

2024 北京人大附中高一（上）期末

数 学

2024.01

说明：I 卷满分 100 分、II 卷满分 50 分、全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{-2, -1, 0\}$ ，则 $\complement_U A =$ ()

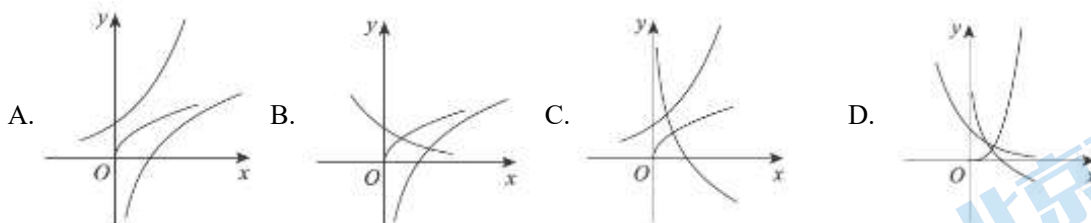
- A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $(0, 2)$ D. $(1, 2)$

2. 某学校有高中学生 1500 人，初中学生 1000 人。学生社团创办文创店，想了解初高中学生对学校吉祥物设计的需求，用分层抽样的方式随机抽取若干人进行问卷调查。已知在初中学生中随机抽取了 100 人，则在高中学生中抽取了 ()

- A. 150 人 B. 200 人 C. 250 人 D. 300 人

3. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x+2 \leq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x+2 > 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x+2 < 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x+2 > 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x+2 < 0$

4. 在同一个坐标系中，函数 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = a^{-x}$, $h(x) = x^a$ 的部分图象可能是 ()5. 下列函数中，既是奇函数，又在 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $f(x) = \sqrt{x}$ B. $f(x) = -x|x|$
C. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ D. $f(x) = x^3$

6. 已知 $a = 2^{0.1}$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$ ，则实数 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$
C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

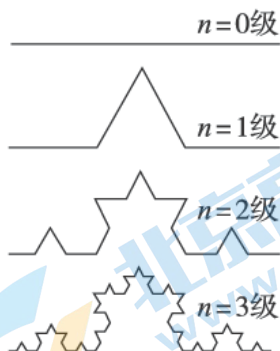
7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{a}{2}$ ，则“ $a=1$ ”是“ $f(x)$ 为奇函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+1) + x - 2$ ，则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

9. 科赫(Koch)曲线是几何中最简单的分形. 科赫曲线的产生方式如下: 如图, 将一条线段三等分后, 以中间一段为边作正三角形并去掉原线段生成 1 级科赫曲线“”, 将 1 级科赫曲线上每一线段重复上述步骤得到 2 级科赫曲线, 同理可得 3 级科赫曲线……在分形中, 一个图形通常由 N 个与它的上一级图形相似, 且相似比为 r 的部分组成. 若 $r^D = \frac{1}{N}$, 则称 D 为该图形的分形维数. 那么科赫曲线的分形维数是 ()

A. $\log_2 3$ B. $\log_3 2$

C. 1

D. $2\log_3 2$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+a, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$, 若存在非零实数 x_0 , 使得 $f(-x_0) = -f(x_0)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0]$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ C. $[-4, 0]$ D. $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

11. 函数 $f(x) = \lg(x-1)$ 的定义域是_____.

12. 农科院作物所了解某种农作物的幼苗质量, 分别从该农作物在甲、乙两个不同环境下培育的幼苗中各随机抽取了 15 株幼苗进行检测, 量出它们的高度如下图 (单位: cm):

甲		乙
5 3 3 2 1	3	7
9 5 4 3	4	3 4 5 5 7 8 8 9
9 8 7 5	5	2 4 4 5 8
5 3	6	0

记该样本中甲、乙两种环境下幼苗高度的中位数分别为 a, b , 则 $|a-b| =$ _____;

若以样本估计总体, 记甲、乙两种环境下幼苗高度的标准差分别为 s_1, s_2 , 则 s_1 _____ s_2 (用 “<, >或=” 连接).

13. 已知函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} - a$ 没有零点, 则 a 的一个取值为_____; a 的取值范围是_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的单调递增区间为_____；满足 $|f(x)| < 4 \times 10^4$ 的整数解的个数为_____。（参考数据： $\lg 2 \approx 0.30$ ）

15. 共享单车已经逐渐成为人们在日常生活中必不可少的交通工具。通过调查发现人们在单车选择时，可以使用“Tullock 竞争函数”进行近似估计，其解析式为 $S(x) = \frac{x^a}{x^a + (1-x)^a}$, $x \in [0, 1]$, $a > 0$ （其中参数 a 表示市场外部性强度， a 越大表示外部性越强）。给出下列四个结论：

- ① $S(x)$ 过定点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ；
- ② $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增；
- ③ $S(x)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称；
- ④ 取定 x ，外部性强度 a 越大， $S(x)$ 越小。

