

2022 北京朝阳高三（上）期末

数 学

2022.1

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. $(1+i)^2 =$

A. -2

B. 2

C. $-2i$

D. $2i$

2. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为

A. $y = \pm \frac{3}{4}x$

B. $y = \pm \frac{4}{3}x$

C. $y = \pm \frac{3}{5}x$

D. $y = \pm \frac{9}{16}x$

3. 在 5 道试题中有 2 道代数题和 3 道几何题，每次从中抽出 1 道题，抽出的题不再放回，则在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率为

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{3}{10}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

4. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 上一点 M 与焦点 F 的距离为 4，则点 M 到 x 轴的距离是

A. $2\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 12

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x) \leq 2$ ，则实数 x 的取值范围是

A. $[-1, +\infty)$

B. $(0, 4]$

C. $[-1, 4]$

D. $(-\infty, 4]$

6. 在直角坐标平面 xOy 内， O 为坐标原点，已知点 $A(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点按逆时针

方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 $\overrightarrow{OA'}$ ，则 $\overrightarrow{OA'}$ 的坐标为

A. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

D. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

7. 某纯净水制造厂在净化水的过程中，每增加一次过滤可使水中杂质减少 50%，若要使水中杂质减少到原来的 10% 以下，则至少需要过滤

(参考数据： $\lg 2 \approx 0.3010$)

A. 2 次

B. 3 次

C. 4 次

D. 5 次

8. 若函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ 的最大值为 2，则下列结论不一定成立的是 ()

A. $a^2 + b^2 = 4$

B. $ab \leq 2$

C. $(a+b)^2 \leq 8$

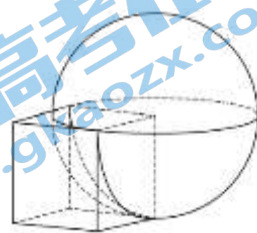
D. $(a-b)^2 \leq 4$

9. 已知平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 2$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 记 $\mathbf{m} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}, (t \in \mathbf{R})$, 则 $|\mathbf{m}|$ 的取值范围为_____

- A. $[\sqrt{3}, +\infty)$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

10. 如图, 将半径为 1 的球与棱长为 1 的正方体组合在一起, 使正方体的一个顶点正好是球的球心, 则这个组合体的体积为

- A. $\frac{7}{6}\pi + 1$ B. $\frac{7}{6}\pi + \frac{5}{6}$ C. $\frac{7}{8}\pi + 1$ D. $\pi + 1$

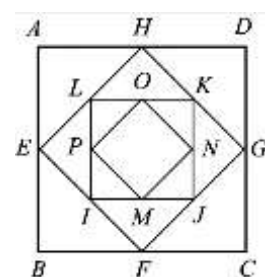


二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡上.

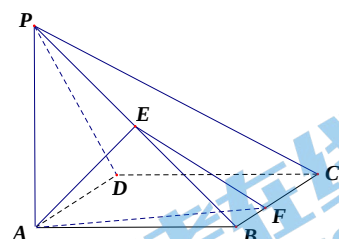
11. 在 $(x + \frac{1}{x})^5$ 的展开式中, x 的系数为_____.

12. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, 直线 $l: y = x + \sqrt{2}$, 则使“圆 C 上至少有 3 个点到直线 l 距离都是 1”成立的一个充分条件是“ $r =$ _____”.

13. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 取正方形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H , 作第 2 个正方形 $EFGH$, 然后再取正方形 $EFGH$ 各边的中点 I, J, K, L , 作第 3 个正方形 $IJKL$, 依此方法一直继续下去. 则第 4 个正方形的面积是_____; 从正方形 $ABCD$ 开始, 连续 8 个正方形面积之和是_____.



14. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB = 2$, E 为线段 PB 的中点, F 为线段 BC 上的动点, 平面 AEF 与平面 PBC _____ (填“垂直”或“不垂直”); $\triangle AEF$ 的面积的最大值为_____.



