2023 北京八十中初三（上）期中

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1．2022 年冬奥会会徽和冬残奥会会徽部分作品图中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）


A．


B．


C．

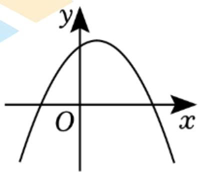

D．

2．已知⊙O 的半径为 5，点 P 到圆心 O 的距离为 8，那么点 P 与⊙O 的位置关系是（　　）

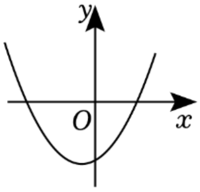
A．点 P 在⊙O 上　　　　B．点 P 在⊙O 内

C．点 P 在⊙O 外　　　　D．无法确定

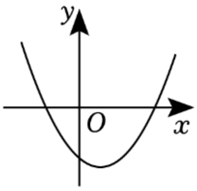
3．如果在二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a>0$，$b<0$，$c<0$，那么这个二次函数的图象可能是（　　）



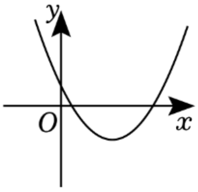
A．



B．

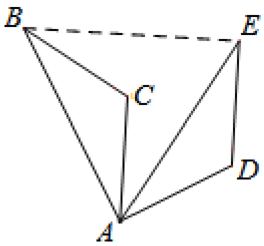


C．



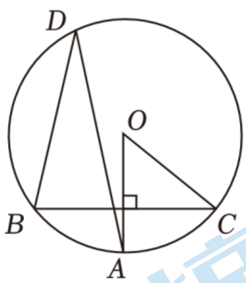
D．

4．如图，将△ABC 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到△AED，若线段 $AB=3$，则 $BE=$（　　）



A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

5．如图，在⊙O 中，$OA\perp BC$，$\angle ADB=25°$．则 $\angle AOC$ 的度数为（　　）



A．30°　　　　B．45°　　　　C．50°　　　　D．55°

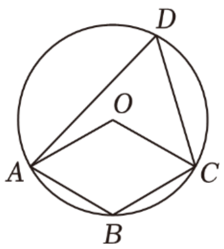
6．根据下列表格中二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，判断方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$，a，b，c 为常数）的一个解 x 的范围是（　　）

x	6.17	6.18	6.19	6.20
$y=ax^2+bx+c$	- 0.03	- 0.01	0.02	0.04

A．$6<x<6.17$　　B．$6.17<x<6.18$

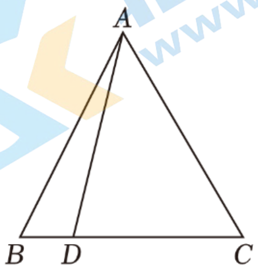
C．$6.18<x<6.19$　　D．$6.19<x<6.20$

7．如图，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，且∠AOC＝120°，则∠ABC 的度数为（　　）



A．130°　　B．120°　　C．110°　　D．100°

8．如图，在边长为 4 的等边△ABC 中，点 D 为 BC 边上的动点．设 x＝BD，$y_1=AD^2$，y_2＝$S_{\triangle ACD}$，则 y_1，y_2 与对应的 x 满足的函数关系分别是（　　）



A．二次函数，一次函数

B．二次函数，二次函数

C．一次函数、一次函数

D．一次函数、正比例函数

二、填空题（本题共 16 分，每题 2 分）

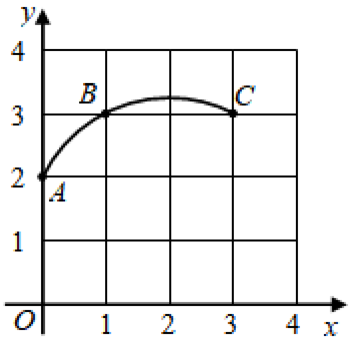
9．将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 4 个单位，则平移后的抛物线的解析式为 ________.

10．二次函数 $y=(x-2)^2-3$ 的最小值为______.

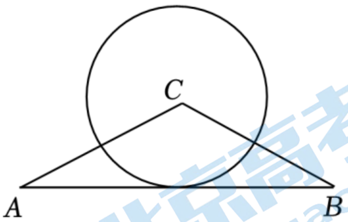
11．一元二次方程 $ax^2+x-2=0$ 有一个根为 1，则 a=______.

12．将二次函数 $y=x^2+2x+4$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为 __________.

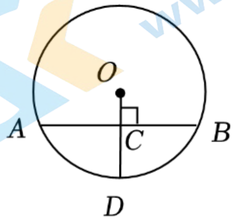
13．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B，C 的横、纵坐标都为整数，过这三个点作一条圆弧，则此圆弧的圆心坐标为 ________.



14．如图，在△ABC 中，CA＝CB＝2，∠ACB＝120°，以点 C 为圆心，R 为半径的圆与 AB 相切，则半径 R 为 ______.



15．如图，AB 是半径为 4 的⊙O 的弦，OD⊥AB 于点 C，交⊙O 于点 D，若 OC＝1，则弦 AB 为 __________.



16．对于一个半径为 R 的⊙O，有如下几个结论：

①存在无数个△ABC 内接于⊙O，满足∠ABC＝70°，但 AC 边的长是唯一确定的；

②存在无数条弦 AB，满足点 O 到 AB 的距离等于 d（$0\leqslant d<R$），但 AB 的长是唯一确定的；

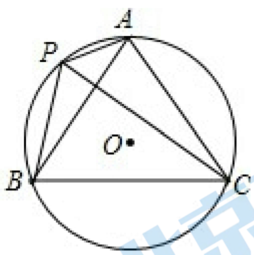
③在所有与⊙O 相离的直线中，至少存在一条直线 l，l 上存在一点 P 到 O 的距离等于 R.

