海淀区 2020-2021 学年第一学期期末考试

高三数学试题

本试卷共 8 页，150 分。考试时常 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）抛物线 $y^2 = x$ 的准线方程是

（A）$x = -\frac{1}{2}$ （B）$x = -\frac{1}{4}$ （C）$y = -\frac{1}{2}$ （D）$y = -\frac{1}{4}$

（2）在复平面内，复数 $\frac{i}{1+i}$ 对应的点位于

（A）第一象限 （B）第二象限 （C）第三象限 （D）第四象限

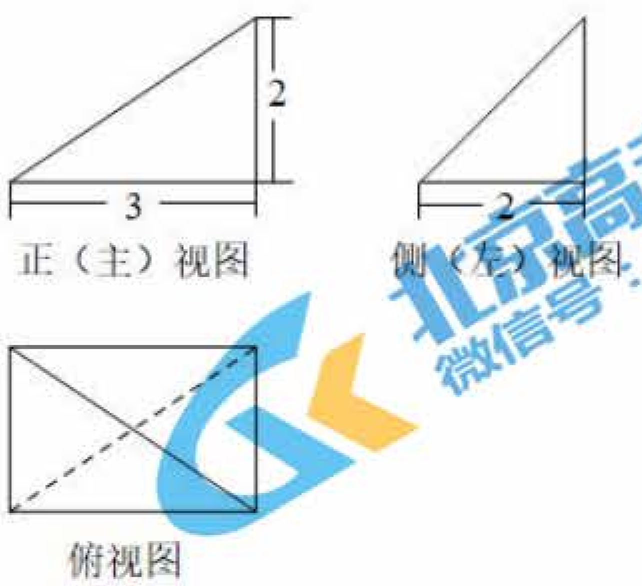
（3）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^4 的系数为

（A）5 （B）-5 （C）10 （D）10

（4）已知直线 $l: x + ay + 2 = 0$，点 A $(-1,-1)$ 和点 B $(2,2)$，若 $l // AB$，则实数 a 的值为

（A）1 （B）-1 （C）2 （D）-2

（5）某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的体积为



（A）2 （B）4 （C）6 （D）12

（6）已知向量 a，b 满足 $|a| = 1$，$b = (-2,1)$，且 $|a-b| = 2$，则 $a \cdot b =$

（A）-1 （B）0 （C）1 （D）2

（7）已知α，β是两个不同的平面，“$\alpha /\!/ \beta$”的一个充分条件是

（A）α 内有无数直线平行于β

（B）存在平面γ，$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$

（C）存在平面γ，$\alpha \cap \gamma = m$，$\beta \cap \gamma = n$ 且 $m /\!/ n$

（D）存在直线l，$l \perp \alpha$，$l \perp \beta$

（8）已知函数 $f(x)=1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$ 则

（A）$f(x)$ 是偶函数

（B）函数 $f(x)$ 的最小正周期为2π

（C）曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称

（D）$f(1)>f(2)$

（9）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-3n$，$n\in N$，前n项和为S_n，给出

下列三个结论：

①存在正整数$m,n(m\neq n)$，使得$S_m=S_n$；

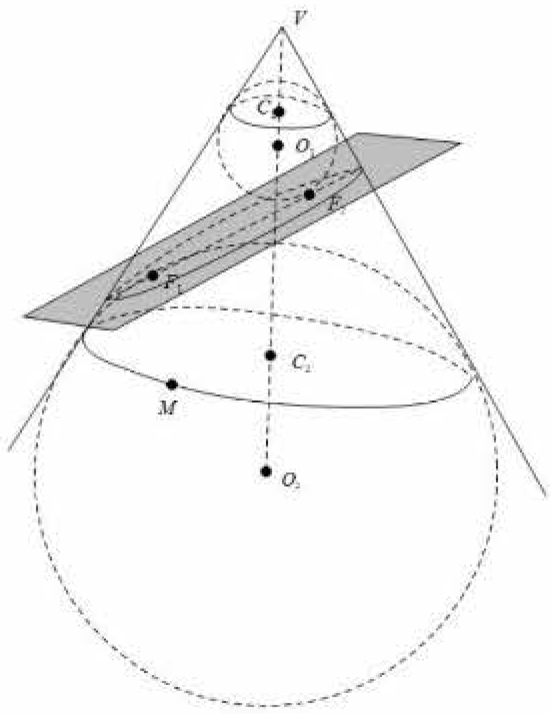
②存在正整数$m,n(m\neq n)$，使得$a_m+a_n=2\sqrt{a_m a_n}$；

