北京市朝阳区2023～2024学年度第一学期期中质量检测

高三数学参考答案

2023.11

一、选择题(共10小题,每小题4分,共40分)

(1)D　　(2)B　　(3)C　　(4)A　　(5)C

(6)B　　(7)D　　(8)D　　(9)A　　(10)B

二、填空题(共5小题,每小题5分,共25分)

(11)2　　(12)$\frac{\pi}{3}$　　(13)1,−1

(14)$30\sqrt{6}$　　(15)②③④

三、解答题(共6小题,共85分)

(16)(共13分)

解:(Ⅰ)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

由题意知 $a_1+a_2+a_3=26$.

因为 $a_2=6$,所以$\frac{6}{q}+6q=20$,

化简得 $3q^2-10q+3=0$,即$(3q-1)(q-3)=0$.

解得 $q=\frac{1}{3}$或 $q=3$.

因为数列$\{a_n\}$为递增数列,所以 $q=3$.

所以 $a_1=2$.

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2\times3^{n-1}$.

所以 $S_n=2+2\times3+2\times3^2+\cdots+2\times3^{n-1}$

$=2\times\frac{1-3^n}{1-3}$

$=3^n-1$. ……………………………………………………… 8分

(Ⅱ)由 $S_n+a_n>2024$,得 $3^n-1+2\times3^{n-1}=5\times3^{n-1}-1>2024$.

所以 $3^{n-1}>405$.

因为 $3^5=243<405<729=3^6$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,

所以 $n-1\geqslant6$.

所以 $n\geqslant7$,即 n 的最小值为7. ……………………………………………… 13分

(17)(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $b^2+c^2-a^2=bc$,

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$,

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)选①②.

由 $\cos B=\dfrac{11}{14}$,又 $0<B<\pi$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,得 $\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$.

所以 $a=\dfrac{7}{5}b$.

又因为 $a+b=12$,

所以 $a=7, b=5$.

又因为 $b^2+c^2-a^2=bc$,

所以 $c^2-5c-24=0$,即 $(c+3)(c-8)=0$,

解得 $c=8$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 5\times 8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$. ……………………………… 13 分

(Ⅱ)选①③.

由 $\cos B=\dfrac{11}{14}$,又 $0<B<\pi$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,得 $\dfrac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$.

所以 $a=\dfrac{21}{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{21}{2}\times 12\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{45\sqrt{3}}{2}$. ……………………………… 13 分

(18)(共 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $PA\perp$ 平面 ABC,又 $AB,BC\subset$ 平面 ABC,

所以 $PA\perp AB$,$PA\perp BC$.

在 $Rt\triangle PAB$ 中,因为 $PA=2$,$PB=2\sqrt{3}$,

所以 $AB=\sqrt{PB^2-PA^2}=2\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中,因为 $AC=BC=2$,$AB=2\sqrt{2}$,所以 $AC\perp BC$.