其中所有正确结论的序号是_____。

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 国务院正式公布的《第一批全国重点文物保护单位名单》中把重点文物保护单位（下述简称为“第一批文保单位”）分为六大类，其中“A:革命遗址及革命纪念建筑物”、“B:石窟寺”、“C:古建筑及历史纪念建筑物”、“D:石刻及其他”、“E:古遗址”、“F:古墓葬”。北京的 18 个“第一批文保单位”所在区分布如下表：

行政区	门类	个数
东城区	A: 革命遗址及革命纪念建筑物	3
	C: 古建筑及历史纪念建筑物	5
西城区	C: 古建筑及历史纪念建筑物	2
丰台区	A: 革命遗址及革命纪念建筑物	1
海淀区	C: 古建筑及历史纪念建筑物	2
房山区	C: 古建筑及历史纪念建筑物	1
	E: 古遗址	1
昌平区	C: 古建筑及历史纪念建筑物	1
	F: 古墓葬	1
延庆区	C: 古建筑及历史纪念建筑物	1

(1) 某个研学小组随机选择北京市“第一批文保单位”中的一个进行参观，求选中的参观单位恰好为“C:古建筑及历史纪念建筑物”的概率；

(2) 小王同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“A:革命遗址及革命纪念建筑物”中的一个进行参观；小张同学随机选择北京市“第一批文保单位”中的“C:古建筑及历史纪念建筑物”中的一个进行参观，两人选择参观单位互不影响，求两人选择的参观单位恰好在同一个区的概率；

(3) 现在拟从北京市“第一批文保单位”中的“C:古建筑及历史纪念建筑物”中随机抽取2个单位进行常规检查，记抽到海淀区的概率为 P_1 ，抽不到海淀区的概率记为 P_2 ，试判断 P_1 和 P_2 的大小（直接写出结论）。

17. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \left\{x \mid \left|x - \frac{5}{2}\right| \geq \frac{3}{2}\right\}$.

(1) 求 $A \cup B, A \cap_{\mathbf{R}} B$;

(2) 记关于 x 的不等式 $x^2 - (2m+4)x + m^2 + 4m \leq 0$ 的解集为 M ，若 $B \cup M = \mathbf{R}$ ，求实数 m 的取值范围。

18. 已知函数 $f(x) = \ln(1-x) + k \ln(1+x)$ 。请从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，解答下面的问题。

条件①: $f(x) + f(-x) = 0$;

条件②: $f(x) - f(-x) = 0$ 。

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答记分。

(1) 求实数 k 的值；

(2) 设函数 $F(x) = (1-x)(1+x)^k$ ，判断函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上的单调性，并给出证明；

(3) 设函数 $g(x) = f(x) + x^k + 2|k|$ ，指出函数 $g(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上的零点个数，并说明理由。

19. 已知函数 $f(x), g(x), h(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ ，给出下面两个定义：

①若存在唯一的 $x \in \mathbf{R}$ ，使得 $f(g(x)) = h(f(x))$ ，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 唯一交换；

②若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，均有 $f(g(x)) = h(f(x))$ ，则称 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换。

(1) 请判断函数 $g(x) = x+1$ 与 $h(x) = x-1$ 关于 $f(x) = x^2$ 是唯一交换还是任意交换，并说明理由；

(2) 设 $f(x) = a(x^2 + 2)$ ($a \neq 0$), $g(x) = x^2 + bx - 1$ ，若存在函数 $h(x)$ ，使得 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 任意交换，求 b 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，若 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于 $w(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 唯一交换，求 a 的值。

20. 从定义域及值域均为 $\{1,2,3\}$ 的函数中随机选一个记为 $f(x)$, 则 $\frac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)} > 0$ 的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

21. $\{x \in \mathbb{Z} \mid \lg x > x-1\}$ 为 ()

- A. 空集 B. 元素个数不超过 10 的非空集
C. 元素个数超过 10 的有限集 D. 无限集

22. 已知函数 $f(x) = x^2(x-3)e^{1-x} + 1$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$, $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$, 单调递减区间是 $(0, 3-\sqrt{3})$, $(3+\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x)$ 的零点个数为 ()

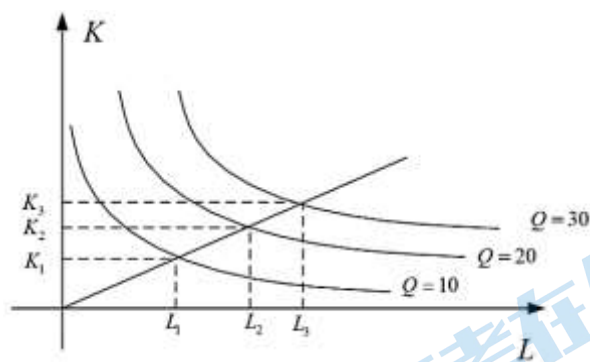
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

23. 若 $a2^a = 2b\log_4 2b$, 则 ()

