海淀区高三年级第二学期期中练习

数　　学（理科）

2018.4

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{0, a\}$，$B=\{x\mid -1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 可以是

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

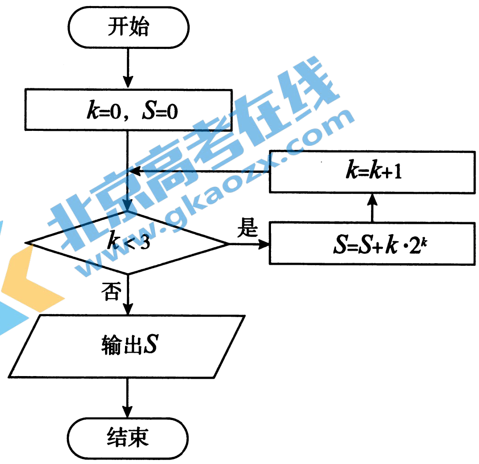
（2）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0)$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$

（A）$(-1,2)$　　（B）$(-1,4)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(1,4)$

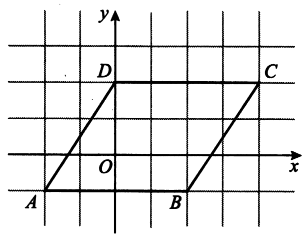
（3）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为

（A）2　　（B）6

（C）8　　（D）10



（4）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，若四边形 $ABCD$ 及其内部的点组成的集合记为 M，且 $P(x, y)$ 为 M 中任意一点，则 $y-x$ 的最大值为



（A）1　　（B）2

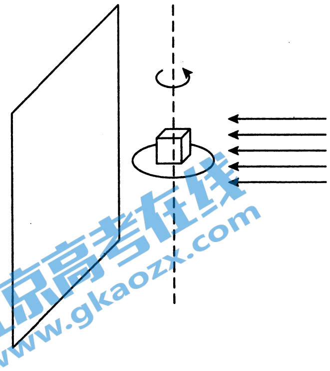
（C）-1　　（D）-2

（5）已知 a，b 为正实数，则“$a>1$，$b>1$”是“$\lg a+\lg b>0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）如图所示，一个棱长为 1 的正方体在一个水平放置的转盘上转动，用垂直于竖直墙面的水平光线照射，该正方体在竖直墙面上的投影的面积记作 S，则 S 的值不可能是



（A）1　　（B）$\frac{6}{5}$

（C）$\frac{4}{3}$　　（D）$\frac{3}{2}$

（7）下列函数 $f(x)$ 中，其图象上任意一点 $P(x, y)$ 的坐标都满足条件 $y \leqslant |x|$ 的函数是

（A）$f(x)=x^3$　　（B）$f(x)=\sqrt{x}$　　（C）$f(x)=e^x-1$　　（D）$f(x)=\ln(x+1)$

（8）已知点 M 在圆 $C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上，点 N 在圆 $C_2:(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 上，则下列说法错误的是

（A）$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围为 $[-3-2\sqrt{2}, 0]$

（B）$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|$ 的取值范围为 $[0, 2\sqrt{2}]$

（C）$|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$ 的取值范围为 $[2\sqrt{2}-2, 2\sqrt{2}+2]$

（D）若 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{ON}$，则实数 λ 的取值范围为 $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]$

第二部分（非选择题，共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）复数 $\frac{2i}{1+i}=$ ________.

（10）已知点 $(2,0)$ 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一个顶点，则 C 的离心率为________.

（11）直线 $\begin{cases} x=2t, \\ y=t \end{cases}$（$t$ 为参数）与曲线 $\begin{cases} x=2+\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）的公共点个数为________.

（12）在△ABC 中，若 $c=2$，$a=\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin C=$ ________，$\cos 2C=$ ________.