上述结论中，所有正确结论的序号是 _______.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-18 题每题 4 分，第 19，20，22 题每题 5 分，第 21，23-25 题每题 6 分，第 26-28 题每题 7 分）.

17．（4 分）解下列方程：$x^2-4x+3=0$.

18．（4 分）如图，A，P，B，C 是⊙O 上的四点，∠APC＝∠CPB＝60°，求证：△ABC 是等边三角形.



19．（5 分）已知 x_1，x_2 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根.

（1）填空：x_1+x_2＝______，$x_1 \cdot x_2$＝_______；

（2）求代数式 $x_1^2+x_2^2$ 的值.

20.（5 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(a+2)x+a+1=0$．

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程的两个根都是正整数，求 a 的最小值．

21.（6 分）小明在画一个二次函数的图象时，列出了下面几组 y 与 x 的对应值．

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	3	4	3	0	-5	…

（1）求该二次函数的表达式，并画出二次函数图象；

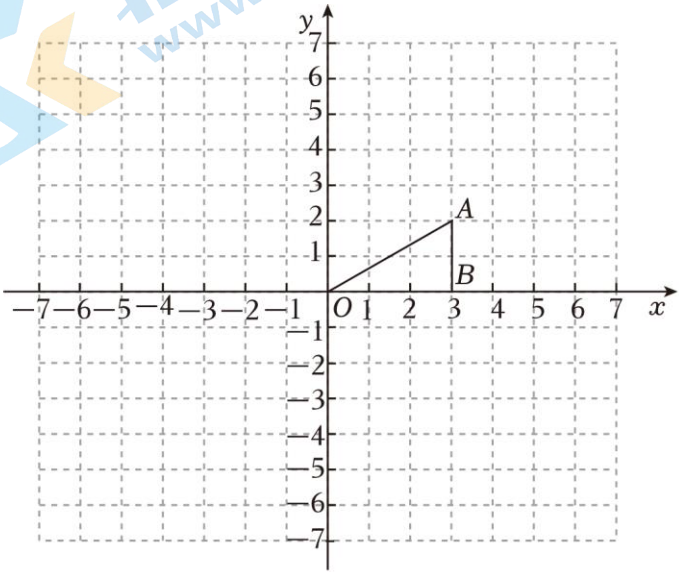
（2）当 $-3<x<4$ 时，y 的取值范围是 ________；

（3）当 $y<0$ 时，x 的取值范围是 ________．

22.（5 分）如图，点 A 的坐标为（3，2），点 B 的坐标为（3，0）．作如下操作：

（1）画出△OAB 关于原点对称的图形△OA_1B_1，点 A_1 的坐标为 ________．

（2）以点 A 为旋转中心，将△ABO 顺时针方向旋转 90°，得到△AB_2O_2，在图中画出△AB_2O_2，点 O_2 的坐标为 ________．



23.（6 分）下面是小元设计的“过圆上一点作圆的切线”的尺规作图过程．

已知：如图 1，⊙O 及⊙O 上一点 P．

求作：过点 P 的⊙O 的切线．

作法：如图 2，

①作射线 OP；

②在直线 OP 外任取一点 A，以点 A 为圆心，AP 为半径作⊙A，与射线 OP 交于另一点 B；

③连接并延长 BA 与⊙A 交于点 C；

④作直线 PC；

则直线 PC 即为所求．

根据小元设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明：

证明：∵BC 是⊙A 的直径，

∴∠BPC=90°　(___________)（填推理的依据）.

∴OP⊥PC.

又∵OP 是⊙O 的半径，

∴PC 是⊙O 的切线(_____________)（填推理的依据）.

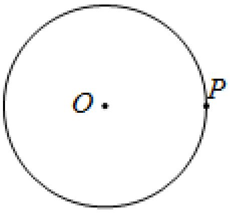


图 1

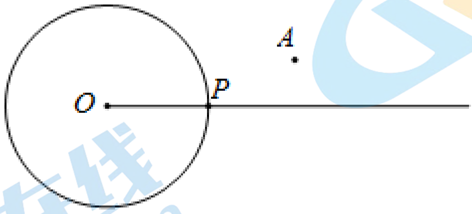
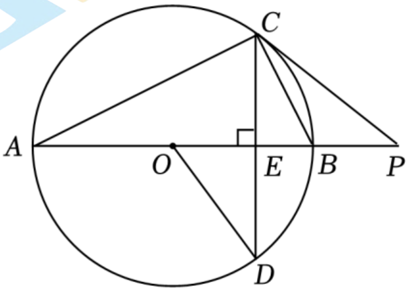


图 2

24.（6 分）如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，AB 是⊙O 的直径，AB⊥CD 于点 E，P 是 AB 延长线上一点，且∠BCP=∠BCD.

（1）求证：CP 是⊙O 的切线；

（2）若 CD=8，EB=2，求⊙O 的半径.



25.（6 分）悬索桥，又名吊桥，指的是以通过索塔悬挂并锚固于两岸（或桥两端）的缆索（或钢链）作为上部结构主要承重构件的桥梁．其缆索几何形状一般近似于抛物线．从缆索垂下许多吊杆（吊杆垂直于桥面），把桥面吊住．

某悬索桥（如图 1），是连接两个地区的重要通道．图 2 是该悬索桥的示意图．小明在游览该大桥时，被这座雄伟壮观的大桥所吸引，他通过查找资料了解到此桥的相关信息：这座桥的缆索（即图 2 中桥上方的曲线）的形状近似于抛物线，两端的索塔在桥面以上部分高度相同，即 AB=CD，两个索塔均与桥面垂直．主桥 AC 的长为 600m，索塔顶端 D 与锚点 E 的距离 DE 为 155m．缆索最低处的吊杆 MN 长为 3m，桥面上与点 M 相距 100m 处的吊杆 PQ 长为 13m．若将缆索的形状视为抛物线，请你根据小明获得的信息解决问题.

