2024 年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（二）

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．(2023·江苏扬州中学适应性考试)已知 $z-2\bar{z}=1+6\mathrm{i}$，则 z 的虚部为(　　)

A．-6　　B．$-6\mathrm{i}$

C．2　　D．$2\mathrm{i}$

答案　C

解析　设 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$，因为 $z-2\bar{z}=1+6\mathrm{i}$，即有 $(a+b\mathrm{i})-2(a-b\mathrm{i})=1+6\mathrm{i}$，整理得 $-a+3b\mathrm{i}=1+6\mathrm{i}$，解得 $a=-1$，$b=2$，所以 z 的虚部为 2.故选 C.

2．(2023·福建福州一中适应性考试二)已知集合 S，T 满足 $S\cup(\complement_{\mathbf{R}}T)=\mathbf{R}$，$S=\{0，1，2，4\}$，则 T 可能是(　　)

A．$\{0，1，2，4\}$　　B．$\{0，1，2，3\}$

C．$\{1，2，3，4\}$　　D．$\{0，1，2，4，5\}$

答案　A

解析　由 $S\cup(\complement_{\mathbf{R}}T)=\mathbf{R}$，得 $\complement_{\mathbf{R}}S\subseteq\complement_{\mathbf{R}}T$，进而 $T\subseteq S$，因为 $S=\{0，1，2，4\}$，所以 T 可能是 $\{0，1，2，4\}$．故选 A．

3．(2023·重庆三模)从小到大排列的数据 1，2，3，x，4，5，6，7，8，y，9，10 的第三四分位数为(　　)

A．3　　　　B．$\frac{3+x}{2}$

C．8　　　　D．$\frac{8+y}{2}$

答案　D

解析　∵$12\times75\%=9$，∴该组数据的第三四分位数为$\frac{8+y}{2}$.故选 D.

4.(2023·湖南郴州三模)已知函数$f(x)=nx+\ln x(n\in\mathbf{N}^*)$的图象在点$\left(\frac{1}{n},\ f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$处的切线的斜率为 a_n，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n 为(　　)

A．$\frac{n}{4(n+1)}$　　　　B．$\frac{1}{n+1}$

C．$\frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}$　　　　D．$\frac{3n^2+5n}{8(n+1)(n+2)}$

答案　A

解析　由题意得$f'(x)=n+\frac{1}{x}$，则 $a_n=f'\left(\frac{1}{n}\right)=2n$，所以$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$.故选 A.

5．(2023·河南豫南名校三模)已知直线 l：$4x-2y-7=0$ 与双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的两条渐近线分别交于点 A，B(不重合)，AB 的垂直平分线过点(3，0)，则双曲线 C 的离心率为(　　)

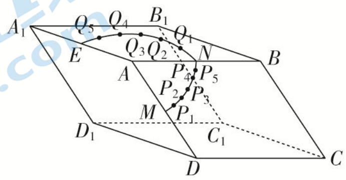
A．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B．$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C．$\sqrt{3}$　　　　D．$\frac{\sqrt{6}}{2}$

答案　D

解析　因为直线 l：$4x-2y-7=0$，所以 $k_l=2$，由题意可知 AB 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)$，将 $y=-\frac{1}{2}(x-3)$与 $4x-2y-7=0$ 联立，可得$\begin{cases}x=2,\\y=\frac{1}{2},\end{cases}$即 AB 的中点坐标为$\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$.设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0,\\\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0,\end{cases}$且 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=1$，两式作差可得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，即$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$，所以双曲线 C 的离心率为$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.故选 D.