又因为 $PA\cap AC=A$,$PA,AC\subset$ 平面 PAC,

所以 $BC\perp$ 平面 PAC. ………………………………………………………… 5 分

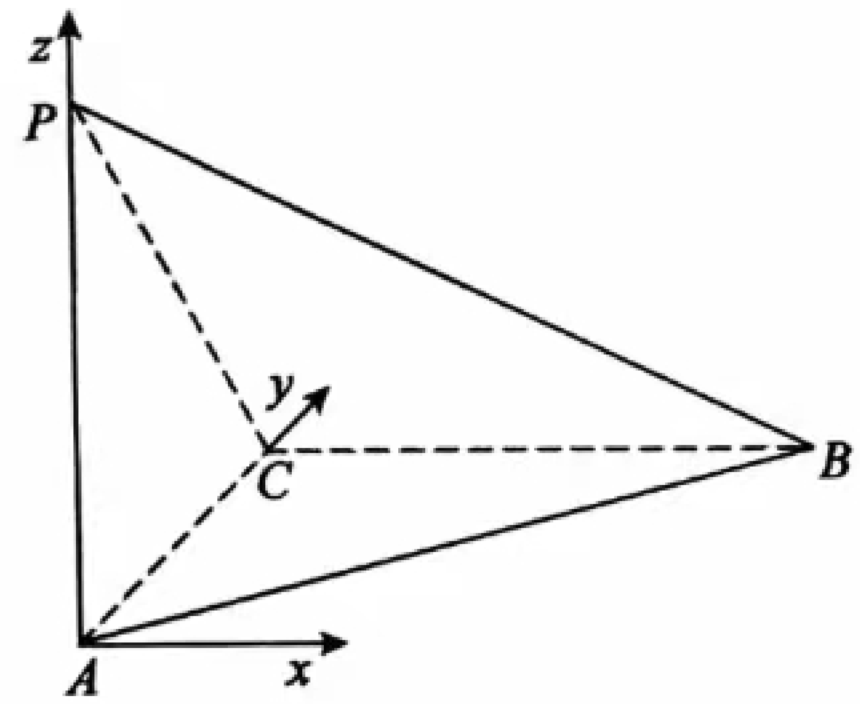
(Ⅱ)过点 A 在平面 ABC 内作 $Ax\perp AC$.

因为 $PA\perp$ 平面 ABC,所以 $PA\perp AC$,$PA\perp Ax$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$P(0,0,2)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CP}=(0,-2,2)$.



设平面 ABP 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_1+2y_1=0,\\ 2z_1=0.\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ z_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$.

设平面 CBP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CP}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x_2=0,\\ -2y_2+2z_2=0.\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x_2=0,\\ z_2=y_2.\end{cases}$

令 $y_2=1$,则 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

设二面角 $A-PB-C$ 为 θ,则

$$|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}.$$

由题可知,二面角 $A-PB-C$ 为锐角,

所以二面角 $A-PB-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 12 分

(Ⅲ)设点 C 到平面 PAB 的距离为 d,

则 $d=\left|\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. ……………………………………………… 15 分

(19)(共 14 分)

解:(Ⅰ)若 $a=0$,则 $f(x)=e^x-\sin x$,

$f'(x)=e^x-\cos x$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,所以 $e^x\geq 1$,$0\leq\cos x\leq 1$.

则 $f'(x)=e^x-\cos x\geqslant 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 $f(0)=e^0-\sin 0=1$,

最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\sin\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}}-1$. ………………………………………… 6 分

(Ⅱ)考虑 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时函数 $f(x)$ 的变化情况.

设 $g(x)=f'(x)=e^x-\cos x-2ax,x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

则 $g'(x)=e^x+\sin x-2a$.

当 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 时,$g'(x)$ 单调递增,

所以 $g'(x)$ 的最小值为 $g'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1-2a$.

① 若 $g'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1-2a\geqslant 0$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)$ 时,

$g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=0$,

所以当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$, $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减,

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

② 当 $g'(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1-2a<0$,即 $\frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)<a<\frac{1}{2}$ 时,$g'(0)=1-2a>0$.

因此存在 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$,使得 $g'(x_0)=0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},x_0)$ 上单调递减,在区间 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=0$,

所以,当 $x\in(x_0,0)$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,$f(x)$ 在区间 $(x_0,0)$ 上单调递减,

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)>0$, $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

综上,当 $a<\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值. ……………………………… 14 分

(20)(共 15 分)

解:(Ⅰ)若 $m=1$,则 $f(x)=x\ln x-x^2+1$, $f'(x)=\ln x+1-2x$.

所以 $f(1)=0$, $f'(1)=-1$.

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为:$y-f(1)=f'(1)(x-1)$,

即 $x+y-1=0$. ………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由已知得 $f'(x)=m(1+\ln x)-2x(x\geqslant 1)$.

设 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=\dfrac{m}{x}-2=\dfrac{-2x+m}{x}$.