（1）根据题意．在图 3 中建立适当的坐标系，并写出以下点的坐标：N ________，Q __________；

（2）求这条抛物线的解析式；

（3）求引桥 CE 的长.

图 1

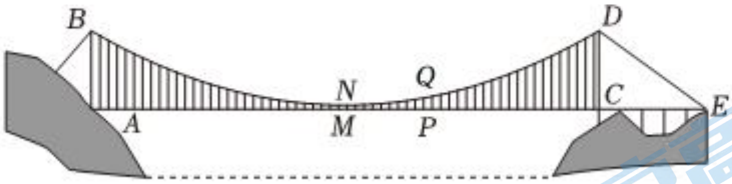


图 2

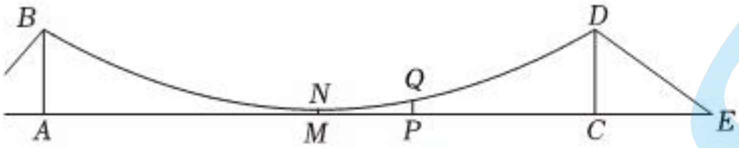


图 3

26.（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点（1，m），（4，n）在抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）上．设抛物线的对称轴为直线 $x=t$．

（1）若 $3a+b=0$，比较 m，n 的大小关系，并说明理由；

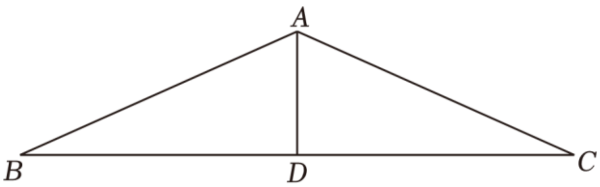
（2）点（x_0，m）（$x_0\neq1$）在抛物线上，若 $m<c<n$，求 t 及 x_0 的取值范围．

27.（7 分）在△ABC 中，∠B=∠C=α（0°＜α＜45°），$AD\perp BC$ 于点 D，P 为线段 BD 上的动点（不与点 B、D 重合），连接 AP 并将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 180°－2α，得到线段 AP'，连接 PP'，取 PP' 的中点 Q．

（1）依题意补全图形；

（2）用含 α 的式子表示∠BCP'，并说明理由；

（3）点 M 为线段 DC 上一点，当 MD 与 BP 满足的数量关系为 __________ 时，对于任意的点 P，总有∠QMB=2α，证明你的结论．

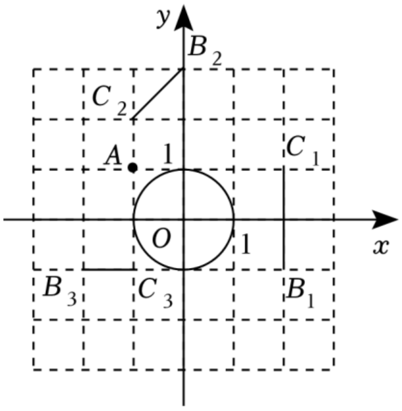


28.（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1．对于点 A 和线段 BC，给出如下定义：若将线段 BC 绕点 A 旋转可以得到⊙O 的弦 $B'C'$（B'，C' 分别是 B，C 的对应点），则称线段 BC 是⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”．

（1）如图，点 A，B_1，C_1，B_2，C_2，B_3，C_3 的横、纵坐标都是整数．在线段 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 中，⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”是 ________；

（2）△ABC 是边长为 1 的等边三角形，点 A（0，t），其中 $t\neq0$．若 BC 是⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”，求 t 的值；

（3）在△ABC 中，$AB=1$，$AC=2$．若 BC 是⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”，直接写出 OA 的最小值和最大值．



y
B_2
C_2
A
1
C_1
O
1
x
B_3
C_3
B_1

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念进行判断即可.

【解答】解：A．原图是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B．原图不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C．原图既是中心对称图形，又是轴对称图形，故此选项符合题意；

D．原图是中心对称图形，不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查的是中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与自身重合.

2.【分析】根据点在圆上，则 $d=r$；点在圆外，$d>r$；点在圆内，$d<r$（d 即点到圆心的距离，r 即圆的半径）.

【解答】解：∵$OP=8>5$，∴点 P 与⊙O 的位置关系是点在圆外.

故选：C.

【点评】此题主要考查了点与圆的位置关系，注意：点和圆的位置关系与数量之间的等价关系是解决问题的关键.

3.【分析】由 $a>0$，$b<0$，$c<0$，推出 $-\frac{b}{2a}>0$，可知抛物线的图象开口向上，对称轴在 y 轴的右边，交 y 轴于负半轴，由此即可判断.

【解答】解：∵$a>0$，$b<0$，$c<0$，

∴ $-\frac{b}{2a}>0$，

∴抛物线的图象开口向上，对称轴在 y 轴的右边，交 y 轴于负半轴，

故选：C.

【点评】本题考查二次函数的图象，解题的关键是熟练掌握基本知识，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

4.【分析】根据旋转的性质可得 $AB=AE$，$\angle BAE=60°$，然后判断出△AEB 是等边三角形，再根据等边三角形的三条边都相等可得 $BE=AB$.