- A. $2a < b$ B. $2a > b$
C. $2^a < b$ D. $2^a > b$

24. 在企业生产经营过程中, 柯布-道格拉斯生产函数有着广泛的应用, 这是双自变量的函数, 其表达式为: $Q = AL^\alpha K^\beta$, 其中自变量 L, K 分别表示生产过程中劳动要素和资本要素的投入, 函数值 Q 表示产量, 常数 A 是代表生产技术水平

的参数, 常数 α, β 分别表示劳动和资本的产出弹性系数. 在产量 Q 不变的情况下, 点 (L, K) 组合构成一条曲线, 称为等效产出曲线. 如图, 某企业



$Q=10, 20, 30$ 时的等效产出曲线分别与过原点的射线交于点 $(L_1, K_1), (L_2, K_2), (L_3, K_3)$, 若 $L_1=2$, $L_2=3$, 则 L_3 约为 ()

参考数据: $\log_2 3 \approx 1.585$, $3^{0.5} \approx 1.732$, $3^{0.55} \approx 1.830$, $3^{0.6} \approx 1.933$

- A. 3.2 B. 3.4 C. 3.6 D. 3.8

二. 填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置.)

25. 已知 $f(x) = ae^x + e^{-x}$. 若 $f(0) = 3$, 则实数 $a =$ _____; 若 $y = f(x)$ 的图像关于原点对称, 则实数 $a =$ _____.

26. 已知 $f(x) = x + \frac{a}{x} - 2$, 其中 $a > 0$. 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, 则 a 的取值范围是 _____; 若 $\exists x \in [1, 2]$, $f(x) \geq 2$, 则 a 的取值范围是 _____.

27. 为研究拇指指纹规律, 人大附中生物社团随机抽样调查了 500 名北京市民的左右手拇指指纹, 各种纹形出现次数的统计结果如表所示. ① 从左右手拇指纹形同为 “As” 或同为 “Wr” 的样本中, 随机抽 2 人, 这 2 人纹形不同的概率是 _____;

② 随机调查 3 名北京市民，其中 1 人左右手 拇指指纹都是“Lu, Lr”，另外 2 人左手拇指 指纹都是“Ws”，右手拇指指纹都不是“Ws” 的概率是_____.

纹形	拇指		
	左手	右手	左右手纹形相同
As	20	2	2
Lu, Lr	279	304	250
Wr	3	6	2
Wc	32	27	10
Wt	30	28	9
Ws	59	79	34
Wd	65	37	18
Wp	12	17	8
总人数	500	500	333

28. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，若对任意的正实数 a ，函数 $y = f(x+a) - f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有性质 M ，给出下列四个结论：

- ① $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $f(x)$ 具有性质 M ；
- ② $y = x^2$ 具有性质 M ， $y = x^3$ 不具有性质 M ；
- ③ $y = 2^x$ 具有性质 M ， $y = 2^{-x}$ 不具有性质 M ；
- ④ 若函数 $f(x)$ 具有性质 M ，且 $f(0) = 0$ ，则 $\forall s, t \in (0, +\infty)$ ， $f(t+s) > f(t) + f(s)$ 。

其中所有正确结论的序号是_____.

29. 零件 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 分别先在机器 A 上加工，然后在机器 B 上加工，加工所需时间（单位：分钟）如表所示.

- ① 若加工顺序为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 ，则加工完所有零件所需时间最少为_____分钟；
- ② 改变这 5 个零件的加工顺序，可以使得加工完所有零件所需 时间更少，所需时间最少为_____分钟，共有_____种排序方法使得所需时间最少.

零件 \ 机床	A	B
X_1	1	5
X_2	8	3
X_3	3	9
X_4	4	5
X_5	7	6

参考答案

I卷

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】B

【分析】根据补集概念求解出结果.

【详解】因为 $U = -2, -1, 0, 1, 2$, $A = \{-2, -1, 0\}$,

所以 $\complement_U A = \{1, 2\}$,

故选: B.

2. 【答案】A

【分析】根据各层的抽样比相同求解出结果.

【详解】因为初中学生 1000 人抽取了 100 人, 所以抽样比为 $\frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$,

所以高中生抽取 $1500 \times \frac{1}{10} = 150$ 人,

故选: A.

3. 【答案】C

【分析】根据特称命题的否定是全称命题分析判断.

【详解】由题意可知: 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x+2 \leq 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x+2 > 0$ ”.

故选: C.

4. 【答案】C

【分析】先根据 $f(x), g(x)$ 的单调性相反排除 AD, 然后根据幂函数图象判断出 a 的范围, 由此可知正确图象.

【详解】因为 $f(x) = \log_a x, g(x) = a^{-x}$ 在同一坐标系中,

所以 $f(x), g(x)$ 的单调性一定相反, 且 $f(x), g(x)$ 图象均不过原点, 故排除 AD;

在 BC 选项中, 过原点的图象为幂函数 $h(x) = x^a$ 的图象, 由图象可知 $0 < a < 1$,

所以 $f(x) = \log_a x$ 单调递减, $g(x) = a^{-x}$ 单调递增, 故排除 B,

故选: C.

