2018 北京临川学校高三（上）期末

数　　学（理）

2018. 1

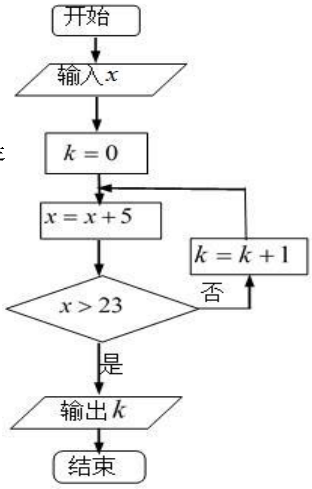
一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

(1) 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2>1\}$，那么 $\complement_U A=$

(A) $[-1,1]$　(B) $[1,+\infty)$　(C) $(-\infty,1]$　(D) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

(2) 下列四个函数中，在其定义域上既是奇函数又是单调递增函数的是

(A) $y=e^x$　(B) $y=\sin x$　(C) $y=\sqrt{x}$　(D) $y=x^3$



(3) 执行如图所示的程序框图，若输入的 x 值为 1，则输出的 k 值为

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

(4) 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是

(A) $y=-1$　(B) $y=-\frac{1}{2}$　(C) $x=-1$　(D) $x=-\frac{1}{2}$

(5) 设 (1+2i)(a+i) 的实部与虚部相等，其中 a 为实数，则 a=

(A) −3　(B) −2　(C) 2　(D) 3

(6) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x+1)\ge 0$ 的解集为

(A) $(-\infty,-1]$　(B) $(-\infty,1]$　(C) $[-1,+\infty)$　(D) $[1,+\infty)$

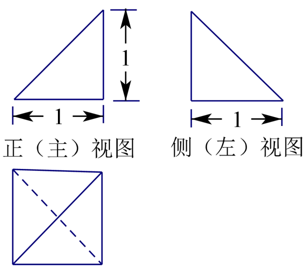
(7) 为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{5}{6}$

(8) 设 $a=\ln\frac{1}{2}, b=2^{\frac{1}{e}}, c=e^{-2}$，则

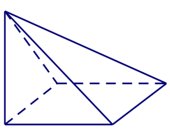
(A) $c<b<a$　(B) $c<a<b$　(C) $a<c<b$　(D) $a<b<c$

(9) 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的直观图是

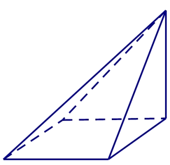


正（主）视图　侧（左）视图

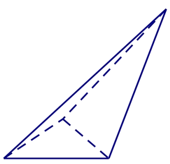
俯视图



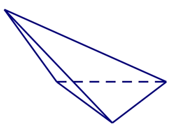
(A)



(B)



(C)

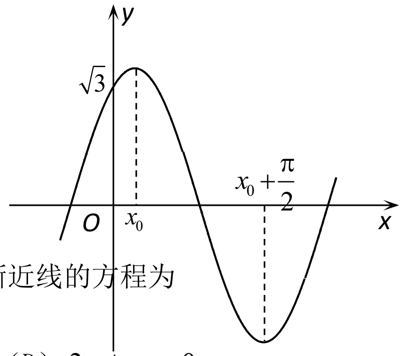


(D)

(10) 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图象如图所示，则函数 $f(x)$ 的解析式的值为

(A) $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　(B) $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

(C) $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$　(D) $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$



(11) 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 的一个焦点是 $(2,0)$，则其渐近线的方程为

(A) $x\pm\sqrt{3}y=0$　(B) $\sqrt{3}x\pm y=0$　(C) $x\pm 3y=0$　(D) $3x\pm y=0$

(12) 若 $a>0$，$a\neq 1$，则函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数是函数 $y=(2-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数的

(A)充分而不必要条件　(B)必要而不充分条件　(C)充分必要条件　(D)既不充分也不必要条件

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

(13) 在极坐标系中，过点 $P(2,\frac{\pi}{6})$ 且平行于极轴的直线的方程是____ .

(14) 若 x,y 满足 $\begin{cases} y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x+y-3\leq 0, \end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值为____ .

(15) 已知角 α 终边经过点 $P(3,4)$，则 $\cos 2\alpha=$_____ .

(16) 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2,BC=1$，那么 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=$___ ；

若 E 为线段 AC 上的动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的取值范围是____ .