【解答】解：∵△ABC 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到△AED，

∴$AB=AE$，$\angle BAE=60°$，

∴△AEB 是等边三角形，

∴$BE=AB$，

∵$AB=3$，

∴$BE=3$.

故选：B.

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，主要利用了旋转前后对应边相等以及旋转角的定义．

5．【分析】根据题意可知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，即可推出$\angle AOC=50^\circ$．

【解答】解：∵$OA\perp BC$，$\angle ADB=25^\circ$，

∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，

∴$\angle AOC=2\angle ADB=50^\circ$．

故选：C．

【点评】本题主要考查圆周角定理、垂径定理，关键在于求出$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$．

6．【分析】利用二次函数和一元二次方程的性质．

【解答】解：由表格中的数据看出－0.01和0.02更接近于0，故x应取对应的范围．

故选：C．

【点评】该题考查了用表格的方式求函数的值的范围．

7．【分析】根据圆周角定理求出$\angle ADC$的度数，根据圆内接四边形的性质计算即可．

【解答】解：由圆周角定理得，$\angle ADC=\frac{1}{2}\angle AOC=60^\circ$，

∵四边形$ABCD$内接于⊙O，

∴$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，

∴$\angle ABC=120^\circ$，

故选：B．

【点评】本题考查的是圆内接四边形的性质和圆周角定理，掌握圆内接四边形的对角互补是解题的关键．

8．【分析】作$AE\perp BC$于点E，根据等边三角形的性质得$BE=2$，所以$AE=2\sqrt{3}$，因为$CD=4-x$，$DE=2-x$，所以根据勾股定理和三角形的面积公式得$y_1=AD^2=12+(2-x)^2$，$y_2=S_{\triangle ACD}=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$，即可得出答案．

【解答】解：如图，作$AE\perp BC$于点E，

则$BE=2$，

∴$AE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

设$x=BD$，

∴$CD=4-x$，$DE=2-x$，

∴$y_1=AD^2=AE^2+DE^2=12+(2-x)^2$，

$y_2=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times CD\times AE=\frac{1}{2}\times(4-x)\times 2\sqrt{3}=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$，

∴y_1，y_2与对应的x满足的函数关系分别是二次函数，一次函数．

故选：A．

【点评】本题考查一次函数和二次函数的定义，等边三角形的性质，关键是根据勾股定理和三角形的面

积公式表示出解析式．

二、填空题（本题共 16 分，每题 2 分）

9．【分析】直接根据“上加下减”的原则进行解答．

【解答】解：由“上加下减”的原则可知，将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 4 个单位，则平移后的抛物线的解析式为：$y=2x^2-4$；

故答案为：$y=2x^2-4$．

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键．

10．【分析】由解析式为顶点式，根据其解析式即可直接求的二次函数的最小值．

【解答】解：$\because a=1>0$，

$\therefore$当 $x=2$ 时，y 有最小值 -3．

故答案为 -3．

【点评】本题考查的是二次函数的性质，$y=a(x-h)^2+k$，当 $a>0$ 时，$x=h$ 时，y 有最小值 k，当 $a<0$ 时，$x=h$ 时，y 有最大值 k．

11．【分析】根据一元二次方程的解的定义，将 $x=1$ 代入关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x=0$，列出关于 a 的方程，通过解该方程求得 a 值即可．

【解答】解：$\because$一元二次方程 $ax^2+x-2=0$ 的一个根为 1，

$\therefore x=1$ 满足关于 x 的一元二次方程 $ax^2+x-2=0$，

$\therefore a+1-2=0$，

解得，$a=1$；

故答案为：1．

【点评】本题考查了一元二次方程的解．一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的解均满足该方程的解析式．

12．【分析】利用配方法把二次函数的一般式化为顶点式即可得解．

【解答】解：$y=x^2+2x+4$

$=x^2+2x+1-1+4$

$=(x+1)^2+3$，

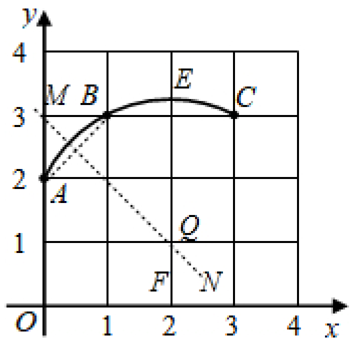
故答案为：$y=(x+1)^2+3$．

【点评】本题考查二次函数的三种形式，正确运用配方法把二次函数的一般式化为顶点式是解题的关键．

13．【分析】根据图形得出 A、B、C 的坐标，再连接 AB，作线段 AB 和线段 BC 的垂直平分线 MN、EF，两线交于 Q，则 Q 是圆弧的圆心，最后求出点 Q 的坐标即可．

【解答】解：从图形可知：A 点的坐标是（0，2），B 点的坐标是（1，3），C 点的坐标是（3，3），

连接 AB，作线段 AB 和线段 BC 的垂直平分线 MN、EF，两线交于 Q，则 Q 是圆弧的圆心，如图，



∴Q 点的坐标是（2，1），

故答案为：（2，1）.

【点评】本题考查了确定圆的条件，坐标与图形性质，垂径定理等知识点，能找出圆弧的圆心 Q 的位置是解此题的关键.

14.【分析】设⊙C 与 AB 相切于点 D，连接 OD，则 $AD\perp CD$，由 $CA=CB=2$，$\angle ACB=120°$，得 $\angle A=\angle B=30°$，则 $CD=\frac{1}{2}CA=1$，所以⊙C 的半径 R 的长为 1，于是得到问题的答案.