5. 【答案】B

【分析】利用定义判断函数的奇偶性可对 A、C 判断; 利用函数奇偶性的判断并结合函数单调性可对 B、D 判断.

【详解】对 A、C: 由 $f(x) = \sqrt{x}$, 定义域为 $[0, +\infty)$, 所以 $f(x) = \sqrt{x}$ 不是奇函数, 故 A 错误;

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 是偶函数, 故 C 错

误;

对 B、D: $f(x) = -x|x|$, 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = -(-x)|-x| = x|x| = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2$, 且 $f(x) = -x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 正确;

$f(x) = x^3$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 所以 $f(x) = x^3$ 为奇函数, 且在定义域上为增函数, 故 D 错误;

故选: B.

6. 【答案】D

【分析】根据题意结合指、对数函数单调性运算求解.

【详解】因为 $b = \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3$, $c = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2$,

由 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 可得 $2^{0.1} > 2^0 = 1$, 即 $a > 1$;

由 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 可得 $1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$, 即 $\frac{1}{2} < b < 1$;

由 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 可得 $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$, 即 $c < \frac{1}{2}$;

综上所述: $a > b > c$.

故选: D.

7. 【答案】C

【分析】根据“ $a=1$ ”与“ $f(x)$ 为奇函数”互相推出的情况判断属于何种条件.

【详解】当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$, 定义域为 $\mathbf{R}$ 且关于原点对称,

所以 $f(-x) = \frac{1}{2^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2} = \frac{2^x+1-1}{1+2^x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2^x} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数;

当 $f(x)$ 为奇函数时, 显然定义域为 $\mathbf{R}$ 且关于原点对称, 所以 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(-x) + f(x) = \left(\frac{1}{2^{-x}+1} - \frac{a}{2} \right) + \left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{a}{2} \right) = \left(\frac{2^x}{1+2^x} - \frac{a}{2} \right) + \left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{a}{2} \right) = 1 - a = 0$,

所以 $a=1$,

由上可知, “ $a=1$ ”是“ $f(x)$ 为奇函数”的充要条件,

故选: C.

8. 【答案】B

【分析】先求出 $f(x)$ 的定义域，然后分析 $f(x)$ 的单调性，再根据 $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1)$ 求解出不等式解集.

【详解】 $f(x) = \log_2(x+1) + x - 2$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

因为 $y = \log_2(x+1)$, $y = x - 2$ 均在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) = \log_2(x+1) + x - 2$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $f(1) = \log_2 2 + 1 - 2 = 0$, 所以 $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1)$,

所以不等式解集为 $x \in (-1, 1)$,

故选: B.

9. 【答案】D

【分析】根据题意得出 Koch 曲线是由把全体缩小 $\frac{1}{3}$ 的 4 个相似图形构成的, 再根据题设条件即可得出结果.

【详解】由题意 Koch 曲线是由把全体缩小 $\frac{1}{3}$ 的 4 个相似图形构成的,

因为 $\left(\frac{1}{3}\right)^D = \frac{1}{4}$, 即 $3^D = 4$, 则 $D = \log_3 4 = 2\log_3 2$,

所以分形维数是 $D = 2\log_3 2$.

故选: D.

10. 【答案】D

【分析】利用赋值和排除法可得结果

【详解】取 $a = \frac{1}{4}$, 则 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4}, & x \leq \frac{1}{4} \\ x^2, & x > \frac{1}{4} \end{cases}$,

若 $\begin{cases} x_0 \leq \frac{1}{4} \\ -x_0 > \frac{1}{4} \end{cases}$, 则 $x_0 < -\frac{1}{4}$, 由 $f(-x_0) = -f(x_0)$, 得 $x_0^2 = -\left(x_0 + \frac{1}{4}\right)$,

解得 $x_0 = -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$, 符合条件, 排除选项 A、C,

取 $a = -4$, 则 $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \leq -4 \\ x^2, & x > -4 \end{cases}$,

若 $x_0 \leq -4$ 时, $-x_0 \geq 4$, 由 $f(-x_0) = -f(x_0)$, 得 $x_0^2 = -(x_0 - 4)$,

解得 $x_0 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, 或 $x_0 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, 都不符合条件,

若 $\begin{cases} x_0 > -4 \\ -4 < -x_0 < 4 \end{cases}$, 即 $-4 < x_0 < 4$, 由 $f(-x_0) = -f(x_0)$,

得 $x_0^2 = -x_0^2$, 即 $x_0 = 0$, 不符合条件,

若 $\begin{cases} x_0 > -4 \\ -x_0 \leq -4 \end{cases}$, 即 $x_0 \geq 4$, 由 $f(-x_0) = -f(x_0)$,

得 $-x_0 - 4 = -x_0^2$, 解得 $x_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, 或 $x_0 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, 都不符合条件,

综上, $a \neq -4$, 排除 B, 选 D

故选: D.

二、填空题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

11. 【答案】 $(1, +\infty)$

【分析】 利用真数大于零列不等式求解即可.