③记，$T_n=a_1a_2\cdots a_n(1,2,3,\ldots)$ 则数列$\{T_n\}$有最小项，其中所有正

确结论的序号是

（A）①　（B）③　（C）①③　（D）①②③

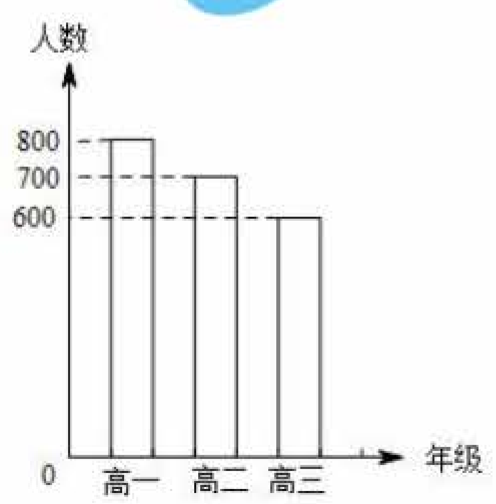
（10）如图所示，在圆锥内放入连个球O_1，O_2，它们都与圆锥相切（即与圆锥的每条母线相切），切点圆（图中粗线所示）分别为$\odot C_1$,$\odot C_2$. 这两个球都与平面a相切，切点分别为F_1，F_2，丹德林（G·Dandelin）利用这个模型证明了平面a与圆锥侧面的交线为椭圆，F_1，F_2为此椭圆的两个焦点，这两个球也称为 Dandelin 双球。若圆锥的母线与它的轴的夹角为30^0，$\odot C_1$, $\odot C_2$的半径分别为 1,4，点M为$\odot C_2$上的一个定点，点P为椭圆上的一个动点，则从点P沿圆锥表面到达M的路线长与线段PF_1的长之和的最小值是



（A）6　　　（B）8　　　（C）$3\sqrt{3}$　　　（D）$4\sqrt{3}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

（11）在“互联网+”时代，国家积极推动信息化技术与传统教学方式的深度融合，实现线上、线下融合式教学模式变革.某校高一、高二和高三学生人数如图所示.采用分层抽样的方法调查融合式教学模式的实施情况，在抽取样本中，高一学生有 16 人，则该样本中的高三学生人数为____.



（12）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.若$-S_1$、S_2、a_3成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比为____.

（13）已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$的左右焦点分别为F_1,F_2，点$M(-3,4)$，则双曲线的渐近线方程为_____；

$|MF_1|-|MF_2|=$____；

（14）已知函数$f(x)$是定义域R的奇函数，且$x\le 0$时，$f(x)=ae^x-1$，则$a=$____，$f(x)$的值域是____；

（15）已知圆$P:(x-5)^2+(y-2)^2=2$，直线$l:y=ax$，点$M(5,2+\sqrt{2})$，点$A(s,t)$.

给出下列 4 个结论：

①当$a=0$，直线l与圆P相离；

②若直线l圆P的一条对称轴，则$a=\dfrac{2}{5}$；

③若直线l上存在点A，圆P上存在点N，使得$\angle MAN=90°$，则a的最大值为$\dfrac{20}{21}$；

④ N 为圆 P 上的一动点，若 $\angle MAN=90^\circ$，则 t 的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}+8}{4}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

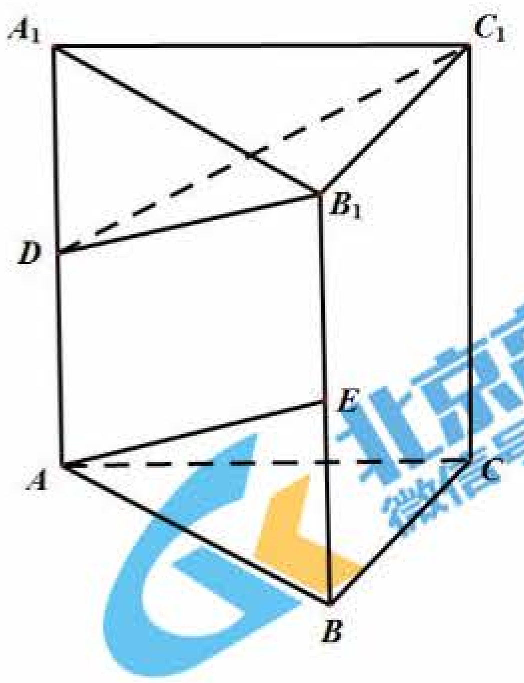
（16）（本小题共 15 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为矩形，$AC\perp$ 平面BCC_1B_1，D,E 分别是棱 AA_1，BB_1 的中点.