【解答】解：设⊙C 与 AB 相切于点 D，连接 OD，则 $AD\perp CD$，

∴$\angle ADC=90°$，

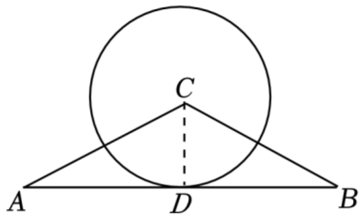
∵$CA=CB=2$，$\angle ACB=120°$，

∴$\angle A=\angle B=\frac{1}{2}\times(180-120°)=30°$，

∴$CD=\frac{1}{2}CA=1$，

∴⊙C 的半径 R 的长为 1，

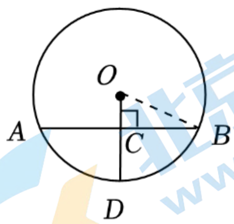
故答案为：1.



【点评】此题重点考查切线的性质、等腰三角形的性质、直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半等知识，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

15.【分析】连接 OB，根据垂径定理求出 CB，根据勾股定理计算，求出 OB.

【解答】解：连接 OB，



∵$OD\perp AB$，

∴$CB=AC$，

在 Rt△OCB 中，$CB=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，

∴$AB=2BC=2\sqrt{15}$

故答案为：$2\sqrt{15}$.

【点评】本题考查的是勾股定理，垂径定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

16.【分析】利用∠ABC=70° 可确定$\overset{\frown}{AC}$的长度为定值，则 AC 的长为定值，根据圆周角定理，当点 A 在弦 AC 所对的优弧上（点 A、C 除外）时，满足∠ABC=70°，则可对①进行判断；以 O 点圆心，d 为半径作⊙O 的同心圆，由于与小圆相切的大圆的弦都等于 AB，从而可对②进行判断；根据直线与⊙O 相离可得到圆心 O 到直线的距离大于 R，从而可对③进行判断.

【解答】解：∵∠ABC=70°，

∴∠AOC=140°，

∴$\overset{\frown}{AC}$的长度为定值，

∴AC 的长为定值，

当点 A 在弦 AC 所对的优弧上（点 A、C 除外）时，满足∠ABC=70°，所以①正确；

以 O 点圆心，d 为半径作⊙O 的同心圆，则与小圆相切的大圆的弦都等于 AB，所以②正确；

∵直线与⊙O 相离，

∴圆心 O 到直线的距离大于 R，

∴l 上不存在一点 P 到 O 的距离等于 R，所以③错误.

故答案为：①②.

【点评】本题考查了三角形的外接圆与外心：经过三角形的三个顶点的圆，叫做三角形的外接圆．三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心．也考查了圆周角定理和直线与圆的位置关系.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-18 题每题 4 分，第 19，20，22 题每题 5 分，第 21，23-25 题每题 6 分，第 26-28 题每题 7 分）.

17.【分析】先把方程的左边分解因式，即可得出两个一元一次方程，再求出方程的解即可.

【解答】解：$x^2-4x+3=0$，

因式分解，得（$x-3$）（$x-1$）=0，

$x-3=0$ 或 $x-1=0$，

解得：$x_1=3$，$x_2=1$.

【点评】本题考查了解一元二次方程 - 因式分解法，能把一元二次方程转化成一元一次方程是解此题的关键.

18.【分析】根据圆周角定理得到∠ABC=∠CPB=60°，∠CAB=∠CPB=60°，根据等边三角形的判定定理证明.

【解答】证明：由圆周角定理得，∠ABC=∠CPB=60°，∠CAB=∠CPB=60°，

∴△ABC是等边三角形.

【点评】本题考查的是圆周角定理，等边三角形的判定，掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半是解题的关键.

19.【分析】(1) 直接利用根与系数的关系 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$即可得出答案；

(2) 根据 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，把 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=-1$ 代入即可.

【解答】解：(1) ∵x_1，x_2是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根，

∴由根与系数的关系，得 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2=-1$；

故答案为：1，-1；

(2) ∵$x_1+x_2=1$，$x_1x_2=-1$，

∴ $x_1^2+x_2^2$

$=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$，

$=1+2$

$=3$.

【点评】本题考查了根与系数的关系：若 x_1，x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

20.【分析】(1) 根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$，可得出 $\Delta=a^2$，由偶次方的非负性可得出 $a^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$，进而可证出方程总有两个实数根；

(2) 利用因式分解法解一元二次方程，可得出 $x_1=1$，$x_2=a+1$，结合方程的两个实数根都是正整数，即可得出 a 的取值范围，取其中的最小整数即可得出结论.

【解答】(1) 证明：依题意，得 $\Delta=[-(a+2)]^2-4(a+1)$

$=a^2+4a+4-4a-4$

$=a^2$.

∵$a^2\geqslant0$，

∴$\Delta\geqslant0$.

∴方程总有两个实数根.

(2) 解：解方程 $x^2-(a+2)x+a+1=0$，

得 $x_1=1$，$x_2=a+1$，

∵方程的两个实数根都是正整数，

∴$a+1\geqslant1$.

∴$a\geqslant0$.

∴a 的最小值为 0.

【点评】本题考查的是根的判别式及一元二次方程的解法，在解答（2）时得到方程的两个根是解题的

关键.

21.【分析】（1）由表格可知抛物线顶点坐标（﹣1，4），设抛物线解析式为 $y=a(x+1)^2+4$，利用待定系数法即可求得解析式，然后利用描点法画出图象即可.

（2）把 $x=4$ 求得函数值，然后观察图象即可求解.

（3）根据图象求得即可.

