\because BE \perp AD, BE \parallel CD,$

$$\therefore CD \perp AD,$$
$$\because PA \cap AD = A, \therefore CD \perp \text{平面 } PAD$$

又 $CD \subset \text{平面 } PCD$,

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 PCD .

(2)以 A 为坐标原点, 过点 A 且平行于 BE 的直线为 x 轴, AD 为 y 轴, AP 为 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(2, 2, 0)$, $C(1, 4, 0)$, $D(0, 4, 0)$,

$$E(0, 2, 0) \quad , \quad P(0, 0, 2)$$
$$\overrightarrow{PB} = (2, 2, -2) \quad , \quad \overrightarrow{EB} = (2, 0, 0) \quad , \quad \overrightarrow{BC} = (-1, 2, 0) \quad ,$$

设平面 BPE 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

平面 BPC 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

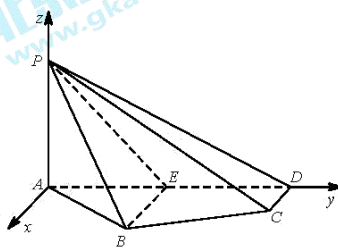
$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases},$$

令 $y_1 = 1$, 得 $\vec{n} = (0, 1, 1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ -x_1 + 2y_2 = 0 \end{cases},$$

令 $y_2 = 1$, 得 $\vec{n}_2 = (2, 1, 3)$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{2} \times \sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{7}}{7};$$



(3) 假设存在点 M 使得 $DM \parallel$ 平面 PBC , 不妨设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PE}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

$\because \overrightarrow{PE} = (0, 2, -2)$ 则 $\overrightarrow{PM} = (0, 2\lambda, -2\lambda)$,

$$\because P(0,0,2), \therefore M \text{ 的坐标为 } (0, 2\lambda, -2\lambda+2)$$

又 D 的坐标为 $(0, 4, 0)$, 所以 $\overrightarrow{DM} = (0, 2\lambda - 4, -2\lambda + 2)$,

$$\vec{n}_2 = (2, 1, 3), \quad \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DM} = 2\lambda - 4 + 3(-2\lambda + 2) = 0, \quad \text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}$$

所以存在点 M 使得 $DM \parallel$ 平面 PBC 成立.

18.

【解析】 (1) $f(x) = \ln x - ax - 1 (x > 0)$

$$f'(x) = \frac{1-ax}{x}$$

当 $a=0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{x}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减

综上所述: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减

$$(2) g(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 + x$$

令 $h(x) = g'(x) = \ln x - x + 2$ 在 $(m, m+1)$ 有唯一零点

$$h'(x) = \frac{1-x}{x},$$

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	极大值1	$\searrow$

$h(3) = \ln 3 - 1 > 0$; $h(4) = \ln 4 - 2 < 0$, $h(e^{-2}) = -\frac{1}{e^2}$,由此可知 $h(x)$ 的零点在 $(0,1)$ 和 $(3,4)$ 之间各有一个, 因此 $m=0$ 或 $m=3$.

19.

【解析】(1) $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-1}{a^2} = \frac{2}{3}$, 解得 $a^2 = 3$, $c^2 = 2$

因此椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, 焦点坐标为 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

(2) 直线 $x = my + 1$ 上, $y = 0$ 时, $x = 1$, A 坐标为 $(1, 0)$

设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, 联立直线与椭圆方程

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}, \text{整理得 } (m^2 + 3)y^2 + 2my - 2 = 0$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2 + 3}$$

$$\text{如图所示, } S_1 = \frac{1}{2} |EE_1| |y_1| = \frac{1}{2} (3 - x_1) |y_1|, S_2 = \frac{1}{2} |FF_1| |y_2| = \frac{1}{2} (3 - x_2) |y_2|$$

$$S_1 S_2 = \frac{1}{4} (3 - x_1)(3 - x_2) |y_1 y_2| = \frac{1}{4} [9 - 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2] |y_1 y_2|$$

$$\because x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2, x_1 x_2 = m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1$$

$$\therefore S_1 S_2 = \frac{1}{4} [9 - 3m(y_1 + y_2) - 6 + m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1] |y_1 y_2|$$

$$= \frac{1}{4} [m^2 y_1 y_2 - 2m(y_1 + y_2) + 4] |y_1 y_2|$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{-2m^2}{m^2 + 3} - 2m \cdot \frac{-2m}{m^2 + 3} + 4 \right) \cdot \frac{2}{m^2 + 3}$$

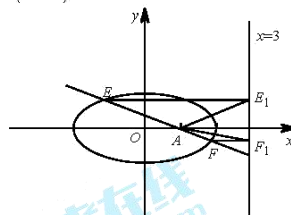
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{6m^2 + 12}{m^2 + 3} \cdot \frac{2}{m^2 + 3}$$

$$= \frac{3(m^2 + 2)}{(m^2 + 3)^2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2|$$

$$S_2^2 = (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \left(\frac{-2m}{m^2 + 3} \right)^2 - \frac{-8}{m^2 + 3} = \frac{12(m^2 + 2)}{(m^2 + 3)^2}$$

$$\therefore \frac{S_1 S_2}{S_2^2} = \frac{1}{4}$$



20.

【解析】(1) 不是. 比如去掉 2, 剩下的数的和是奇数, 不可能分成和相等的两部分.

(2) 因为去掉 a_i 后, 剩下的元素的和是偶数, 所以 A 中的元素的和的奇偶性与 a_i 相同, $i = 1, 2, \dots, n$.

这说明, A 中所有的元素的奇偶性一样.

若 A 中所有的元素都是偶数, 将所有的数都除以 2, 新的 n 个数构成集合 A' , 显然 A' 也是“和谐集”. 持续这一过程, 直到所得的集合中都是奇数, 此时得到的这个集合也是“和谐集”. 所以不妨设 A 中所有的元素都是奇数.

去掉 a_i 后, 剩下的 $n-1$ 个奇数可以分成和相等的两部分, 则 $n-1$ 必须是偶数, 所以 n 是奇数.

(3) A 中元素个数的最小值为 7.

由(2)知, A 中元素的个数是奇数, 不妨设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

若 $n = 3$, 去掉 a_1 后, 剩下的 a_2 和 a_3 不可能分成和相等的两部分, $n = 3$ 不成立.

若 $n = 5$, 去掉 a_1 后, 剩下的可以分成和相等的两部分, 有两种情况:

① $a_5 = a_2 + a_3 + a_4$, 考虑去掉 a_2 , 因为 $a_5 > a_1 + a_3 + a_4$, 所以剩下的 4 个数不可能分成和相等的两部分;

② $a_5 + a_2 = a_3 + a_4$, 考虑去掉 a_2 , 因为 $a_5 < a_1 + a_3 + a_4$, $a_5 + a_1 < a_3 + a_4$, $a_5 + a_3 > a_1 + a_4$, 所以剩下的数不能分成和相等的两部分.

因此, $n = 5$ 不成立, $n \geq 7$.

当 $n = 7$ 时, 设 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, 不难验证 A 是“和谐集”.

综上, 集合 A 中元素个数的最小值为 7.