（Ⅰ）求证：$AE//$ 平面B_1C_1D

（Ⅱ）求证: $CC_1\perp$ 平面ABC

(Ⅲ)若 $AC=BC=AA_1=2$,求直线 AB 与平面B_1C_1D 所成角的正弦值.



（17）（本小题共 14 分）

若存在 ΔABC 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解答下列问题：

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）求 $\cos B$ 和 a 的值.

条件①：$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$；

条件②：$a=\dfrac{7}{3}c$；

条件③：$b-a=1$；

条件④：$b\cos A=-\dfrac{5}{2}$

（18）（本小题共 14 分）

某公司在 2013~2021 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示：

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年生产台数（单位：万台）	3	4	5	6	6	9	10	10	a
年返修台数（单位：台）	32	38	54	58	52	71	80	75	b
年利润（单位：百万元）	3.85	4.50	4.20	5.50	6.10	9.65	10.00	11.50	c

注：年返修率$=\dfrac{\text{年返修台数}}{\text{年生产台数}}$.

（Ⅰ）从 2013~2020 年中随机抽取一年，求该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率；

（Ⅱ）公司规定：若年返修率不超过千分之一，则该公司生产部门当年考核优秀.现从 2013~2020 年中随机选出 3 年，记 ζ 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数.求 ζ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记公司在 2013~2015 年，2016~2018 年，2019~2021 年的年生产台数的方差分别为 s_1^2,s_2^2,s_3^2.若 $s_3^2\le\max\{s_1^2,s_2^2\}$，其中 $\max\{s_1^2,s_2^2\}$ 表示 s_1^2,s_2^2，这两个数中最大的数.请写出 a 的最大值和最小值.（只需写出结论）

（注：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

（19）（本小题共 14 分）

已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 C $(2,\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的方程及其长轴长；

（Ⅱ）A，B 分别为椭圆 W 的左、右顶点，点 D 在椭圆 W 上，且位于 x 轴下方，直线 CD 交 x 轴于点 Q，若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$，求点 D 的坐标.

（20）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)-x$，求证：$g(x)\le -1$；

（Ⅲ）设 $h(x)=f(x)-x^2+2ax-4a^2+1$.若存在 x_0 使得 $h(x_0)\ge 0$，求 a 的最大值.

（21）（本小题共 14 分）

设 A 是由 $n\times n(n\ge 2)$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表，满足：每个数的绝对值是1，且所有数的和是非负数，则称数表 A 是“n 阶非负数表”.

（Ⅰ）判断如下数表 A_1，A_2 是否是“4 阶非负数表”；

1	1	-1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1

数表 A_1

-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1

数表 A_2

（Ⅱ）对于任意“5 阶非负数表”A，记 $R(s)$ 为 A 的第 s 行各数之和 $(1\le s\le 5)$，证明：存在 $\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，使得 $R(i)+R(j)+R(k)\ge 3$；

（Ⅲ）当 $n=2k(k\in \mathrm{N}^*)$ 时，证明：对与任意“n 阶非负数表”A，均存在 k 行 k 列，使得这 k 行 k 列交叉处的 k^2 个数之和不小于 k.

海淀区高三年级第一学期期末练习

数学参考答案

2021.1

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	A	D	B	A	C	D	C	C	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	（11）	（12）	（13）	（14）	（15）
答案	12	3 或 −1	$\sqrt{2}x \pm y = 0$ -2	1　$(-1,1)$	①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 15 分）

解：（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 // BB_1$，且 $AA_1 = BB_1$.

因为 点 D,E 分别是棱 AA_1,BB_1 的中点，

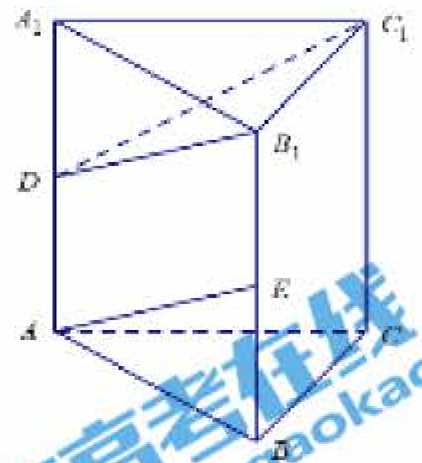
所以 $AD // B_1E$，且 $AD = B_1E$.