【解答】解：（1）由表格可知抛物线顶点坐标（﹣1，4），设抛物线解析式为 $y=a(x+1)^2+4$，

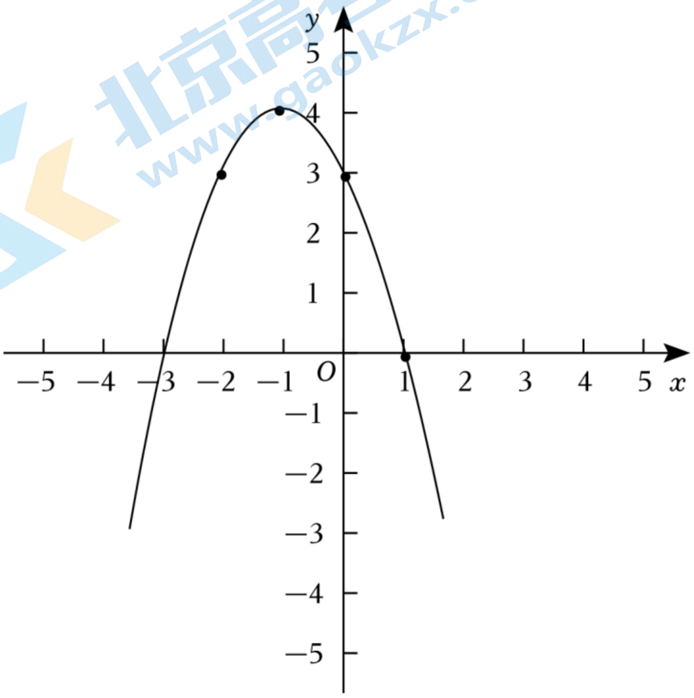
∵$x=0$ 时，$y=3$，

∴$3=a+4$，

∴$a=-1$，

∴二次函数解析式为 $y=-(x+1)^2+4$ 即 $y=-x^2-2x+3$.

函数图象如图所示，



（2）当 $x=-1$ 时，$y=4$；当 $x=4$ 时，$y=-(x+1)^2+4=-21$，

观察图象，当 $-3<x<4$ 时，y 的取值范围是 $-21<y\leqslant 4$；

故答案为：$-21<y\leqslant 4$；

（3）当 $y<0$ 时，x 的取值范围是 $x<-3$ 或 $x>1$.

故答案为：$x<-3$ 或 $x>1$.

【点评】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式，二次函数图象上点的坐标特征，抛物线与 x 轴的交点，二次函数的最值，数形结合是解题的关键.

22.【分析】（1）根据中心对称的性质作图，即可得出答案.

（2）根据旋转的性质作图，即可得出答案.

【解答】解：（1）如图，$\triangle OA_1B_1$ 即为所求.

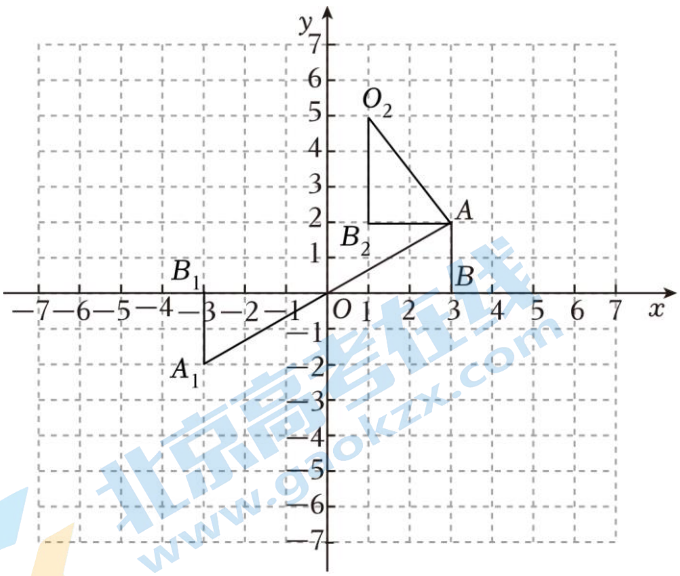
点 A_1 的坐标为（﹣3，﹣2）.

故答案为：（－3，－2）.

（2）如图，$\triangle AB_2O_2$即为所求.

点O_2的坐标为（1，5）.

故答案为：（1，5）.



【点评】本题考查作图－旋转变换、中心对称，熟练掌握旋转的性质、中心对称的性质是解答本题的关键.

23.【分析】（1）根据题意作出图形即可；

（2）根据圆周角定理得到$\angle BPC=90°$，根据切线的判定定理即可得到结论.

【解答】解：（1）补全图形如图所示，则直线PC即为所求；

（2）证明：∵BC是⊙A的直径，

∴$\angle BPC=90°$（直径所对的圆周角是直角），

∴$OP\perp PC$.

又∵OP是⊙O的半径，

∴PC是⊙O的切线（经过半径的外端，且垂直于这条半径的直线是圆的切线）.

故答案为：直径所对的圆周角是直角，经过半径的外端，且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

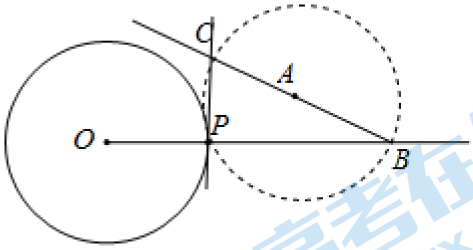


图 2

【点评】本题考查了切线的判定，圆周角定理，正确的作出图形是解题的关键.