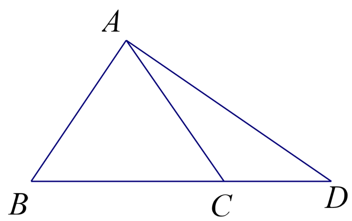
三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

(17) (本小题满分 12 分)

已知△ABC 是等边三角形，D 在 BC 的延长线上，且 $CD=2$，$S_{\Delta ABD}=6\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求 AB 的长；

(Ⅱ)求 $\sin\angle CAD$ 的值.



(18) (本小题满分 12 分)

A、B 两个班共有 65 名学生，为调查他们的引体向上锻炼情况，通过分层抽样获得了部分学生引体向上的测试数据（单位：个），用茎叶图记录如下：

A班		B班
9 7 5	0	5 6 7 8 9
5 3 1	1	0 1

(Ⅰ) 试估计 B 班的学生人数；

(Ⅱ) 从 A 班和 B 班抽出的学生中，各随机选取一人，A 班选出的人记为甲，B 班选出的人记为乙，假设所有学生的测试相对独立，比较甲、乙两人的测试数据得到随机变量 ξ. 规定：

当甲的测试数据比乙的测试数据低时，记 $\xi=-1$，

当甲的测试数据与乙的测试数据相等时，记 $\xi=0$，

当甲的测试数据比乙的测试数据高时，记 $\xi=1$．　求随机变量 ξ 的分布列及期望.

（III）再从 A、B 两个班中各随机抽取一名学生，他们引体向上的测试数据分别是 10，8（单位：个），这 2 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记 μ_1，表格中数据的平均数记为 μ_0，试判断 μ_0 和 μ_1 的大小（结论不要求证明）．

（19）（本小题 12 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，满足 $a_1=3$，$a_4=24$，数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 4，公差为 1 的等差数列.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(20) (本小题满分 12 分) 如图 1，四边形 $ABCD$ 为正方形，延长 DC 至 E，使得 $CE=2DC$，

将四边形 $ABCD$ 沿 BC 折起到 A_1BCD_1 的位置，使平面 $A_1BCD_1\perp$ 平面 BCE，如图 2.

（I）求证：$CE\perp$ 平面 A_1BCD_1；

（II）求异面直线 BD_1 与 A_1E 所成角的大小；

（III）求平面 BCE 与平面 A_1ED_1 所成锐二面角的余弦值.

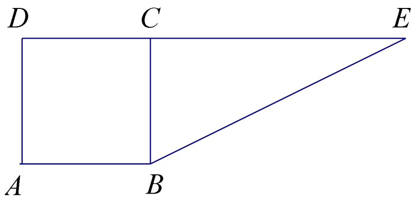


图1

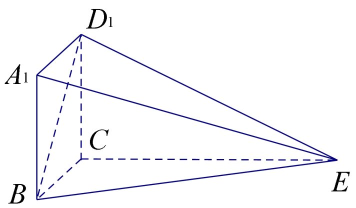


图2

(21)(本小题满分 12 分) 设函数 $f(x)=\ln(1+ax)+bx$， $g(x)=f(x)-bx^2$.

(Ⅰ) 若 $a=1,b=-1$，求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ) 若曲线 $y=g(x)$ 在点 $(1,\ln 3)$ 处的切线与直线 $11x-3y=0$ 平行.

(i) 求 a,b 的值;

(ii) 求实数 $k(k\le 3)$ 的取值范围，使得 $g(x)>k(x^2-x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

(22) (本小题满分 10 分)

椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，且点 $M(\sqrt{2},1)$ 在椭圆 C 上. 过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A,B 两点, 点 B 关于 y 轴的对称点为点 D (不同于点 A).

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 证明：直线 AD 恒过定点，并求出定点坐标.

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题 号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	9	10	11	12
答 案	A	D	B	D	C	C	C	C	C	B	B	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(13) $\rho\sin\theta=1$　　(14) 6　　(15) $-\dfrac{7}{25}$　　(16) 4； $[-4,1]$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

(17) (本小题满分 12 分).　解：(Ⅰ) 设 $AB=x$.

因为 ΔABC 是等边三角形，所以 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$.

因为 $S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABC$，所以 $6\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}x(x+2)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

即 $x^2+2x-24=0$. 所以 $x=4, x=-6$（舍）.