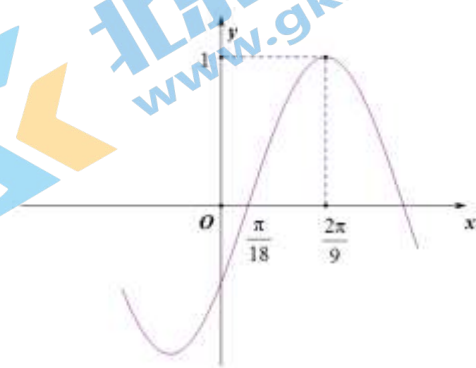
15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 设

$$g(x) = |f(x)|,$$

给出以下四个结论:

- ① 函数 $g(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{3}$;
 ② 函数 $g(x)$ 在区间 $(\frac{7\pi}{18}, \frac{5\pi}{9})$ 上单调递增;
 ③ 函数 $g(x)$ 的图象过点 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$;
 ④ 直线 $x = \frac{13\pi}{18}$ 为函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴.

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题满分 13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a = 2t - 1, b = 4t, c = 4t + 1$ ($t > 1$)。

(I) 当 $t = 3$ 时，求 $\cos B$ ；

(II) 是否存在正整数 t ，使得角 C 为钝角？如果存在，求出 t 的值，并求此时 $\triangle ABC$ 的面积；如果不存在，说明理由。

17. (本小题满分 13 分)

“双减”政策实施以来，各地纷纷推行课后服务“5+2”模式，即学校每周周一至周五 5 天都要面向所有学生提供课后服务，每天至少 2 小时。某学校的课后服务有学业辅导、体育锻炼、实践能力创新培养三大类别，为了解该校学生上个月参加课后服务的情况，该校从全校学生中随机抽取了 100 人作为样本，发现样本中未参加任何课后服务的有 14 人，样本中仅参加某一类课后服务的学生分布情况如下：

每周参加活动天数 课后服务活动	1 天	2~4 天	5 天
仅参加学业辅导	10 人	11 人	4 人
仅参加体育锻炼	5 人	12 人	1 人
仅参加实践能力创新培养	3 人	12 人	1 人

(I) 从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的概率；

(II) 从全校学生中随机抽取 3 人，以频率估计概率，以 X 表示这 3 人中上个月仅参加学业辅导的人数，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 若样本中上个月未参加任何课后服务的学生有 $n(0 < n \leq 14)$ 人在本月选择仅参加学业辅导，样本中其他学生参加课后服务的情况在本月没有变化。从全校学生中随机抽取 3 人，以频率估计概率，以 X 表示这 3 人中上个月仅参加学业辅导的人数，以 Y 表示这 3 人中本月初仅参加学业辅导的人数，试判断方差 $D(X), D(Y)$ 的大小关系(结论不要求证明)。

18. (本小题满分 14 分)

刍甍(chú méng)是中国古代数学书中提到的一种几何体.《九章算术》中有记载“下有袤有广，而上有袤无广”，可翻译为：“底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱.”

如图，在刍甍 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 BAE 和平面 CDE 交于 EF .

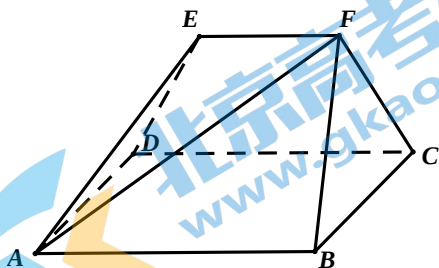
(I) 求证： $CD \parallel$ 平面 BAE ；

(II) 若 $AB=4$ ， $EF=2$ ， $ED=FC$ ， $AF=3\sqrt{3}$ ，再从条件①，条件②，条件③中选择一个作为已知，使得刍甍 $ABCDEF$ 存在，并求平面 ADE 和平面 BAE 夹角的余弦值.

条件①： $BF \perp FC$ ， $AF \perp FC$ ；

条件②：平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

条件③：平面 $CBF \perp$ 平面 $ABCD$.



19. (本小题满分 15 分)

已知曲线 $W: \frac{x^2}{3-m} + \frac{y^2}{m} = 1 (m \in \mathbf{R}, m \neq 0, \text{ 且 } m \neq 3)$.