【详解】 要使函数 $f(x) = \lg(x-1)$ 有意义,

则 $x-1 > 0$, 解得 $x > 1$,

即函数 $f(x) = \lg(x-1)$ 的定义域是 $(1, +\infty)$,

故答案为: $(1, +\infty)$.

【点睛】 本题主要考查对数型复合函数的定义域, 属于基础题.

12. 【答案】 ①. 3 ②. >

【分析】 空① 根据题意分别求出甲乙环境下的15个高度数据, 从而求出中位数, 即可求解; 空② 利用标准差公式分别求出 s_1, s_2 , 从而求解.

【详解】 对空①: 由题意得甲环境的幼苗高度为: 31, 32, 33, 33, 35, 43, 44, 45, 49, 55, 57, 58, 59, 63, 65, 其中位数 $a = 45$,

乙环境的幼苗高度为: 37, 43, 44, 45, 45, 47, 48, 48, 49, 52, 54, 54, 55, 58, 60, 其中位数 $b = 48$,

所以 $|a-b| = |45-48| = 3$;

对空②: 甲环境下的幼苗平均高度为:

$$\frac{31+32+33+33+35+43+44+45+49+55+57+58+59+63+65}{15} = 46.8,$$

所以: $32 - 46.8 = -14.8$, $33 - 46.8 = -13.8$, $35 - 46.8 = -11.8$, $43 - 46.8 = -3.8$, $44 - 46.8 = -2.8$, $45 - 46.8 = -1.8$, $49 - 46.8 = 2.2$, $55 - 46.8 = 8.2$, $57 - 46.8 = 10.2$, $58 - 46.8 = 11.2$, $59 - 46.8 = 12.2$, $63 - 46.8 = 16.2$, $65 - 46.8 = 18.2$

甲环境下的幼苗平均高度为:

$$\frac{37+43+44+45+45+47+48+48+49+52+54+54+55+58+60}{15} = \frac{739}{15}$$

所以

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{15} \left[\left(37 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(43 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(44 - \frac{739}{15}\right)^2 + 2 \times \left(45 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(47 - \frac{739}{15}\right)^2 + 2 \times \left(48 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(49 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(52 - \frac{739}{15}\right)^2 + 2 \times \left(54 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(55 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(58 - \frac{739}{15}\right)^2 + \left(60 - \frac{739}{15}\right)^2 \right]} \approx 5.99$$

所以 $s_1 > s_2$.

故答案为: 3; >.

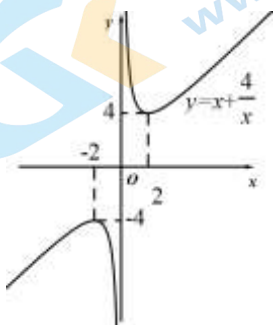
13. 【答案】 ①. 0 ($a \in (-4, 4)$ 即可) ②. $-4 < a < 4$

【分析】根据题意分析可知函数 $f(x)$ 没有零点, 等价于 $y = x + \frac{4}{x}$ 与 $y = a$ 没有交点, 结合对勾函数图象分析求解.

【详解】令 $f(x) = x + \frac{4}{x} - a = 0$, 则 $x + \frac{4}{x} = a$,

若函数 $f(x)$ 没有零点, 等价于 $y = x + \frac{4}{x}$ 与 $y = a$ 没有交点,

作出 $y = x + \frac{4}{x}$ 的图象, 如图所示:



由图象可知: 若 $y = x + \frac{4}{x}$ 与 $y = a$ 没有交点, 则 $-4 < a < 4$,

故答案为: 0 ($a \in (-4, 4)$ 即可); $-4 < a < 4$.

14. 【答案】 ①. $(-\infty, +\infty)$ ②. 215

【分析】第一个空, 作出 $f(x)$ 的图象, 由图可知 $f(x)$ 的单调递增区间; 第二个空, 分 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ 两种情况解不等式.