6．(2023·浙江 9＋1 联盟期中)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，所有棱长为 4，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAA_1=\frac{2\pi}{3}$，以 A 为圆心，2 为半径分别在平面 $ABCD$ 和平面 ABB_1A_1 内作弧$\overset{\frown}{MN}$,$\overset{\frown}{NE}$，点 M，N，E 分别在 AD，AB，AA_1 上，并将两弧各六等分，等分点依次为 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5以及 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5，如图，一只蚂蚁欲从点 P_2 出发，沿平行六面体表面爬行至 Q_4，则其爬行的最短距离为(　　)

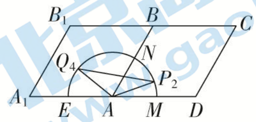


A．$\frac{4\pi}{3}$　　　　B．$2\sqrt{3}$

C．2　　　　D．$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

答案　B

解析　如图，将四边形 ABB_1A_1 和四边形 $ABCD$ 沿 AB 展开，使得两四边形在同一平面，连接 P_2Q_4，则线段 P_2Q_4 的长度即为蚂蚁爬行的最短距离．因为 P_2，Q_4 分别为弧 $\overset{\frown}{MN}$，$\overset{\frown}{NE}$ 的六等分点，且



$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BAA_1=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\angle BAP_2=\dfrac{2\pi}{9}$，$\angle BAQ_4=\dfrac{4\pi}{9}$，所以 $\angle P_2AQ_4=\dfrac{2\pi}{3}$，

又 $AP_2=2$，所以 $P_2Q_4=2\times2\times\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$．故选 B.

7．(2023·吉林第四次调研)在我国古代，杨辉三角(如图 1)是解决很多数学问题的有力工具，从图 1 中可以归纳出等式：$C_1^1+C_2^1+C_3^1+\dots+C_n^1=C_{n+1}^2$，类比上述结论，借助杨辉三角解决下述问题：如图 2，该“刍童垛”共 2021 层，底层如图 3，一边 2023 个圆球，另一边 2022 个圆球，向上逐层每边减少 1 个圆球，顶层堆 6 个圆球，则此“刍童垛”中圆球的总数为(　　)

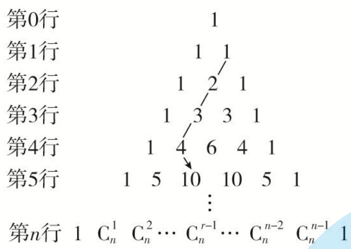


图 1　杨辉三角

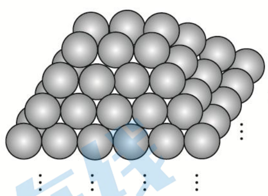


图 2　刍童垛

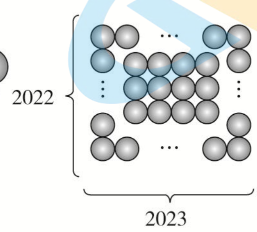


图 3　刍童垛底层

A．$2C_{2023}^3-2$　　B．$2C_{2024}^3-2$

C．C_{2024}^4-2　　D．C_{2023}^4-2

答案　B

解析　由杨辉三角中观察可得 $1+3+6+10=20$，推广得 $C_2^2+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3$，即 $\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+2}^3$，则 2021 层"刍童垛"圆球的总个数为 $S=2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+2022\times2023=2(C_{2024}^3-1)$．故选 B.

8．(2023·湖南名校适应性测试)定义在正整数上的函数满足 $f(k+2)=\sqrt{3}f(k+1)-f(k)(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $f(65)=(\quad)$

A．$f(1)$　　B．$f(3)$

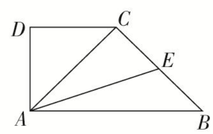
C．$f(5)$　　D．$f(7)$

答案　C

解析　$\because f(k+2)=\sqrt{3}f(k+1)-f(k)(k\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore f(k+3)=\sqrt{3}f(k+2)-f(k+1)=\sqrt{3}[\sqrt{3}f(k+1)-f(k)]-f(k+1)=2f(k+1)-\sqrt{3}f(k)$，$\therefore f(k+4)=2f(k+2)-\sqrt{3}f(k+1)=2[\sqrt{3}f(k+1)-f(k)]-\sqrt{3}f(k+1)=\sqrt{3}f(k+1)-2f(k)$，则 $f(k+4)=f(k+2)-f(k)$，$\therefore f(k+6)=f(k+4)-f(k+2)=-f(k)$，$\therefore f(k+12)=-f(k+6)=f(k)$，$\therefore$函数的周期 $T=12$，$f(65)=f(12\times5+5)=f(5)$．故选 C.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.(2023·广东深圳调研)如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AD\perp AB$，$AB=2AD=2CD=2$，E 是 BC 的中点，则(　　)