所以 $AB=4$.　　……………6 分

(Ⅱ) 因为 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABC$，

所以 $AD^2=16+36-2\times4\times6\times\dfrac{1}{2}=28$. 所以 $AD=2\sqrt{7}$.　在 ΔACD 中，因为

$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，所以 $\sin\angle CAD=\dfrac{CD\cdot\sin\angle ACD}{AD}=\dfrac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. …12 分

(18) (本小题满分 12 分)

解：(Ⅰ) 由题意可知，抽出的 13 名学生中，来自 B 班的学生有 7 名. 根据分层抽样方法，

B 班的学生人数估计为 $65\times\dfrac{7}{13}=35$（人）.　　……………3 分

(Ⅱ) $P(\xi=-1)=\dfrac{12}{6\times7}=\dfrac{2}{7}$； $P(\xi=0)=\dfrac{4}{6\times7}=\dfrac{2}{21}$；

$P(\xi=1)=1-P(\xi=-1)-P(\xi=0)=\dfrac{13}{21}$，　则 ξ 的概率分布为：

ξ	-1	0	1
P	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{13}{21}$

$E\xi=-1\times\frac{2}{7}+0\times\frac{2}{21}+1\times\frac{13}{21}=\frac{1}{3}$. ……………10 分

（Ⅲ） $\mu_1>\mu_0$. ……………12 分

（19）.（共 12 分）解:（Ⅰ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q

由题意，得 $q^3=\frac{a_4}{a_1}=8$， $q=2$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$. ……………3 分

又数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 4，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_n+b_n=4+(n-1)\cdot 1$.

从而 $b_n=(n+3)-3\times 2^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$. ……………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $b_n=(n+3)-3\times 2^{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$

数列 $\{n+3\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n(n+7)}{2}$. ……………9 分

数列 $\{3\cdot 2^{n-1}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3(1-2^n)}{1-2}=3\times 2^n-3$. ……………11 分

所以，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n(n+7)}{2}-3\times 2^n+3$. ………12 分

(20) (本小题满分 12 分)

解：（Ⅰ）证明：因为平面 $A_1BCD_1\perp$ 平面 BCE，且平面 $A_1BCD_1\cap$ 平面 $BCE=BC$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，E 在 DC 的延长线上，所以 $CE\perp BC$.

因为 $CE\subset$ 平面 BCE，所以 $CE\perp$ 平面 A_1BCD_1 4 分

（Ⅱ）法一：连接 A_1C . 因为 A_1BCD_1 是正方形，

所以 $A_1C\perp BD_1$. 因为 $CE\perp$ 平面 A_1BCD_1，

所以 $CE\perp BD_1$. 因为 $A_1C\cap CE=C$，

所以 $BD_1\perp$ 平面 A_1CE，所以 $BD_1\perp A_1E$.

所以异面直线 BD_1 与 A_1E 所成的角是 $90°$. …………9 分

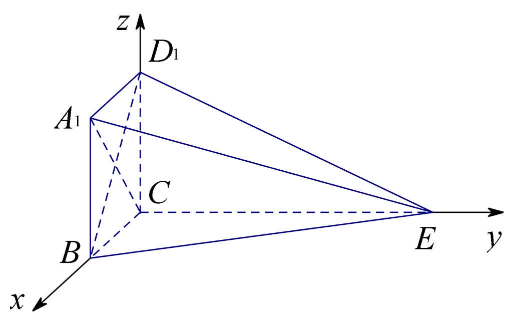


图2

法二：以 C 为坐标原点，建立空间直角坐标系如图所示. 设 $CD=1$, 则 $CE=2$.

则 $C(0,0,0), B(1,0,0), E(0,2,0), D_1(0,0,1), A_1(1,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{BD_1}=(-1,0,1), \overrightarrow{A_1E}=(-1,2,-1)$. 因为 $\cos<\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{A_1E}>=\frac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{|\overrightarrow{BD_1}||\overrightarrow{A_1E}|}=\frac{1+0-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=0$，

所以 $\overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{A_1E}$． 所以异面直线 BD_1 与 A_1E 所成的角是 $90°$． ……………9 分

(III) 因为 $CD_1 \perp$ 平面 BCE，所以平面 BCE 的法向量 $\overrightarrow{CD_1}=(0,0,1)$．

设平面 A_1D_1E 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$．

因为 $\overrightarrow{D_1A_1}=(1,0,0),\overrightarrow{D_1E}=(0,2,-1)$，

所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1A_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=0\\ 2y-z=0\end{cases}$．设 $y=1$，则 $z=2$．所以 $\vec{n}=(0,1,2)$．

因为 $\cos<\overrightarrow{CD_1},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{CD_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CD_1}||\vec{n}|}=\dfrac{0+0+2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

所以平面 BCE 与平面 A_1ED_1 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$． ………12 分

(21)(本小题满分 12 分)解：（Ⅰ）当 $a=1,b=-1$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-x,(x>-1)$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$．当 $f'(x)>0$ 时，$-1<x<0$；