24.【分析】（1）连接OC，则$\angle OCA=\angle A$，由AB是⊙O的直径，$AB\perp CD$，得$\angle ACB=\angle AEC=90°$，则$\angle BCD=\angle A=90°-\angle ACD$，所以$\angle OCA=\angle BCD$，而$\angle BCP=\angle BCD$，则$\angle BCP=\angle OCA$，可推导出$\angle OCP=\angle ACB=90°$，即可证明$CP$是⊙$O$的切线；

（2）由垂径定理得 $CE=DE=\frac{1}{2}CD=4$，因为$\angle CEB=\angle AEC=90^\circ$ ，$\angle BCE=\angle A$，所以$\triangle BCE\backsim\triangle CAE$，则$\frac{BE}{CE}=\frac{CE}{AE}$，可求得 $AE=\frac{CE^2}{BE}=8$，则 $AB=10$，所以⊙O 的半径长为 5.

【解答】（1）证明：连接 OC，则 $OC=OA$，

∴$\angle OCA=\angle A$，

∵AB 是⊙O 的直径，$AB\perp CD$，

∴$\angle ACB=\angle AEC=90^\circ$ ，

∴$\angle BCD=\angle A=90^\circ - \angle ACD$，

∴$\angle OCA=\angle BCD$，

∵$\angle BCP=\angle BCD$，

∴$\angle BCP=\angle OCA$，

∴$\angle OCP=\angle BCP+\angle OCB=\angle OCA+\angle OCB=\angle ACB=90^\circ$ ，

∵OC 是⊙O 的半径，且 $CP\perp OC$，

∴CP 是⊙O 的切线.

（2）解：$AB\perp CD$，$CD=8$，$BE=2$，

∴$CE=DE=\frac{1}{2}CD=4$，$\angle CEB=\angle AEC=90^\circ$ ，

∴$\angle BCE=\angle A=90^\circ - \angle ACE$，

∴$\triangle BCE\backsim\triangle CAE$，

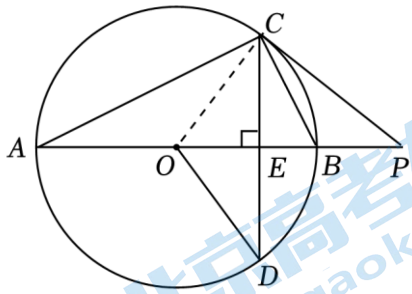
∴$\frac{BE}{CE}=\frac{CE}{AE}$，

∴$AE=\frac{CE^2}{BE}=\frac{4^2}{2}=8$，

∴$AB=AE+BE=8+2=10$，

∴$OA=\frac{1}{2}AB=5$，

∴⊙O 的半径长为 5.



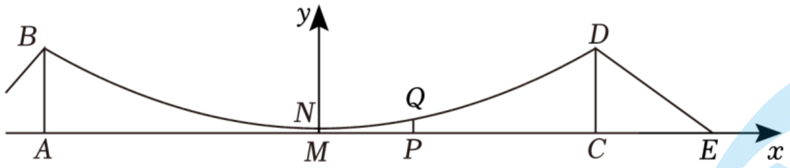
【点评】此题重点考查等腰三角形的性质、同角的余角相等、切线的判定、圆周角定理、垂径定理、相似三角形的判定与性质等知识，正确地作出所需要的辅助线是解题的关键.

25.【分析】（1）以点 M 为原点，建立平面直角坐标系，即可求解；

（2）由待定系数法即可求解；

（3）将点 C 的坐标代入抛物线表达式，求出 $CD=93$，即可求解．

【解答】解：（1）以点 M 为原点，建立如下图所示的平面直角坐标系，



由题意得，点 N、Q 的坐标分别为：（0，3）、（100，13），

故答案为：（0，3）、（100，13）；

（2）设抛物线的表达式为：$y=ax2+c=ax^2+3$，

将点 Q 的坐标代入上式得：$13=10000a+3$，

解得：$a=0.001$，

则函数表达式为：$y=0.001x^2+3$；

（3）由题意得，点 C（300，y），

将点 C 的坐标代入抛物线表达式得：$y=0.001x^2+3=0.001\times90000+3=93$，

即 $CD=93$（米），

则 $CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{155^2-93^2}=124$（米）；

即 CE 的长度为 124 米．

【点评】本题考查二次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质和数形结合的思想解答．

26．【分析】（1）根据题意求得 $t=\frac{3}{2}$，然后根据两点到对称轴的距离的大小即可判断；

（2）再根据 $m<c<n$，可确定出对称轴的取值范围，进而可确定 x_0 的取值范围．

【解答】解：（1）函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$，

$\because 3a+b=0$，

$\therefore b=-3a$，

$\therefore t=-\frac{-3a}{2a}=\frac{3}{2}$，

$\because$抛物线开口向上，且$\frac{3}{2}-1<4-\frac{3}{2}$，

$\therefore m<n$；

（2）$\because m<c<n$，

$\therefore a+b+c<c<16a+4b+c$，

解得 $-4a<b<-a$，

$\therefore a<-b<4a$，

$\therefore \frac{a}{2a} < -\frac{b}{2a} < \frac{4a}{2a}$，即$\frac{1}{2} < t < 2$.

由题意可知，点（x_0，m）与点（1，m）关于 $x=t$ 对称；

$\therefore t=\frac{x_0+1}{2}$；

当 $t=\frac{1}{2}$时，$x_0=0$；

当 $t=2$ 时，$x_0=3$.

$\therefore x_0$的取值范围 $0<x_0<3$.

综上，t 的取值范围为$\frac{1}{2}<t<2$；x_0的取值范围 $0<x_0<3$.

【点评】本题考查二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，解题关键是熟练掌握二次函数的性质.