所以 四边形 AEB_1D 是平行四边形.

所以 $AE // DB_1$.

又因为 $AE \not\subset$ 平面 B_1C_1D，$DB_1 \subset$ 平面 B_1C_1D，

所以 $AE //$平面 B_1C_1D.



（Ⅱ）因为 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AC \perp CC_1$.

因为 侧面 BCC_1B_1 为矩形，

所以 $CC_1 \perp BC$.

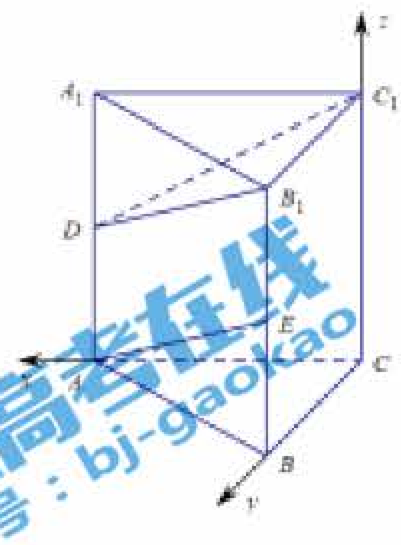
又因为 $AC \cap BC = C$，$AC \subset$ 平面 ABC，$BC \subset$ 平面 ABC，

所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC.

（Ⅲ）分别以 CA，CB，CC_1 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，由题意得 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(0,0,2)$，$D(2,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$，$\overrightarrow{C_1B_1} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{C_1D} = (2,0,-1)$.

设平面 B_1C_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则



$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2y=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=0$， $z=2$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 直线 AB 与平面 B_1C_1D 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（17）（本小题共 14 分）

选择①②③

解：（Ⅰ）因为 $a=\dfrac{7}{3}c$， $\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理得 $\sin A=\dfrac{a}{c}\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b-a=1$，

所以 $a<b$.

所以 $0<\angle A<\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中， $a=\dfrac{7}{3}c$，

所以 $a>c$.

所以 $0<\angle C<\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{13}{14}$.

所以 $\cos B=\cos(\pi-(A+C))=-\cos(A+C)$

$=\sin A\sin C-\cos A\cos C$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{14}=-\dfrac{1}{7}$.

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理得 $\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{b}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}$，即 $7b=8a$.

因为 $b-a=1$，

所以 $a=7$.

选择①②④

解：（Ⅰ）因为 $a=\frac{7}{3}c$， $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理得 $\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在△ABC 中，$b\cos A=-\frac{5}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{2}<\angle A<\pi$.

所以 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$.

（Ⅱ）在△ABC 中，$a=\frac{7}{3}c$，

所以 $a>c$.

所以 $0<\angle C<\frac{\pi}{2}$.

因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{13}{14}$.

所以
$$\begin{aligned}\cos B&=\cos(\pi-(A+C))=-\cos(A+C)\\&=\sin A\sin C-\cos A\cos C\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{13}{14}=\frac{11}{14}.\end{aligned}$$

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

因为 $b\cos A=-\frac{5}{2}$，

所以 $b=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$.

由正弦定理得 $a=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}\times 5=7$.

（18）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由图表知，2013~2020 年中，产品的平均利润小于 100 元/台的年份只有 2015 年，2016 年.

所以 从 2013~2020 年中随机抽取一年，该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率为$\frac{6}{8}=0.75$.

（Ⅱ）由图表知，2013~2020 年中，返修率超过千分之一的年份只有 2013，2015 年，

所以ξ 的所有可能取值为$1,2,3$.

$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(\xi=3)=\frac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$.

所以ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

故ξ 的数学期望$E(\xi)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$.

（Ⅲ）a 的最大值为13，最小值为7.

（19）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 椭圆W 经过点$C(2,\sqrt{3})$，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$.

因为 椭圆W 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，其中$a^2=b^2+c^2$.

所以 $\begin{cases}a=4,\\b=2.\end{cases}$

所以 椭圆W 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，长轴长$2a=8$.

（Ⅱ）当直线CD 的斜率不存在时，由题意可知$D(2,-\sqrt{3})$，$Q(2,0)$.

由（Ⅰ）可知$A(-4,0)$，$B(4,0)$.

所以 △ACQ 的面积为$\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，△$BDQ$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

显然△ACQ 的面积比△BDQ 的面积大$2\sqrt{3}$.