【详解】作出 $f(x)$ 的图象, 由图可知, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$,

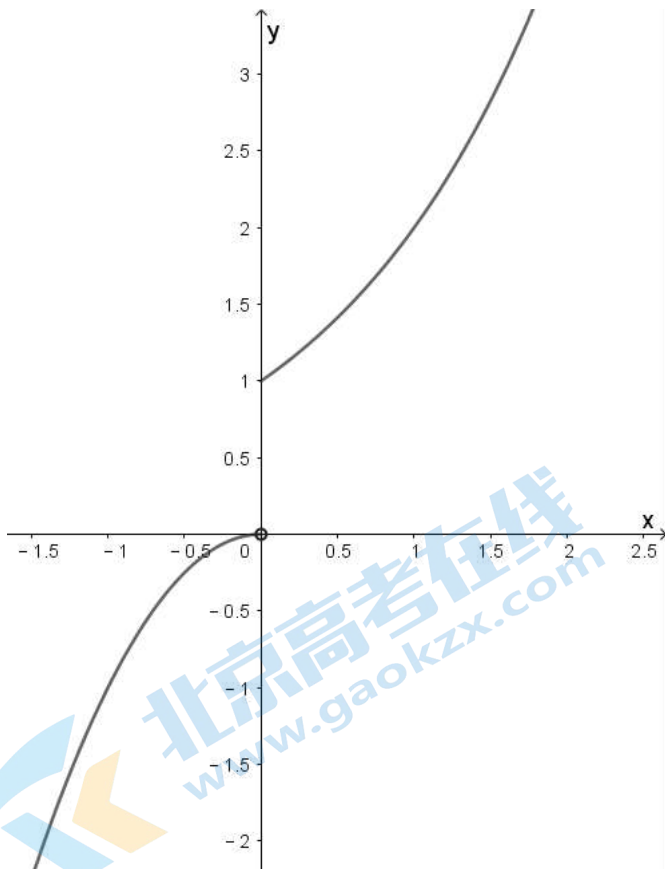
当 $x \geq 0$ 时, $|f(x)| = |2^x| = 2^x < 4 \times 10^4$, 解得 $x < \log_2(4 \times 10^4)$, 即 $x < 2 + \frac{4}{\lg 2} \approx 15.3$,

所以 $0 \leq x < 15.3$,

当 $x < 0$ 时, $|f(x)| = |-x^2| = x^2 < 4 \times 10^4$, 解得 $-200 < x < 0$,

故满足 $|f(x)| < 4 \times 10^4$ 的整数解的个数为 215.

故答案为: $(-\infty, +\infty)$; 215.



15. 【答案】①②

【分析】对于①令 $x = \frac{1}{2}$ 即可求得定点可判断①的正误；对于②对 $S(x)$ 求导，判断导函数在 $x \in [0, 1]$ 时的正负即可判断②的正误；对于③由②即可判断正误；对于④以 a 为自变量构造新函数，求导，判断单调性即可判断正误。

【详解】对于①，在 $S(x)$ 中，令 $x = \frac{1}{2}$ ，则 $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^a}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^a} = \frac{1}{2}$ ，过定点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ，故①正确；

对于②， $S'(x) = \frac{a[x(1-x)]^{a-1}}{[x^a + (1-x)^a]^2}$ ，当 $x \in [0, 1]$ ， $S'(x) \geq 0$ ，则 $S(x)$ 为单调递增，故②正确；

对于③，由②知 $S(x)$ 为单调递增，故不存在对称性，故③错误；

对于④，以 a 为自变量，设 $S(x)$ 为 $T(a)$ ，则 $T'(a) = \frac{[x(1-x)]^a}{[x^a + (1-x)^a]^2} \ln \frac{x}{1-x}$ ，

$\because a > 0$ ，故 $\frac{[x(1-x)]^a}{[x^a + (1-x)^a]^2} > 0$ ， $T'(a)$ 的正负取决于 $\ln \frac{x}{1-x}$ ，

当 $\frac{x}{1-x} < 1$, 即 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $T'(a) < 0$, 随着 a 的增大, $S(x)$ 减小;

当 $\frac{x}{1-x} > 1$, 即 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $T'(a) > 0$, 随着 a 的增大, $S(x)$ 增大, 故④错误.

故答案为: ①②.

三、解答题共 4 小题, 共 40 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{5}{16}$

(3) $P_1 < P_2$

【分析】(1) 由题意知总样本数为 18, C: 古建筑及历史纪念建筑物共有 12, 利用古典概率从而求解.

(2) 由题意可知小王参观 A: 革命遗址及革命纪念建筑物与小张参观 C: 古建筑及历史纪念建筑物在同一个区的只有东城区, 然后分别求出他们参观东城区的概率, 从而求解.

(3) 利用分类讨论求出相应的抽到海淀区的概率 P_1 和抽不到海淀区的概率 P_2 , 从而求解.

【小问 1 详解】

设选中参观单位恰好为 “C: 古建筑及历史纪念建筑物” 为事件 A,

由题意知总共有 18, “C: 古建筑及历史纪念建筑物” 有 12,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

【小问 2 详解】

设两人选择的参观单位恰好在同一个区为事件 B, 由题意可知小王参观 A: 革命遗址及革命纪念建筑物与小张参观 C: 古建筑及历史纪念建筑物在同一个区的只有东城区,

所以小王参观东城区景区的概率为 $\frac{3}{4}$, 小张参观东城区景区的概率为 $\frac{5}{12}$,

$$\text{所以 } P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{16}.$$

【小问 3 详解】

当抽到的 2 个都是海淀区的概率为 $\frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$,

当抽到的 2 个中有 1 个是海淀区的概率为 $\frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$,

$$\text{所以 } P_1 = \frac{1}{66} + \frac{5}{33} = \frac{1}{6}, \quad P_2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

所以 $P_1 < P_2$.