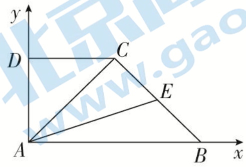


A．$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}$　　B．$\overrightarrow{EB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　D．$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

答案　ABC

解析　如图建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，$E\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.对于 A，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(2,0)-\frac{1}{2}(0,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，故 B 正确；对于 C，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(1,1)\cdot(-1,1)=0$，故 C 正确；对于 D，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}(2,0)-\frac{1}{2}(0,1)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，故 D 错误．故选 ABC.



10．(2023·广东珠海市三模)已知圆 C_1：$x^2+y^2=9$ 与圆 C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=16$，下列说法正确的是(　　)

A．C_1 与 C_2 的公切线恰有 4 条

B．C_1 与 C_2 公共弦的方程为 $3x+4y-9=0$

C．C_1 与 C_2 公共弦的弦长为 $\frac{12}{5}$

D．若 P，Q 分别是圆 C_1，C_2 上的动点，则 $|PQ|_{max}=12$

答案　BD

解析　圆 C_1 的圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=3$，圆 C_2 的圆心 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=4$，$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，$r_2-r_1<|C_1C_2|<r_1+r_2$，故两圆相交，公切线恰有 2 条，故 A 错误；作差可得 C_1 与 C_2 公共弦的方程为 $3x+4y-9=0$，故 B 正确；C_1 到公共弦的距离为 $\frac{9}{5}$，故公共弦的弦长为 $2\sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$，故 C 错误；若 P，Q 分别是圆 C_1，C_2 上的动点，则 $|PQ|_{max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$，故 D 正确．故

选 BD.

11．(2023·辽宁大连统考三模)甲、乙两队进行比赛，若双方实力随时间的变化遵循兰彻斯特模型：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})X_0}{2}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{(e^{x}-e^{-x})Y_0}{2}, \\ y(t)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})Y_0}{2}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\dfrac{(e^{x}-e^{-x})X_0}{2}, \\ x=\sqrt{ab}\,t, \end{cases}$$

其中正实数 X_0，Y_0 分别为甲、乙两方初始实力，t 为比赛时间；$x(t)$，$y(t)$分别为甲、乙两方 t 时刻的实力；正实数 a，b 分别为甲对乙、乙对甲的比赛效果系数．规定当甲、乙两方任何一方实力为 0 时比赛结束，另一方获得比赛胜利，并记比赛持续时长为 T.则下列结论正确的是(　　)

A．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $x(t)>y(t)(0\le t\le T)$

B．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $T=\dfrac{1}{a}\ln\sqrt{\dfrac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$

C．若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\dfrac{b}{a}$，则甲方比赛胜利

D．若 $\dfrac{X_0}{Y_0}>\sqrt{\dfrac{b}{a}}$，则甲方比赛胜利

答案　ABD

解析　对于 A，若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $\begin{cases} x(t)=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}X_0-\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}Y_0, \\ y(t)=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}Y_0-\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}X_0, \end{cases}$ 所以 $x(t)-y(t)=e^{at}(X_0-Y_0)$，由 $X_0>Y_0$ 可得 $x(t)-y(t)=e^{at}(X_0-Y_0)>0$，故 A 正确；对于 B，当 $a=b$ 时，根据 A 中的结论可知 $x(t)>y(t)$，所以乙方实力先为 0，即 $y(t)=$