(I) 若曲线 W 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

(II) 当 $m=1$ 时，过点 $E(1,0)$ 作斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 交曲线 W 于点 A, B (A, B 异于顶点)，交直线 $x=2$ 于 P . 过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 Q ，直线 AQ 交 x 轴于 C ，直线 BQ 交 x 轴于 D ，求线段 CD 中点 M 的坐标.

20. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x - x - \ln a$ ， $a > 0$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线的斜率；

(II) 求函数 $f(x)$ 的极大值；

(III) 设 $g(x) = ae^x - x^2$ ，当 $a \in (1, e)$ 时，求函数 $g(x)$ 的零点个数，并说明理由.

(21) (本小题满分 15 分)

对任意正整数 n , 记集合 $A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 均为非负整数, 且 } a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\}$, 集合 $B_n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid b_1, b_2, \dots, b_n \text{ 均为非负整数, 且 } b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2n\}$. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B_n$, 若对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 都有 $a_i \leq b_i$, 则记 $\alpha \prec \beta$.

(I) 写出集合 A_2 和 B_2 ;

(II) 证明: 对任意 $\alpha \in A_n$, 存在 $\beta \in B_n$, 使得 $\alpha \prec \beta$;

(III) 设集合 $S_n = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A_n, \beta \in B_n, \alpha \prec \beta\}$, 求证: S_n 中的元素个数是完全平方数.

2022 北京朝阳高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	D	B	C	B	C	D	A	A

二、填空题：（本题满分 25 分）

题号	11	12	13		14		15
答案	10	2（结果不唯一）	$\frac{1}{2}$	$\frac{255}{32}$	垂直	$\sqrt{3}$	①②④

三、解答题：（本题满分 85 分）

16.(本小题满分 13 分)

解：（I） $t=3$ 时， $a=5, b=12, c=13$, 此时 $\triangle ABC$ 为直角三角形，

所以 $\cos B = \frac{a}{c} = \frac{5}{13}$ 6 分

（II）由题意可得，
$$\begin{cases} t > 1, \\ \cos C = \frac{(2t-1)^2 + (4t)^2 - (4t+1)^2}{2(2t-1) \cdot 4t} < 0. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 4t^2 - 12t < 0, \\ t > 1. \end{cases}$ 所以 $1 < t < 3, t \in \mathbb{N}^*$. 则 $t=2$.

此时三边为 $a=3, b=8, c=9$.

所以 $\cos C = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 3 \times 8} = -\frac{1}{6}$. 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{35}}{6}$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{35}}{6} = 2\sqrt{35}$ 13 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（I）由题意知，样本中仅参加学业辅导的学生有 25 人，仅参加体育锻炼的学生有 18 人，仅参加实践能力创新培养的学生有 16 人，未参加任何课后服务的学生有 14 人.

故样本中至少参加了两类课后服务的学生有 $100 - 25 - 18 - 16 - 14 = 27$ 人.

所以从全校学生中随机抽取 1 人，

该学生上个月至少参加了两类课后服务的概率估计值为 $\frac{27}{100} = 0.27$ 4 分

（II） X 的所有可能值为 0, 1, 2, 3.

从样本中随机抽取 1 人，该学生上个月仅参加学业辅导的概率为 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$,

由此估计从全校学生中随机抽取 1 人，该学生上个月仅参加学业辅导的概率为 $\frac{1}{4}$.

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{64},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^1 = \frac{9}{64},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

故 X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{27}{64} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{4}$ 10 分

(III) $D(X) < D(Y)$ 13 分

18. (本小题满分 14 分)

解: (I) 证明: 正方形 $ABCD$ 中, $CD \parallel AB$, $CD \not\subset$ 平面 BAE , $AB \subset$ 平面 BAE ,

所以 $CD \parallel$ 平面 BAE5 分

(II) 条件②符合题意.

过点 F 作 $FO \perp DC$ 于点 O , 过点 O 作 $OH \perp DC$ 且交 AB 于点 H , 连接 AO .

因为平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $CDE \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $FO \perp DC$,

所以 $FO \perp$ 平面 $ABCD$. 所以 $FO \perp OH$.

