

北京市第十三中学 2022~2023 学年第一学期

高三数学 12 月月考测试

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，第I卷第1页至第2页；第II卷第2页至第5页，答题纸第1页至第4页。共150分，考试时间120分钟。请在答题纸第1页上方密封线内书写班级、姓名、准考证号。考试结束后，将本试卷的答题纸按页码顺序整理一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

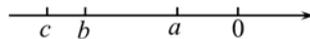
一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

1. 下列函数中，定义域与值域均为 \mathbf{R} 的是

- A. $y = \ln x$ B. $y = e^x$ C. $y = x^3$ D. $y = \frac{1}{x}$

2. 已知实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是

- A. $b - a < c + a$ B. $c^2 < ab$
C. $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$ D. $|b|c < |a|c$



3. 若向量 a, b 满足 $|a| = 3, |a - b| = 5, a \cdot b = 1$ ，则 $|b| =$

- A. $\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 3

4. 已知 $2^a = 5, \log_8 3 = b$ ，则 $4^{a-3b} =$

- A. 25 B. 5 C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

5. 已知向量 $\overrightarrow{OP} = (3, 4)$ ，将向量 \overrightarrow{OP} 绕原点 O 逆时针方向旋转 45° 到 $\overrightarrow{OP'}$ 的位置，则点 $P'(x', y')$ 的坐标为

- A. $(-4, 3)$ B. $(-3, 4)$ C. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为2，则

C 的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 已知点 $A(2, 0), B(0, -2)$ 。若点 P 在函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象上，则使得 $\triangle PAB$ 的面积为2的点 P 的个数为

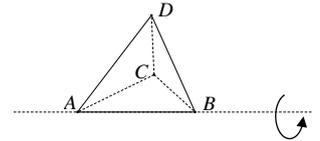
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，则“ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数”是“任意 $a > 0$ ， $y = f(x+a) - f(x)$ 无零点”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 如图，已知四面体 $ABCD$ 的棱 $AB \parallel$ 平面 α ，且 $AB = \sqrt{2}$ ，其余的棱长均为 1. 四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度，且四面体 $ABCD$ 始终在水平放置的平面 α 的上方. 如果将四面体 $ABCD$ 在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数，记为 $S(x)$ ，则函数 $S(x)$ 的最小正周期与 $S(x)$ 的最小值分别为

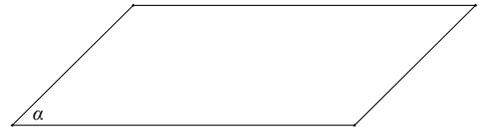
- A. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. π , $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 2π , $\frac{1}{2}$ D. π , $\frac{\sqrt{2}}{4}$



10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ 2x + a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式

$f(x) \geq \frac{a}{2}$ 在 \mathbf{R} 上恒成立，则实数 a 的取值范围为

- A. $[0, \frac{3}{2}]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, 2\sqrt{e}]$ D. $(-\infty, 2\sqrt{e}]$



第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 (共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分)

11. i 是虚数单位，复数 $\frac{9+2i}{2+i}$ 的虚部为_____.

12. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，面积为 $\sqrt{3}$ ， $B = 60^\circ$ ， $a^2 + c^2 = 3ac$ ，则 $b =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = |2^x - a| - 1$ 的值域为 $[-1, +\infty)$ ，则实数 a 的一个取值可为_____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq a, \\ \log_3 x, & x > a, \end{cases}$ 其中 $a > 0$.

- ① 若 $a = 3$ ，则 $f[f(9)] =$ _____；
② 若函数 $y = f(x) - 2$ 有两个零点，则 a 的取值范围是_____.

15. 配件厂计划为某项工程生产一种配件，这种配件每天的需求量是 100 件. 由于生产这种配件时其他生产设备必须停机，并且每次生产时都需要花费 3600 元的准备费，所以需要周期性生产这种配件，即在一天内生产出这种配件，以满足从这天起连续 n 天的需求，称 n 为生产周期 (假设这种配件每天产能可以足够大). 配件的存储费为每件每天 2 元 (当天生产出的配件不需要支付存储费，从第二天开始付存储费). 在长期的生产活动中，为使每个生产周期内每天平均的总费用最少，那么生产周期 n 为_____.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）。

16.（本小题满分 13 分）

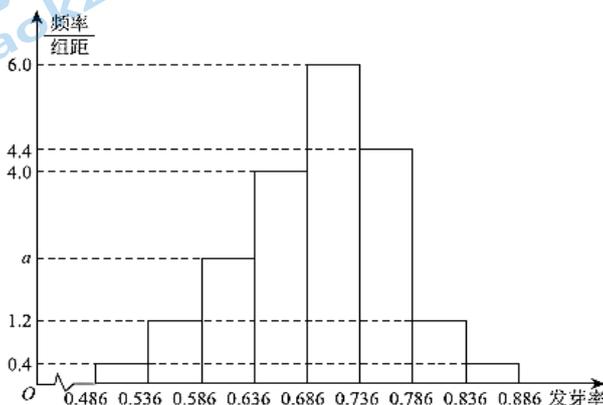
已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \sqrt{3} \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(II) 设 $\alpha > 0$, 若函数 $g(x) = f(x + \alpha)$ 为奇函数, 求 α 的最小值.