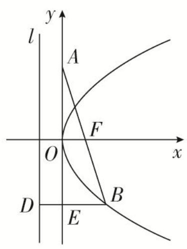
$\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}Y_0-\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}X_0=0$，化简可得 $e^{at}(X_0-Y_0)=e^{-at}(X_0+Y_0)$，即 $e^{2at}=\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}$，两边同时取对数可得 $2at=\ln\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}$，即 $t=\frac{1}{2a}\ln\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}=\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$，即 $T=\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$，故 B 正确；对于 C，D，若甲方获得比赛胜利，则甲方实力为 0 时所用时间 t_1 大于乙方实力为 0 时所用时间 t_2，由 $x(t_1)=\frac{e^{\sqrt{ab}t_1}+e^{-\sqrt{ab}t_1}}{2}X_0-\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{e^{\sqrt{ab}t_1}-e^{-\sqrt{ab}t_1}}{2}Y_0=0$，可得 $e^{2\sqrt{ab}t_1}=\frac{X_0+Y_0\sqrt{\frac{b}{a}}}{Y_0\sqrt{\frac{b}{a}}-X_0}>0$，同理可得 $e^{2\sqrt{ab}t_2}=\frac{Y_0+X_0\sqrt{\frac{a}{b}}}{X_0\sqrt{\frac{a}{b}}-Y_0}>0$，则 $\frac{X_0+Y_0\sqrt{\frac{b}{a}}}{Y_0\sqrt{\frac{b}{a}}-X_0}>\frac{Y_0+X_0\sqrt{\frac{a}{b}}}{X_0\sqrt{\frac{a}{b}}-Y_0}$，解得 $\frac{X_0^2}{Y_0^2}>\frac{b}{a}$，又 X_0，Y_0，a，b 都为正实数，所以可得 $\frac{X_0}{Y_0}>\sqrt{\frac{b}{a}}$，甲方获得比赛胜利，故 C 错误，D 正确．故选 ABD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．(2023·山东聊城三模)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 A 在 y 轴上，线段 AF 的延长线交 C 于点 B，若$|AF|=|FB|=6$，则 $p=$________.

答案　4

解析　如图，作 $BD\perp$准线 l 于点 D，交 y 轴于点 E，所以 $OF\parallel BE$，因为$|AF|=|FB|=6$，所以$|OF|=\frac{1}{2}|BE|=\frac{p}{2}$，所以$|BD|=|FB|=\frac{3p}{2}=6$，解得 $p=4$.



13．(2023·江苏南京统考二模)一个袋子中有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个红球和 5 个白球，每次从袋子中随机摸出 2 个球．若“摸出的两个球颜色不相同”发生的概率记为 $P(n)$，

则 $P(n)$的最大值为________.

答案 $\frac{5}{9}$

解析 $P(n)=\frac{C_n^1\cdot C_5^1}{C_{n+5}^2}=\frac{5n}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}}=\frac{10n}{n^2+9n+20}=\frac{10}{n+\frac{20}{n}+9}$，对勾函数 $y=x+\frac{20}{x}$在$(0,\sqrt{20})$上单调递减，在$(\sqrt{20},+\infty)$上单调递增，故当 $n=4$ 或 $n=5$ 时，$n+\frac{20}{n}$有最小值，为 9，故 $P(n)=\frac{10}{n+\frac{20}{n}+9}\leq\frac{10}{9+9}=\frac{5}{9}$.故 $P(n)$的最大值为$\frac{5}{9}$.

14．(2023·河南商丘部分学校高中毕业班阶段性测试(六))已知在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $\cos A(b-a\cos C)=\sqrt{3}c\cos C-a\sin A\sin C$，$b^2+a^2=c^2+6$，则$\triangle ABC$ 的面积为________.

答案 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解析 由 $\cos A(b-a\cos C)=\sqrt{3}c\cos C-a\sin A\sin C$ 及正弦定理可得，$\cos A(\sin B-\sin A\cos C)=\sqrt{3}\sin C\cos C-\sin^2A\sin C$ ①，又在$\triangle ABC$中，$B=\pi-(A+C)$，$\sin C>0$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，代入①式得 $\sin C\cos^2A=\sqrt{3}\sin C\cos C-\sin^2A\sin C$，所以 $\sin^2A+\cos^2A=\sqrt{3}\cos C$，解得 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又由余弦定理可得 $ab=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cos C}=\frac{6}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}=3\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．在$\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2(b^2-a^2)+c^2=0$.