当直线CD的斜率存在时，由题意可设直线CD的方程为$y-\sqrt{3}=k(x-2)$，

且$k\neq 0$.

令$y=0$，得$x=2-\dfrac{\sqrt{3}}{k}$，所以 $Q(2-\dfrac{\sqrt{3}}{k},0)$.

由$\begin{cases} y-\sqrt{3}=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得$(\dfrac{1}{k^2}+4)y^2+(\dfrac{4}{k}-\dfrac{2\sqrt{3}}{k^2})y+\dfrac{3}{k^2}-\dfrac{4\sqrt{3}}{k}-12=0$.

依题意可得点D的纵坐标$y_D=\dfrac{2\sqrt{3}-4k}{1+4k^2}-\sqrt{3}=\dfrac{-4\sqrt{3}k^2-4k+\sqrt{3}}{1+4k^2}$.

因为 点D在x轴下方，所以$y_D<0$，即$-4<2-\dfrac{\sqrt{3}}{k}<4$.

所以 $\triangle ACQ$的面积为$\dfrac{1}{2}|AQ|\cdot|y_C|=\dfrac{1}{2}(2-\dfrac{\sqrt{3}}{k}+4)\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-\dfrac{\sqrt{3}}{k})$，

$\triangle BDQ$的面积为$\dfrac{1}{2}|BQ|\cdot|y_D|=\dfrac{1}{2}|4-2+\dfrac{\sqrt{3}}{k}||y_D|=\dfrac{1}{2}|2+\dfrac{\sqrt{3}}{k}||y_D|$

$$=\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{3}}{k})(-\frac{-4\sqrt{3}k^2-4k+\sqrt{3}}{1+4k^2})$$

$$=\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{3}}{k})(\frac{4\sqrt{3}k^2+4k-\sqrt{3}}{1+4k^2}).$$

因为 $\triangle ACQ$的面积比$\triangle BDQ$的面积大$2\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-\dfrac{\sqrt{3}}{k})-\dfrac{1}{2}(2+\dfrac{\sqrt{3}}{k})(\dfrac{4\sqrt{3}k^2+4k-\sqrt{3}}{1+4k^2})=2\sqrt{3}$.

此原方程无解.

综上所述，点D的坐标为$(2,-\sqrt{3})$.

方法二

因为 点D在x轴下方，所以 点Q在线段AB（不包括端点）上.

由（Ⅰ）可知$A(-4,0)$，$B(4,0)$.

所以 $\triangle AOC$的面积为$\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

因为 $\triangle ACQ$的面积比$\triangle BDQ$的面积大$2\sqrt{3}$，

所以 点Q在线段OB（不包括端点）上，且$\triangle OCQ$的面积等于$\triangle BDQ$的面积.

所以 $\triangle OCB$的面积等于$\triangle BCD$的面积.

所以 $OD\,//\,BC$.

设$D(m,n)$，$n<0$，

则$\dfrac{n}{m}=\dfrac{0-\sqrt{3}}{4-2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 点D在椭圆W上，

所以 $\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{n^2}{4}=1$.

所以 $\begin{cases} m=2, \\ n=-\sqrt{3}. \end{cases}$

所以 点 D 的坐标为 $(2,-\sqrt{3})$.

（20）（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大	↘

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x$.

所以 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$.

① 当 $x\in(0,1)$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，所以 $g'(x)>0$；

② 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，所以 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减.

所以 $g(x)\le g(1)=-1$.

（Ⅲ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ax-4a^2+1$.

① 当 $0\le a\le\dfrac{1}{2}$ 时，$h(1)=2a-4a^2=2a(1-2a)\ge0$，即存在 1，使得 $h(1)\ge0$；

② 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，由（Ⅱ）可知，$\dfrac{\ln x}{x}-x\le-1$，即 $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1$.

所以 $h(x)\le x-x^2+2ax-4a^2$

$$=-(x-\frac{2a+1}{2})^2+\frac{(2a+1)^2}{4}-4a^2$$

$$\le -3a^2+a+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{-(2a-1)(6a+1)}{4}$$

$$<0.$$

所以 对任意 $x>0$，$h(x)<0$，即不存在 x_0 使得 $h(x_0)\ge 0$.

综上所述，a 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

（21）（本小题共 14 分）

解： 记 $a(i,j)$ 为数表 A 中第 i 行第 j 列的数，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a(i,j)$ 为数表 A 中所有数的和，

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a(i,j)$ 为数表 A 中前 k 行 k 列交叉处各数之和.