17.（本小题满分 15 分）

某花卉企业引进了数百种不同品种的康乃馨, 通过试验田培育, 得到了这些康乃馨种子在当地环境下的发芽率, 并按发芽率分为 8 组: $[0.486, 0.536)$, $[0.536, 0.586)$, \dots , $[0.836, 0.886)$ 加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图.



企业对康乃馨的种子进行分级, 将发芽率不低于 0.736 的种子定为“**A 级**”, 发芽率低于 0.736 但不低于 0.636 的种子定为“**B 级**”, 发芽率低于 0.636 的种子定为“**C 级**”.

(I) 现从这些康乃馨种子中随机抽取一种, 估计该种子不是“**C 级**”种子的概率;

(II) 该花卉企业销售花种, 且每份“**A 级**”、“**B 级**”、“**C 级**”康乃馨种子的售价分别为 20 元、15 元、10 元. 某人在市场上随机购买了该企业销售的康乃馨种子两份, 共花费 X 元, 以频率为概率, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 企业改进了花卉培育技术, 使得每种康乃馨种子的发芽率提高到原来的 1.1 倍, 那么对于这些康乃馨的种子, 与旧的发芽率数据的方差相比, 技术改进后发芽率数据的方差是否发生变化? 若发生变化, 是变大了还是变小了? (结论不需要证明).

18. (本小题满分 15 分)

如图, 在几何体 $ABCDEF$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 是正方形, 平面 BAE 和平面 CDE 交于 EF .

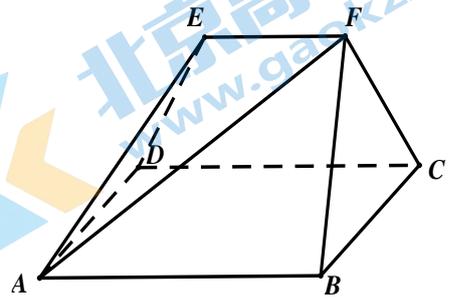
(I) 求证: $AB \parallel EF$;

(II) 若 $AB=4$, $EF=2$, $ED=FC$, $AF=3\sqrt{3}$, 再从条件①, 条件②, 条件③中选择一个作为已知, 使得几何体 $ABCDEF$ 存在, 并求二面角 $B-AE-D$ 的余弦值.

条件①: 平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$;

条件②: 平面 $CBF \perp$ 平面 $ABCD$.

条件③: $BF \perp FC$, $AF \perp FC$;



19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 已知直线 $y = m$ 与椭圆 C 有两个不同的交点 M, N , 设 D 为直线 AN 上一点, 且直线 BD, BM 的斜率的积为 $-\frac{1}{4}$. 证明: 点 D 在 x 轴上.

20. (本小题满分 15 分)

设函数 $f(x) = x(x^2 - 3x + a)$, $a \in \mathbb{R}$

(I) 当 $a = -9$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上为减函数, 求 a 的取值范围;

(III) 若函数在区间 $(0, 2)$ 内存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $|f(x_1) - f(x_2)| > |f(x_1) + f(x_2)|$, 求 a 的取值范围.

21. (本小题满分 13 分)

已知数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 满足 $a_i \in \mathbb{N}^*$ 且 $1 \leq a_i \leq i (i = 1, 2, \dots, n)$, 数列 $B: b_1, b_2, \dots, b_n (n \geq 2)$ 满足 $b_i = \tau(a_i) + 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 其中 $\tau(a_1) = 0$, $\tau(a_i) (i = 2, 3, \dots, n)$ 表示 a_1, a_2, \dots, a_{i-1} 中与 a_i 不等的项的个数.

(I) 数列 $A: 1, 1, 2, 3, 4$, 请直接写出相应的数列 B ;

(II) 证明: $b_i \geq a_i (i = 1, 2, \dots, n)$;

(III) 若数列 A 相邻两项均不等, B 与 A 为同一个数列, 证明: $a_i = i (i = 1, 2, \dots, n)$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