(1)求$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$的值；

(2)求 $A-B$ 的最大值.

解 (1)由余弦定理得

$$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2},$$

因为 $2(b^2-a^2)+c^2=0$,

所以$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{3a^2-3b^2}{a^2-b^2}=3$.

(2)由(1)$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=3$，得 $\tan A=3\tan B$,

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{2\tan B}{1+3\tan^2 B}=\frac{2}{\frac{1}{\tan B}+3\tan B}.$$

因为 $\tan A=3\tan B$，A，B 为三角形的内角，所以 $\tan B>0$,

所以$\frac{2}{\frac{1}{\tan B}+3\tan B}\leq\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立,

此时 $B=\frac{\pi}{6}$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 $A-B$ 的最大值为$\frac{\pi}{6}$.

16．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=\frac{n(1+a_n)}{2}$，a_1，a_2，a_5依次成等比数列(公比不等于 1).

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{a_na_{n+1}}$，$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

解 (1)因为 $S_n=\frac{n(1+a_n)}{2}$,

则当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{1+a_1}{2}$，

所以 $a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n-1)(1+a_{n-1})}{2}$，

所以 $a_n=\frac{n(1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(1+a_{n-1})}{2}\Leftrightarrow$

$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0$，

所以 $(n-1)a_{n+1}-na_n+1=0$，

所以 $(n-1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}-2(n-1)a_n=0$，

所以 $a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n=0$，即 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，记其公差为 d，

则 $a_2=1+d$，$a_5=1+4d$，

因为 a_1，a_2，a_5 依次成等比数列，

所以 $(1+d)^2=1+4d$，

解得 $d=2$ 或 $d=0$(舍去)，

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

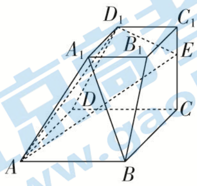
(2)由题意可得 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{a_na_{n+1}}=\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{(-1)^{n+1}}{4}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)=$

$\frac{1}{4}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right]$.

17.如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面和上底面分别是边长为 4 和 2 的正方形，侧棱 CC_1 上点 E 满足 $\frac{C_1E}{C_1C}=\frac{1}{3}$.



(1)证明：A_1B // 平面 AD_1E；

(2)若 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，且 $CC_1=3$，求直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.

解　(1)证明：延长 D_1E 和 DC 交于点 M，连接 MA 交 BC 于点 N，连接 D_1N，

由 $\frac{C_1E}{CE}=\frac{1}{2}$，得 $\frac{C_1D_1}{CM}=\frac{1}{2}$，所以 $CM=4=AB$，

所以 $\triangle MCN\cong\triangle ABN$，

所以 $BN=NC$，所以 N 为 BC 的中点，

又 A_1D_1 // B_1C_1 且 $A_1D_1=B_1C_1$，B_1C_1 // BN 且 $B_1C_1=BN$，

所以 A_1D_1 // BN 且 $A_1D_1=BN$，

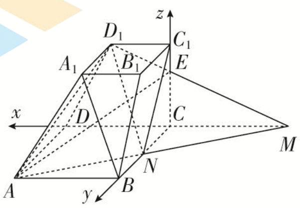
所以四边形 A_1BND_1 为平行四边形，

所以 A_1B // D_1N，

又 $D_1N\subset$ 平面 AD_1E，$A_1B\not\subset$ 平面 AD_1E，

所以 A_1B // 平面 AD_1E.

(2)以 C 为原点，CD，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(0,4,0)$，$B_1(0,2,3)$，$A(4,4,0)$，$D_1(2,0,3)$，$E(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(0,-2,3)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,-4,3)$，$\overrightarrow{AE}=(-4,-4,2)$.

设平面 AD_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}-2x-4y+3z=0,\\ -4x-4y+2z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(1,\ -2,\ -2)$，

则$|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BB_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BB_1}|}=\dfrac{|4-6|}{3\times\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{39}$，

所以直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{13}}{39}$.