以 O 为坐标原点, 分别以 OD, OH, OF 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $CD \parallel$ 平面 BAE , $CD \subset$ 平面 CDE , 平面 $BAE \cap$ 平面 $CDE = EF$,

所以 $CD \parallel EF$.

在四边形 $CDEF$ 中, $ED = FC$, $EF = 2$, $CD = 4$, 所以 $OC = 1$, $OD = 3$.

在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, 所以 $AO = 5$.

因为 $AO \perp FO$, 且 $AF = 3\sqrt{3}$, 所以 $FO = \sqrt{2}$.

所以 $H(0, 4, 0)$, $D(3, 0, 0)$, $A(3, 4, 0)$, $E(2, 0, \sqrt{2})$, $F(0, 0, \sqrt{2})$.

所以 $\overrightarrow{DA} = (0, 4, 0)$, $\overrightarrow{DE} = (-1, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{AE} = (-1, -4, \sqrt{2})$,

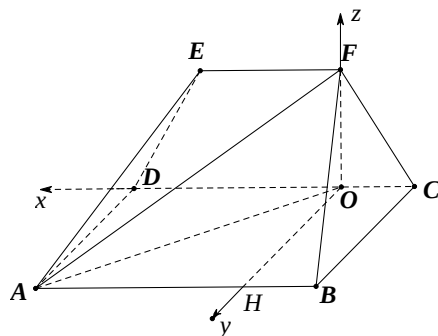
$\overrightarrow{FE} = (2, 0, 0)$.

设平面 ADE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4y_1 = 0, \\ -x_1 + \sqrt{2}z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 所以 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, 1)$.

设平面 BAE 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$.



由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{FE} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -x_2 - 4y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \\ 2x_2 = 0. \end{cases}$ 令 $y_2 = 1$, 所以 $\mathbf{m} = (0, 1, 2\sqrt{2})$.

设平面 ADE 与平面 BAE 夹角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{m}\|} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$.

所以平面 ADE 和平面 BAE 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$14 分

19. (本小题满分 15 分)

解: (I) 由题意可知 $\begin{cases} 3 - m > 0, \\ m > 0, \\ 3 - m > m. \end{cases}$ 解得 $0 < m < \frac{3}{2}$,

所以 m 的取值范围为 $(0, \frac{3}{2})$ 4 分

(II) 当 $m = 1$ 时, 曲线 W 为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,

由题意, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 1)$ ($k \neq 0$).

$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases}$ 整理得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$.

设直线 l 交椭圆 W 于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}.$

由直线 l 的方程 $y = k(x - 1)$, 令 $x = 2$, 解得 $y = k$,

所以 $P(2, k), Q(0, k)$.

所以直线 AQ 的方程为 $y = \frac{y_1 - k}{x_1}x + k, \quad x_1 \neq 0$.

令 $y = 0$, 解得 $x = \frac{kx_1}{k - y_1},$

所以 $C(\frac{kx_1}{k - y_1}, 0)$.

直线 BQ 的方程为 $y = \frac{y_2 - k}{x_2}x + k, \quad x_2 \neq 0$.

令 $y = 0$, 解得 $x = \frac{kx_2}{k - y_2},$

所以 $D(\frac{kx_2}{k - y_2}, 0)$.

$\frac{kx_1}{k - y_1} + \frac{kx_2}{k - y_2} = \frac{-k[x_1(y_2 - k) + x_2(y_1 - k)]}{(y_1 - k)(y_2 - k)}.$

由于 $y_1 - k = k(x_1 - 2), \quad y_2 - k = k(x_2 - 2).$

$$\begin{aligned}
 & \text{则 } \frac{kx_1}{k-y_1} + \frac{kx_2}{k-y_2} \\
 &= \frac{-k[x_1k(x_2-2) + x_2k(x_1-2)]}{k^2(x_1-2)(x_2-2)} \\
 &= \frac{2(x_1+x_2)-2x_1x_2}{(x_1-2)(x_2-2)} \\
 &= \frac{2(x_1+x_2)-2x_1x_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4} \\
 &= \frac{2(\frac{4k^2-2k^2+2}{1+2k^2})}{\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-\frac{8k^2}{1+2k^2}+4} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