当 $f'(x)<0$ 时，$x>0$；

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$，单调减区间为 $(0,+\infty)$． ……………4 分

（Ⅱ）(i)因为 $g(x)=f(x)-bx^2=\ln(1+ax)+b(x-x^2)$，

所以 $g'(x)=\dfrac{a}{1+ax}+b(1-2x)$．依题设有 $\begin{cases}g(1)=\ln(1+a),\\ g'(1)=\dfrac{11}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\ln(1+a)=\ln 3,\\ \dfrac{a}{1+a}-b=\dfrac{11}{3}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$． ……8 分

(i i)所以 $g(x)=\ln(1+2x)-3(x-x^2),x\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$．

$g(x)>k(x^2-x)$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $g(x)-k(x^2-x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $F(x)=g(x)-k(x^2-x)$．则有 $F'(x)=\dfrac{4(3-k)x^2+k-1}{1+2x}$．

① 当 $1\le k\le 3$ 时，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，

所以 $\mathrm{F}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)>F(0)=0$，即当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>k(x^2-x)$；

②当 $k<1$ 时，当 $x\in(0,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}})$ 时，$F'(x)<0$，所以 $\mathrm{F}(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}})$ 上单调递减，

故当 $x\in(0,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-k}{3-k}})$ 时，$F(x)<F(0)=0$，即当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>k(x^2-x)$ 不恒成立.

综上，$k\in[1,3]$． …………12 分

(22)(本小题满分 10 分)解：(I)法一

设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知得 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ c=\sqrt{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$. 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………6 分

法二，设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

由已知得 $c=\sqrt{2}$，$2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{[\sqrt{2}-(-\sqrt{2})]^2+1}+1=4$.

所以 $a=2$，$b^2=a^2-c^2=2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………6 分

(II)法一　　当直线 l 的斜率存在时（由题意 $k\neq0$），设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

则 $\begin{cases}\Delta=16k^2+8(2k^2+1)>0,\\ x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1},\\ x_1x_2=-\frac{2}{2k^2+1}.\end{cases}$　　特殊地，当 A 为 $(2,0)$ 时，$k=-\frac{1}{2}$，所以 $2x_2=-\frac{4}{3}$，$x_2=-\frac{2}{3}$，$y_2=\frac{4}{3}$，即 $B(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$.

所以点 B 关于 y 轴的对称点 $D(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$，则直线 AD 的方程为 $y=-(x-2)$.

又因为当直线 l 斜率不存时，直线 AD 的方程为 $x=0$，

如果存在定点 Q 满足条件，则 $Q(0,2)$.

所以 $k_{QA}=\frac{y_1-2}{x_1}=\frac{y_1-1-1}{x_1}=k-\frac{1}{x_1}$，$k_{QD}=\frac{y_2-2}{-x_2}=\frac{y_2-1-1}{-x_2}=-k+\frac{1}{x_2}$，

又因为 $k_{QA}-k_{QB}=2k-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})=2k-(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2})=2k-2k=0$，

所以 $k_{QA}=k_{QD}$，即 A,D,Q 三点共线.

即直线 AD 恒过定点，定点坐标为 $Q(0,2)$．　　　　…………12 分

法二　(II)①当直线 l 的斜率存在时（由题意 $k\neq 0$），设直线 l 的方程为 $y=kx+1$ ．

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$，可得 $(1+2k^2)x^2+4kx-2=0$．设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $D(-x_2,y_2)$．

所以 $\begin{cases} \Delta=16k^2+8(2k^2+1)>0, \\ x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1}, \\ x_1x_2=-\frac{2}{2k^2+1}. \end{cases}$　因为 $k_{AD}=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}$，

所以直线 AD 的方程为：$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}(x-x_1)$．

所以 $y=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{x_1y_2-x_1y_1}{x_2+x_1}+y_1=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{x_1y_2-x_1y_1+x_2y_1+x_1y_1}{x_2+x_1}$

$=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{x_1(kx_2+1)+x_2(kx_1+1)}{x_2+x_1}$

$=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{2kx_1x_2+x_2+x_1}{x_2+x_1}=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+\frac{2kx_1x_2}{x_2+x_1}+1=\frac{y_2-y_1}{-x_2-x_1}\cdot x+2$．

因为当 $x=0,y=2$，所以直线 MD 恒过 $(0,2)$ 点.

②当 k 不存在时，直线 AD 的方程为 $x=0$，过定点 $(0,2)$．

综上所述，直线 AD 恒过定点，定点坐标为 $(0,2)$．　　　　…………12 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao