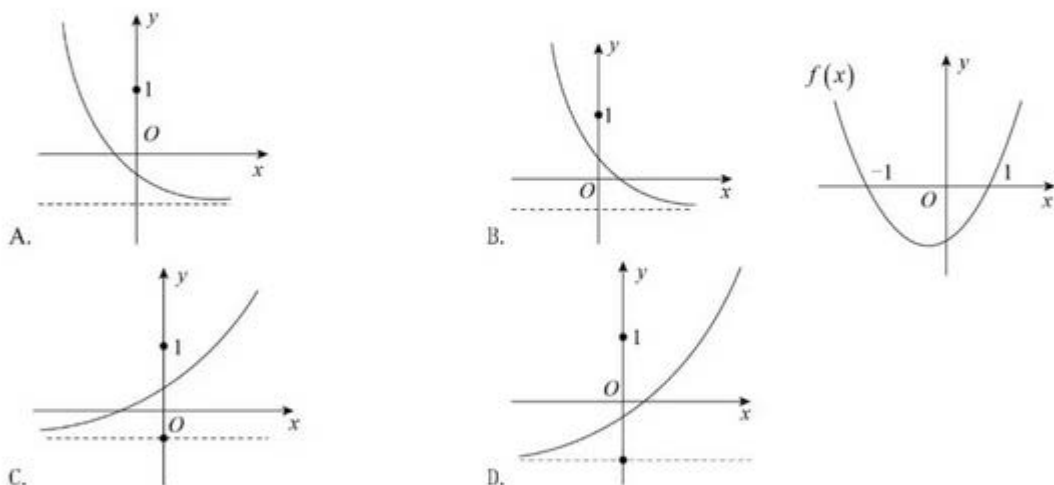


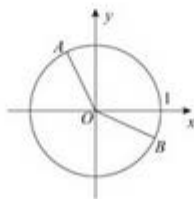
北京五中 2019-2020 学年度第一学期第一次阶段性考试试卷
高三数学

一、 选择题

1. 已知集合 $A = \{x | 2x - a > 0\}$, $B = \{x | \log_2(x - 2) \leq 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是()
A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 4]$ C. $[4, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
2. 已知 $a = \log_{0.6} 1.6$, $b = 1.6^{0.6}$, $c = 0.6^{1.6}$, 则实数 a, b, c 的大小关系是()
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$
3. 对于非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, “ $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ ” 是 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 成立的()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知函数 $f(x) = (x-a)(x-b)$ (其中 $a > b$) 的图象如下面右图所示, 则函数 $g(x) = a^x + b$ 的图象是()



5. 如图 (晓观数学), 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 分别是单位圆 O 上的点, 角 α 、 β 的终边分别为射线 OA 和射线 OB , 则 $x_1x_2 + y_1y_2$ 表示的值为()



- A. $\sin(\alpha + \beta)$ B. $\sin(\alpha - \beta)$ C. $\cos(\alpha + \beta)$ D. $\cos(\alpha - \beta)$

6. $\triangle ABC$ 内角 A 、 B 、 C 的对边分别是 a 、 b 、 c ，已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$ ， $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，则 $\frac{b}{c} = (\quad)$

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 3

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}, \omega > 0$) 的图象在 y 轴右侧的第一个最高点为 $P(\frac{\pi}{6}, 1)$ ，在原点右侧与

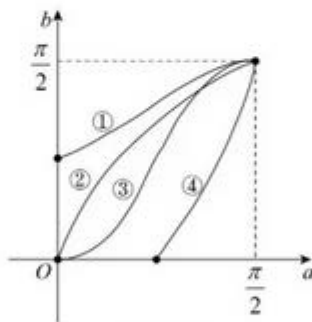
x 轴的第一个交点为 $Q(\frac{5\pi}{12}, 0)$ ，则 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值为 $(\quad)$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 在直角坐标系 xOy 中，对于点 (x, y) ，定义变换 σ ：将点 (x, y) 变换为点 (a, b) ，使得其中 $\begin{cases} x = \tan a \\ y = \tan b \end{cases}$ ，其

中 $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 。这样变换 σ 就将坐标系 xOy 内的曲线变换为坐标系 aOb 内的曲线，则四个函数

$y_1 = 2x (x > 0)$ 、 $y_2 = x^2 (x > 0)$ 、 $y_3 = e^x (x > 0)$ 、 $y_4 = \ln x (x > 1)$ 在坐标系 xOy 内的图象，变换为坐标系 aOb 内的四条曲线(如图)依次是 $(\quad)$