（Ⅰ）A_1 是“4 阶非负数表”；A_2 不是“4 阶非负数表”.

（Ⅱ）由题意知 $a(i,j)\in\{1,-1\}$，$i=1,2,3,4,5$，$j=1,2,3,4,5$，且数表 A 是“5 阶非负数表”，

所以 $R(s)$（$s=1,2,3,4,5$）为奇数，且 $R(1)+R(2)+R(3)+R(4)+R(5)\ge 0$.

不妨设 $R(1)\ge R(2)\ge R(3)\ge R(4)\ge R(5)$.

① 当 $R(3)\ge 0$ 时，因为 $R(3)$ 为奇数，所以 $R(3)\ge 1$.

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge 3R(3)\ge 3$.

② 当 $R(3)<0$ 时，因为 $R(3)$ 为奇数，所以 $R(3)\le -1$.

所以 $R(4)+R(5)\le 2R(3)\le -2$.

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge -R(4)-R(5)\ge 2$.

又因为 $R(1)$，$R(2)$，$R(3)$ 均为奇数，

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge 3$.

（Ⅲ）（1）先证明数表 A 中存在 $n-1$ 行 n 列（$n=2k$），其所有数的和大于等于 0.

设 $R(i)=\sum_{j=1}^{n}a(i,j)$（$i=1,2,\cdots,n$），由题意知 $\sum_{i=1}^{n}R(i)\ge 0$.

不妨设 $R(1)\ge R(2)\ge\cdots\ge R(n)$.

由于 $n\sum_{i=1}^{n-1}R(i)-(n-1)\sum_{i=1}^{n}R(i)=\sum_{i=1}^{n-1}R(i)-(n-1)R(n)=\sum_{i=1}^{n-1}[R(i)-R(n)]\ge 0$，

所以 $\sum_{i=1}^{n-1}R(i)\ge\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}R(i)\ge 0$.

（2）由（1）及题意不妨设数表 A 前 $n-1$ 行 n 列（$n=2k$），其所有数的和大

于等于 0 .

下面考虑前 $2k-1$ 行，证明存在 $2k-1$ 行 k 列，其所有数的和大于等于 k .

设 $T(j)=\sum_{i=1}^{2k-1}a(i,\ j)$ （$j=1, 2, \cdots, 2k$），则 $\sum_{j=1}^{2k}T(j)=\sum_{i=1}^{2k-1}R(i)\ge 0$.

不妨设 $T(1)\ge T(2)\ge\cdots\ge T(2k)$.

因为 $T(j)$ 为 $2k-1$ 个奇数的和，所以 $T(j)$ 为奇数（$j=1, 2, \cdots, 2k$）.

① 当 $T(k)\ge 0$ 时，因为 $T(k)$ 为奇数，所以 $T(k)\ge 1$.

所以 $\sum_{j=1}^{k}T(j)\ge kT(k)\ge k$.

② 当 $T(k)<0$ 时，因为 $T(k)$ 为奇数，所以 $T(k)\le -1$.

所以 $\sum_{j=k+1}^{2k}T(j)\le kT(k)\le -k$.

所以 $\sum_{j=1}^{k}T(j)\ge -\sum_{j=k+1}^{2k}T(j)\ge k$.

（3）在（2）所设数表 A 下，证明前 $2k-1$ 行前 k 列中存在 k 行 k 列，其所有数的和 $\ge k$.

设 $R'(i)=\sum_{j=1}^{k}a(i,\ j)$ （$i=1, 2, \cdots, 2k-1$），则 $\sum_{i=1}^{2k-1}R'(i)=\sum_{j=1}^{k}T(j)\ge k$.

不妨设 $R'(1)\ge R'(2)\ge\cdots\ge R'(2k-1)$.

① 当 $R'(k)\ge 1$ 时，$\sum_{i=1}^{k}R'(i)\ge kR'(k)\ge k$ ；

② 当 $R'(k)\le 0$ 时，$R'(2k-1)\le R'(2k-2)\le\cdots\le R'(k)\le 0$.

所以 $\sum_{i=1}^{k}R'(i)\ge k-\sum_{i=k+1}^{2k-1}R'(i)\ge k$ ，所以 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a(i,\ j)=\sum_{i=1}^{k}R'(i)\ge k$.

综上所述，对于任何“n 阶非负数表” A，均存在 k 行 k 列，使得这 k 行 k 列交叉处的所有数之和不小于 k .