17. 【答案】(1) $A \cup B = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | 1 < x < 2\}$

$$(2) \{m|0 \leq m \leq 1\}$$

【分析】(1) 先求解出一元二次不等式、绝对值不等式的解集为集合 A, B ，然后根据并集概念求解出 $A \cup B$ ，再根据交集和补集概念求解出 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B$ ；

(2) 根据不等式先求解出 M ，然后根据 $B \cup M = \mathbf{R}$ 列出关于 m 的不等式组，由此求解出结果。

【小问 1 详解】

因为 $x^2 - x - 2 < 0$ ，解得 $-1 < x < 2$ ，所以 $A = \{x | -1 < x < 2\}$ ，

又因为 $\left|x - \frac{5}{2}\right| \geq \frac{3}{2}$ ，解得 $x \geq 4$ 或 $x \leq 1$ ，所以 $B = \{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$ ，

所以 $A \cup B = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$ ；

又因为 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x | 1 < x < 4\}$ ，

所以 $A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{x | 1 < x < 2\}$ 。

【小问 2 详解】

因为 $x^2 - (2m+4)x + m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-(m+4)) \leq 0$ ，

所以 $M = \{x | m \leq x \leq m+4\}$ ，

若 $B \cup M = \mathbf{R}$ ，则 $\begin{cases} m \leq 1 \\ m+4 \geq 4 \end{cases}$ ，解得 $0 \leq m \leq 1$ ，

所以 m 的取值范围是 $\{m | 0 \leq m \leq 1\}$ 。

18. 【答案】(1) 答案见解析

(2) $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减，证明见解析

(3) $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有且仅有一个零点，理由见解析

【分析】(1) 根据题意结合奇偶性的定义分析求解；

(2) 根据单调性的定义分析证明；

(3) 根据题意结合单调性以及奇偶性的性质判断 $g(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 上的单调性，再结合零点存在性定理分析判断。

【小问 1 详解】

令 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ ，解得 $-1 < x < 1$ ，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ ，

若选①：因为 $f(x) + f(-x) = 0$ ，即 $f(x)$ 为奇函数，

则 $\ln(1-x) + k \ln(1+x) + \ln(1+x) + k \ln(1-x) = 0$ ，

整理得 $(1+k) \ln(1-x^2) = 0$ ，

注意到对任意 $x \in (-1, 1)$ 上式均成立, 可得 $1+k=0$, 解得 $k=-1$;

若选②: 因为 $f(x)-f(-x)=0$, 即 $f(x)$ 为偶函数,

$$\text{则 } \ln(1-x)+k \ln(1+x)-[\ln(1+x)+k \ln(1-x)]=0,$$

$$\text{整理得 } (1-k) \ln \frac{1-x}{1+x} = 0,$$

注意到对任意 $x \in (-1, 1)$ 上式均成立, 可得 $1-k=0$, 解得 $k=1$.

【小问 2 详解】

$$\text{若选①: 则 } k=-1, \text{ 可得 } F(x)=(1-x)(1+x)^{-1}=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1,$$

可知函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 证明如下:

对任意 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } F(x_1)-F(x_2)=\left(\frac{2}{1+x_1}-1\right)-\left(\frac{2}{1+x_2}-1\right)=\frac{2}{1+x_1}-\frac{2}{1+x_2}=\frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)},$$

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $1+x_1 > 0, 1+x_2 > 0, x_2-x_1 > 0$,

可得 $F(x_1)-F(x_2) > 0$, 即 $F(x_1) > F(x_2)$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减;

$$\text{若选②: 则 } k=1, \text{ 可得 } F(x)=(1-x)(1+x)=1-x^2,$$

可知函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 证明如下:

对任意 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } F(x_1)-F(x_2)=(1-x_1^2)-(1-x_2^2)=x_2^2-x_1^2=(x_1+x_2)(x_2-x_1),$$

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $x_1+x_2 > 0, x_2-x_1 > 0$,

可得 $F(x_1)-F(x_2) > 0$, 即 $F(x_1) > F(x_2)$,

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.

【小问 3 详解】

$$\text{若选①: 则 } k=-1, \text{ 则 } g(x)=f(x)+\frac{1}{x}+2=\ln \frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{x}+2,$$

由 (2) 可知 $F(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 且 $y=\ln x$ 在定义域内单调递增,

可知 $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=\ln \frac{1-x}{1+x}$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

又因为 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递减,

且 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递减, 可知 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递减,

$$\text{结合 } g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln 3 > 0, \quad g\left(-\frac{1}{10}\right) = \ln \frac{11}{9} - 8 < 0,$$

可知 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有且仅有一个零点;

$$\text{若选②: 则 } k=1, \text{ 则 } g(x) = f(x) + x + 2 = \ln(1-x^2) + x + 2,$$

由 (2) 可知 $F(x) = 1-x^2$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 且 $y = \ln x$ 在定义域内单调递增,

可知 $f(x) = \ln(1-x) + \ln(1+x) = \ln(1-x^2)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减,

又因为 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递增,

且 $y = x + 2$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递增, 可知 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内单调递增,

$$\text{结合 } g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{4} + \frac{3}{2} > \ln \frac{1}{e} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0, \quad g\left(-\frac{99}{100}\right) = \ln \frac{199}{10000} + \frac{101}{100} < \ln \frac{1}{e^2} + 2 = 0,$$

可知 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有且仅有一个零点.