- A. ②③①④ B. ③②④① C. ②③④① D. ③②①④

二、填空题

9. $\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知平面向量 a, b 满足 $a \cdot (a + b) = 3$ ，且 $|a| = 2$ ， $|b| = 1$ ，则向量 a 与 b 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (晓观数学)， $\tan(\alpha - \pi) = -\frac{3}{4}$ ，则 $\sin \alpha + \cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ \log_2(x+1), & 0 \leq x < 3 \end{cases}$, 对于任意 $x \in R$ 都有 $f(x+2) = f(x-2)$, 若在

区间 $[-5, 3]$ 内函数 $g(x) = f(x) - mx + m$ 恰有三个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{9}\right)$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 则 ω 可以是_____.

14. 函数 $y = f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A 、 k_B . 规定

$\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$ ($|AB|$ 为线段 AB 的长度) 叫做曲线 $y = f(x)$ 在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”, 给出以下命

题:

① 函数 $y = x^3 - x^2 + 1$ 图象上两点 A 与 B 的横坐标分别为 1 和 2, 则 $\varphi(A, B) > \sqrt{3}$;

② 存在这样的函数, 图象上任意两点之间的“弯曲度”为常数;

③ 设点 A, B 是抛物线 $y = x^2 + 1$ 上不同的两点, 则 $\varphi(A, B) \leq 2$;

④ 设曲线 $y = e^x$ (e 是自然对数的底数) 上不同两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 且 $x_1 - x_2 = 1$, 若 $t \cdot \varphi(A, B) < 1$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

其中真命题的序号为_____. (将所有真命题的序号都填上)

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \sin^2 x + 1$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值及函数的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值. (晓观数学)

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别是 a 、 b 、 c , 且 $a < b < c$, $\sqrt{3}a = 2b \sin A$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a = 2$, $b = \sqrt{7}$, 求 c 边的长和 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 空气质量指数 $PM_{2.5}$ (单位: $\mu g/m^3$) 表示每立方米空气中可吸入肺颗粒物的含量, 这个值越高, 就代表空气污染越严重:

$PM_{2.5}$ 日均浓度	0~35	35~75	75~115	115~150	150~250	> 250
空气质量级别	一级	二级	三级	四级	五级	六级
空气质量类别	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染

甲、乙两城市 2013 年 2 月份中的 15 天对空气质量指数 $PM_{2.5}$ 进行监测, 获得 $PM_{2.5}$ 日均浓度指数数据如茎叶图所示:

(1) 根据你所学的统计知识估计甲、乙两城市 15 天内哪个城市空气质量总体较好? (注: 不需说明理由)

(2) 在 15 天内任取 1 天, 估计甲、乙两城市空气质量类别均为优或良的概率;

(3) 在乙城市 15 个监测数据中任取 2 个, 设 X 为其中空气质量类别为优或良的天数, 求 X 的分布列及数学期望. (晓观数学)

甲城市	乙城市
3 0 2 2 4	3 2 0 4
4 8 9 6	5 5
6 1 5 1	6 4
7 8	7 6 9 7
8 2 3 0	8 8 0 7
9 8	9 1 8 0 9

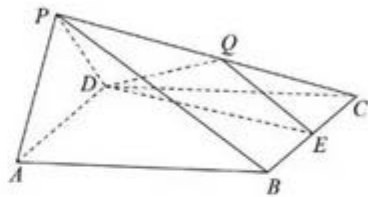
18. 四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ，

$PA = PD = \sqrt{2}$ ， E 是 BC 中点，点 Q 在侧棱 PC 上。

(1) 求证： $AD \perp PB$ ；

(2) 若 Q 是 PC 中点，求二面角 $E-DQ-C$ 的余弦值；

(3) 是否存在 Q ，使 $PA \parallel$ 平面 DEQ ？若存在，求出 $\frac{PQ}{PC}$ 的值；若不存在，说明理由。



19. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $0 < a < 3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 的最大值为 M ，最小值为 m ，求 $M - m$ 的（晓观数学）取值范围。

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距为 $2\sqrt{2}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A, B .

(1) 求椭圆 M 的方程;

(2) 设 $P(-2, 0)$, 直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D , 若 C, D 与

点 $Q\left(-\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 共线, 求斜率 k 的值. (晓观数学)