18．已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，A 为 C 的上顶点，过 A 的直线 l 与 C 交于另一点 B，与 x 轴交于点 D，点 O 为坐标原点．

(1)若$|AB|=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，求 l 的方程；

(2)已知 P 为 AB 的中点，y 轴上是否存在定点 Q，使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由．

解 (1)①当直线 l 的斜率不存在时，直线 l：$x=0$，$|AB|=2$，舍去；

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l：$y=kx+1$，$k\neq0$，

联立方程$\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得$(2k^2+1)x^2+4kx=0$，

解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{-4k}{2k^2+1}$，

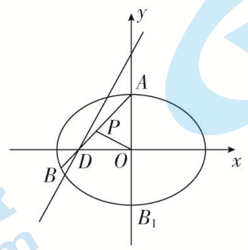
所以 $B\left(\dfrac{-4k}{2k^2+1},\ \dfrac{1-2k^2}{2k^2+1}\right)$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|\dfrac{-4k}{2k^2+1}-0\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

化简得 $4k^4+4k^2-15=0$，

解得 $k^2=\frac{3}{2}$或 $k^2=-\frac{5}{2}$(舍去)，即 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以直线 l：$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x+1$.



(2)①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l：$y=kx+1$，$k\neq 0$，

由(1)得 $P\left(\frac{-2k}{2k^2+1},\ \frac{1}{2k^2+1}\right)$，$D\left(-\frac{1}{k},\ 0\right)$，

所以 $k_{OP}=-\frac{1}{2k}$，

又因为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$，

所以 $OP\perp DQ$，

所以 $k_{DQ}=2k$，

所以直线 l_{DQ}：$y=2k\left(x+\frac{1}{k}\right)=2kx+2$，

即存在定点 $Q(0，2)$满足条件.

②当直线 l 的斜率不存在时，直线 l：$x=0$，则 O，P 重合，$Q(0，2)$也满足条件.

综上，存在点 $Q(0，2)$，使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$.

19．已知函数 $f(x)=\sin^2x+ax^2$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，不等式 $\sin(2\cos x)+a^2x^2\geq af(x)$恒成立，求实数 a 的取值范围.

解　(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=2\sin x\cos x+2x=\sin 2x+2x$，

因为 $f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f'(x)$的一个零点．

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2+2\cos 2x\geq 0$，所以 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，在$(0，+\infty)$上单调递增．

(2)不等式 $\sin(2\cos x)+a^2x^2\geq af(x)$恒成立，

即不等式 $\sin(2\cos x)\geq a\sin^2 x$ 恒成立．

令 $\cos x=t\in[0,1]$，则不等式 $\sin(2\cos x)\geq a\sin^2 x$ 恒成立等价于不等式 $\sin 2t\geq a(1-t^2)$　(*)恒成立，

①若 $t=1$，不等式(*)显然成立，此时 $a\in\mathbf{R}$；

②若 $0\leq t<1$，不等式(*)等价于 $a\leq\dfrac{\sin 2t}{1-t^2}$.

设 $h(t)=\dfrac{\sin 2t}{1-t^2}(0\leq t<1)$，

当 $0\leq t<1$ 时，

$$h'(t)=\frac{2[(1-t^2)\cos 2t+t\sin 2t]}{(1-t^2)^2},$$

令$\varphi(t)=(1-t^2)\cos 2t+t\sin 2t(0\leq t<1)$，

则$\varphi'(t)=(2t^2-1)\sin 2t$，$0\leq t<1$，

当 $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$\varphi'(t)<0$，当$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<1$ 时，$\varphi'(t)>0$，

所以$\varphi(t)$在$\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$上单调递增，

所以$\varphi(t)_{\min}=\varphi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}>0$，

所以 $h'(t)>0$，$h(t)$在$[0, 1)$上单调递增，$h(t)_{\min}=h(0)=0$，

所以 $a\leq 0$.

综上所述，实数 a 的取值范围为$(-\infty, 0]$.