19. 【答案】(1) 唯一交换, 理由见解析

$$(2) \quad b = 0$$

$$(3) \quad a = \frac{1-e}{2(e+1)}$$

【分析】(1) 根据方程 $f(g(x)) = h(f(x))$ 解的情况判断即可;

(2) 根据“对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(g(x)) = h(f(x))$ 成立”得到关于 x 的方程, 然后设出 $h(x)$ 的解析式, 根据方程左右两边对应项相同求解出 b 的值;

(3) 根据条件通过分离参数将问题转化为“存在唯一实数 x , 使得 $a = \frac{\frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$ ”, 然后分析

$$s(x) = \frac{\frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left[\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2+2\right]}$$
 的奇偶性, 从而确定出 $a = s(0)$, 由此可求 a 的值.

【小问 1 详解】

$g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 是唯一交换, 理由如下:

$$\text{因为 } f(g(x)) = (x+1)^2, \quad h(f(x)) = x^2 - 1,$$

$$\text{令 } f(g(x)) = h(f(x)), \text{ 所以 } (x+1)^2 = x^2 - 1, \text{ 解得 } x = -1,$$

所以 $f(g(x)) = h(f(x))$ 有唯一解 $x = -1$,

所以 $g(x)$ 与 $h(x)$ 关于 $f(x)$ 是唯一交换.

【小问 2 详解】

由题意可知, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(g(x)) = h(f(x))$ 成立,

即对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $a[(x^2 + bx - 1)^2 + 2] = h(a(x^2 + 2))$;

考虑到等式左右两边最高次和最高次项的系数相等, 不妨设 $h(x) = \frac{1}{a}x^2 + cx + d$,

所以 $a[(x^2 + bx - 1)^2 + 2] = \frac{1}{a}[a(x^2 + 2)]^2 + c \cdot a(x^2 + 2) + d$,

所以 $a(x^4 + b^2x^2 + 1 + 2bx^3 - 2x^2 - 2bx + 2) = ax^4 + 4ax^2 + 4a + acx^2 + 2ac + d$,

所以 $\begin{cases} 2ab^2 = 0 \\ a(b^2 - 2) = 4a + ac \\ 3a = 4a + 2ac + d \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} b = 0 \\ c = -6 \\ d = 11a \end{cases}$, 即可取 $h(x) = \frac{1}{a}x^2 - 6x + 11a$,

经检验 $h(x) = \frac{1}{a}x^2 - 6x + 11a$ 满足要求,

综上所述, $b = 0$.

【小问 3 详解】

当 $b = 0$ 时, $g(x) = x^2 - 1$,

因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于 $w(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 唯一交换,

所以存在唯一实数 x , 使得 $w(x^2 - 1) = f\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$,

即存在唯一实数 x , 使得 $\frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2-1} + 1} = a\left[\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 + 2\right]$,

即存在唯一实数 x , 使得 $a = \frac{\frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2-1} + 1}}{\left[\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 + 2\right]}$;

令 $s(x) = \frac{\frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2-1} + 1}}{\left[\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 + 2\right]}$, $q(x) = \frac{e^{x^2-1} - 1}{e^{x^2-1} + 1}$, $p(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 + 2$, 且 $s(x), q(x), p(x)$ 定义域均为 $\mathbf{R}$,

又

$$q(-x) = \frac{e^{(-x)^2-1}-1}{e^{(-x)^2-1}+1} = \frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1} = q(x),$$

$$p(-x) = \left(\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} \right)^2 + 2 = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x} \right)^2 + 2 = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2 + 2 = p(x),$$

所以 $q(x), p(x)$ 都是偶函数, 所以 $s(x)$ 为偶函数,

因此, 若存在唯一实数 x 使得 $a = \frac{\frac{e^{x^2-1}-1}{e^{x^2-1}+1}}{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)^2 + 2}$, 只能是 $a = s(0)$,

所以 $a = \frac{\frac{\frac{1}{e}-1}{\frac{1}{e}+1}}{2} = \frac{1-e}{2(e+1)}$,

综上所述, a 的取值为 $\frac{1-e}{2(e+1)}$.

【点睛】关键点点睛: 本题考查函数的新定义, 涉及方程解以及函数奇偶性等相关问题, 对学生的理解与计算能力要求较高, 难度较大. “新定义”题型的关键是根据新定义的概念、新公式、新定理、新法则、新运算去解决问题, 本题第二问可以从方程左右两边对应相等入手, 第三问则可以从函数的奇偶性入手进行分析.

II卷

一、选择题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

20. B 21. B 22. C 23. D 24. D

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

25. 2; -1

26. $a \geq 1$; $a \geq 3$

27. $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{800}$

28. ②④

29. 32; 29; 7

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜

京考一点通