① 当 $\dfrac{m}{2}\leqslant 1$,即 $m\leqslant 2$ 时,$g'(x)\leqslant 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $f'(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f'(x)\leqslant f'(1)=m-2\leqslant 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$,符合题意.

② 当 $\dfrac{m}{2}>1$,即 $m>2$ 时,当 $x\in(1,\dfrac{m}{2})$ 时,$g'(x)>0$,

所以 $f'(x)$ 在区间 $(1,\dfrac{m}{2})$ 上单调递增,

所以当 $x\in(1,\dfrac{m}{2})$ 时,$f'(x)>f'(1)=m-2>0$,$f(x)$ 在区间 $(1,\dfrac{m}{2})$ 上单调递增,

所以 $f(x)>f(1)=0$,不符合题意.

综上,m 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………………………… 12 分

(Ⅲ)$\ln 4<\sqrt{2}$,理由如下:

由(Ⅱ)知 $m=2$ 时,$2x\ln x-x^2+1<0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立,

即 $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$.

令 $x=\sqrt{2}$,得 $2\ln\sqrt{2}<\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $\ln 2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\ln 4=2\ln 2<\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… 15 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ)$A_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ 是 Γ_3 数表,

$d(a_{1,1},a_{2,2})+d(a_{2,2},a_{3,3})=2+3=5$. …………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由题可知 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=|a_{i,j}-a_{i+1,j}|+|a_{i+1,j}-a_{i+1,j+1}|=1(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$.

当 $a_{i+1,j}=1$ 时,有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=(a_{i,j}-1)+(a_{i+1,j+1}-1)=1$,

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$.

当 $a_{i+1,j}=2$ 时,有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=(2-a_{i,j})+(2-a_{i+1,j+1})=1$,

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$.

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$.

所以 $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+a_{4,4}=3+3=6$, $a_{1,3}+a_{2,4}=3$, $a_{3,1}+a_{4,2}=3$.

$a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+1=4$ 或 $a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+2=5$.

$a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+1=4$ 或 $a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+2=5$.

$a_{1,4}=1$ 或 $a_{1,4}=2$, $a_{4,1}=1$ 或 $a_{4,1}=2$.

故各数之和 $\geqslant 6+3+3+4+4+1+1=22$.

当 $A_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$ 时,

各数之和取得最小值 22.(例子不唯一) …………………………………… 9 分

(Ⅲ)由于 Γ_4 数表 A_{10} 中共 100 个数字,

必然存在 $k\in\{1,2,3,4\}$,使得数表中 k 的个数 T 满足 $T\geqslant 25$.

设第 i 行中 k 的个数为 $r_i(i=1,2,\cdots,10)$.

当 $r_i\geqslant 2$ 时,将横向相邻两个 k 用从左向右的有向线段连接,

则该行有 r_i-1 条有向线段.

所以横向有向线段的起点总数 $R=\sum\limits_{r_i\geqslant 2}(r_i-1)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{10}(r_i-1)=T-10$.

设第 j 列中 k 的个数为 $c_j(j=1,2,\cdots,10)$.

当 $c_j\geqslant 2$ 时,将纵向相邻两个 k 用从上到下的有向线段连接,

则该列有 c_j-1 条有向线段.

所以纵向有向线段的终点总数 $C=\sum\limits_{c_j\geqslant 2}(c_j-1)\geqslant\sum\limits_{j=1}^{10}(c_j-1)=T-10$.

所以 $R+C\geqslant 2T-20$.

因为 $T\geqslant 25$,所以 $R+C-T\geqslant 2T-20-T=T-20>0$.

所以必存在某个 k 既是横向有向线段的起点,又是纵向有向线段的终点,

即存在 $1<u<v\leqslant 10$, $1<p<q\leqslant 10$,使得 $a_{u,p}=a_{v,p}=a_{v,q}=k$,

所以 $d(a_{u,p},a_{v,q})=|a_{u,p}-a_{v,p}|+|a_{v,p}-a_{v,q}|=0$. ……………………………… 15 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！