所以线段 CD 的中点 M 的坐标为 $(1,0)$ 15 分

20. (本小题满分 15 分)

解: (I) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{2-x}{x}, \\
 f'(1) &= 1,
 \end{aligned}$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为 14 分

$$(II) \quad f(x) = 2\ln x - x - \ln a, \text{ 则 } f'(x) = \frac{2-x}{x}.$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$. 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$

单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(2) = \ln \frac{4}{ae^2}$ 10 分

(III) $g'(x) = ae^x - 2x (1 < a < e)$, 当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $x \in (-\infty, 0]$ 时单调递增. 而

$$g(0) = a > 0, \quad g(-1) = \frac{a}{e} - 1 < 0.$$

所以方程 $g(x) = 0$ 在 $x \in (-1, 0)$ 时有且只有一个根, 即方程 $g(x) = 0$ 在 $x \in (-\infty, 0]$ 时有且只有一个根.

当 $x > 0$ 时, 讨论函数 $g(x)$ 的零点个数即讨论方程 $ae^x = x^2$ 根的个数, 即研究

方程 $\ln a + x = 2\ln x (1 < a < e, x > 0)$ 的根的个数, 即研究函数 $f(x) = 2\ln x - x - \ln a (1 < a < e, x > 0)$ 的零点个数.

当 $1 < a < e$ 时, $ae^2 > e^2$, $f(2) = \ln \frac{4}{ae^2} < \ln \frac{4}{e^2} < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点.

综上, 当 $a \in (1, e)$ 时, 函数 $g(x)$ 有且仅有一个零点15 分

21. (本小题满分 15 分)

解: (I) $A_2 = \{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$, $B_2 = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$4 分

(II) 对任意 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$, 设 $b_i = a_i + 1 (i = 1, 2, 3, \dots, n)$,

则 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 均为非负整数, 且 $a_i \leq b_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$.

令 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + \dots + b_n \\ &= (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_n + 1) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n \\ &= 2n, \end{aligned}$$

所以 $\beta \in B_n$, 且 $\alpha < \beta$9 分

(III) 对任意 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$, $\alpha' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n) \in A_n$,

$$\text{记 } \alpha + \alpha' = (a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n),$$

则 $a_1 + a'_1, a_2 + a'_2, \dots, a_n + a'_n$ 均为非负整数, 且

$$\begin{aligned} & (a_1 + a'_1) + (a_2 + a'_2) + \dots + (a_n + a'_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n) \\ &= n + n = 2n, \end{aligned}$$

所以 $\alpha + \alpha' \in B_n$, 且 $\alpha < \alpha + \alpha', \alpha' < \alpha + \alpha'$.

设集合 A_n 中的元素个数为 t , 设 $A_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$.

设集合 $T_n = \{(\alpha_i, \alpha_i + \alpha_j) \mid i = 1, 2, \dots, t, j = 1, 2, \dots, t\}$.

对任意 $\alpha_i \in A_n$ ($i = 1, 2, \dots, t$), 都有 $\alpha_i + \alpha_1, \alpha_i + \alpha_2, \dots, \alpha_i + \alpha_t \in B_n$,

且 $\alpha_i < \alpha_i + \alpha_j, j = 1, 2, \dots, t$.

所以 $T_n \subseteq S_n$.

若 $(\alpha, \beta) \in S_n$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_n$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B_n$,

设 $c_i = b_i - a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 因为 $a_i \leq b_i$, 所以 $c_i = b_i - a_i \geq 0$,

记 $\alpha' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, 则

$$\begin{aligned} & c_1 + c_2 + \dots + c_n \\ &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) \\ &= (b_1 + b_2 + \dots + b_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= 2n - n = n, \end{aligned}$$

所以 $\alpha' \in A_n$, 并且有 $\beta = \alpha + \alpha'$, 所以 $(\alpha, \beta) \in T_n$, 所以 $S_n \subseteq T_n$.

所以 $S_n = T_n$.

因为集合 T_n 中的元素个数为 t^2 ,

所以 S_n 中的元素个数为 t^2 , 是完全平方数.15 分

北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