（13）一次数学会议中，有五位教师来自 A，B，C 三所学校，其中 A 学校有 2 位，B 学校有 2 位，C 学校有 1 位．现在五位教师排成一排照相，若要求来自同一所学校的教师不相邻，则共有________种不同的站队方法．

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x \geqslant a, \\ x^3-3x, & x<a. \end{cases}$

① 若 $f(x)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是________；

② 若 $a \leqslant -2$，则满足 $f(x)+f(x-1)>-3$ 的 x 的取值范围是________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

（16）（本小题 13 分）

流行性感冒多由病毒引起，据调查，空气月平均相对湿度过大或过小时，都有利于一些病毒繁殖和传播. 科学测定，当空气月平均相对湿度大于 65% 或小于 40% 时，有利于病毒繁殖和传播. 下表记录了某年甲、乙两个城市 12 个月的空气月平均相对湿度.

	第一季度			第二季度			第三季度			第四季度		
	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
甲地	54%	39%	46%	54%	56%	67%	64%	66%	78%	72%	72%	59%
乙地	38%	34%	31%	42%	54%	66%	69%	65%	62%	70%	a%	b%

（Ⅰ）从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，求该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率；

（Ⅱ）从上表第一季度和第二季度的 6 个月中随机取出 2 个月，记这 2 个月中甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份的个数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）若 $a+b=108$，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为 M，求 M 的最大值和最小值.（只需写出结论）

（17）（本小题 14 分）

已知三棱锥 $P\text{-}ABC$（如图 1）的平面展开图（如图 2）中，四边形 $ABCD$ 为边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，$\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形. 在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中：

（Ⅰ）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $A\text{-}PC\text{-}B$ 的余弦值；

（Ⅲ）若点 M 在棱 PC 上，满足 $\frac{CM}{CP}=\lambda$，$\lambda\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，点 N 在棱 BP 上，且 $BM\perp AN$，求 $\frac{BN}{BP}$ 的取值范围.

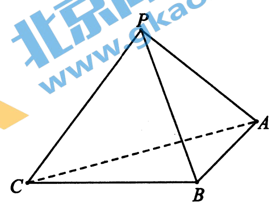


图 1

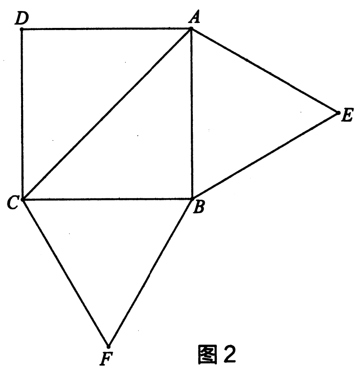


图 2

(18)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}$.

(Ⅰ)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(Ⅱ)当 $a>0$ 时，若函数 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{e^2}$，求 a 的值.

(19)(本小题 14 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $T(2,\ 1)$ 在椭圆 C 上. 设与 OT 平行的直线 l 与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，直线 TP，TQ 分别与 x 轴正半轴交于 M，N 两点.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程；

(Ⅱ)判断 $|OM|+|ON|$ 的值是否为定值，并证明你的结论.

(20)(本小题 13 分)

设 $A=(a_{i,j})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ 是由 1，2，3，…，n^2 组成的 n 行 n 列的数表（每个数恰好出现一次），$n\geqslant 2$ 且 $n\in \mathbf{N}^*$.

若存在 $1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$，使得 $a_{i,j}$ 既是第 i 行中的最大值，也是第 j 列中的最小值，则称数表 A 为一个"N-数表"，$a_{i,j}$ 为数表 A 的一个"N-值".

对任意给定的 n，所有"N-数表"构成的集合记作 Ω_n.

(Ⅰ)判断下列数表是否是"N-数表". 若是，写出它的一个"N-值"

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 8 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$；

(Ⅱ)求证：若数表 A 是"N-数表"，则 A 的"N-值"是唯一的；

(Ⅲ)在 Ω_{19} 中随机选取一个数表 A，记 A 的"N-值"为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$.