27.【分析】(1) 根据题意画出图形即可；

(2) 根据旋转的性质和 SAS 证明△ABP 与△ACP'全等，进而利用全等三角形的性质解答即可；

(3) 根据相似三角形的判定和性质得出比例，进而解答即可.

【解答】(1) 解：如图所示：

(2) 解：连接 $P'C$，

$\because \angle B=\angle ACB=\alpha$，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=180°-2\alpha$，

$\because$将线段 AP 绕点 A 逆时针旋转 $180°-2\alpha$，

$\therefore \angle P'AP=\angle BAC=180°-2\alpha$，$AP=AP'$，

$\therefore \angle P'AP-\angle PAC=\angle BAC-\angle PAC$，

即$\angle BAP=\angle CAP'$，

在△ABP 与△ACP'中，

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAP=\angle CAP' \\ AP=AP' \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP'$（$SAS$），

$\therefore \angle ABP=\angle ACP'$，

$\because \angle ABP=\alpha$，

$\therefore \angle ACP'=\alpha$，

$\therefore \angle BCP'=\angle ACB+\angle ACP'=2\alpha$，

即$\angle BCP'=2\alpha$；

(3) 解：M 为线段 DC 上的一点，连接 QM，

若要满足$\angle QMB=2\alpha$，则由（2）可得，$\angle QMB=\angle P'CB$，

$\therefore QM /\!/ P'C$，

∴$\triangle PQM\backsim\triangle PP'C$，

∴$\frac{PQ}{PP'}=\frac{PM}{PC}$，

∵Q 是 PP' 的中点，

∴$\frac{PQ}{PP'}=\frac{1}{2}$，

∴$\frac{PM}{PC}=\frac{1}{2}$，

∵$AB=AC$，$AD\perp BC$，

∴D 是 BC 的中点，

设 $BD=CD=a$，$BP=x$，$DM=y$，

∴$PM=PD+DM=a-x+y$，$PC=2BD-BP=2a-x$，

∴$\frac{PM}{PC}=\frac{a-x+y}{2a-x}=\frac{1}{2}$，

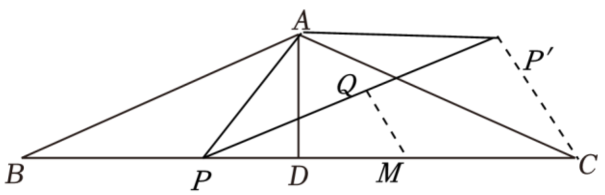
∴$2a-2x+2y=2a-x$，

∴$2y=x$，

即 $BP=2DM$，

则当 MD 与 BP 满足 $BP=2DM$ 时，对于任意点 P，总有 $\angle QMB=2\alpha$，

故答案为：$BP=2DM$.



【点评】此题是几何变换综合题，考查全等三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质，关键是构建全等三角形和相似三角形解答.

28.【分析】(1) 利用旋转的性质、点 A 到圆上一点的距离范围及“关联线段”的定义来进行判别即可；

(2) 先利用旋转的性质，“关联线段”的定义以及等边三角形的性质求出 B' C' 的位置，进而求出 t 的值即可；

(3) 利用旋转的性质以及“关联线段”的定义，求出四边形 $AB'OC'$ 的各边长，利用四边形的不稳定性画出 OA 最小和最大的图形，然后问题可求解.

【解答】解：(1) 由旋转的性质可知：$AB=AB'$，$AC=AC'$，$\angle BAB'=\angle CAC'$，

由图可知点 A 到圆上一点的距离 d 的范围为 $\sqrt{2}-1\leqslant d\leqslant\sqrt{2}+1$，

∵$AC_1=3>d$，

∴C_1' 点不可能在圆上，

∴B_1C_1 不是⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”，

∵$AC_2=1$，$AB_2=\sqrt{5}$，

∴C_2'（0，1），B_2'（1，0），

∴B_2C_2是⊙O的以点A为中心的“关联线段”，

∵$AC_3=2$，$AB_3=\sqrt{5}$，

当B_3'在圆上时，则B_3'（1，0）或（0，－1），

由图可知此时C_3'不在圆上，

∴B_3C_3不是⊙O的以点A为中心的“关联线段”，

故答案为B_2C_2；

（2）设BC绕点A旋转得到⊙O的弦$B'C'$，则$B'C'=BC$，$AB'=AB$，$AC'=AC$，

∵△ABC是边长为1的等边三角形，

∴根据旋转的性质可知△$AB'C'$也是边长为1的等边三角形，

∵$OB'=OC'=1$，

∴△$OB'C'$是边长为1的等边三角形，

∵A（0，t），且$t\neq0$，

∴点A与点O不重合，

∴$B'C'\perp y$轴，且$B'C'=1$，

∴AO为$B'C'$边上的高的2倍，且此高的长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $t=\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$；

（3）由旋转的性质和“关联线段”的定义可知：$AB'=AB=OB'=OC'=1$，$AC'=AC=2$，如图1，

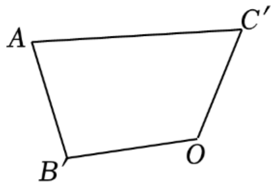


图1

利用四边形的不稳定性可知，当A、O、C'在同一直线上时，OA最小，最小值为1，如图2所示：

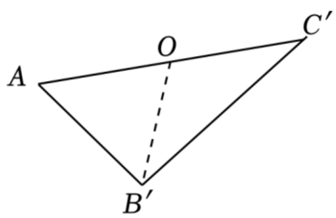


图2

当A、B'、O在同一直线上时，OA最大，如图3所示：

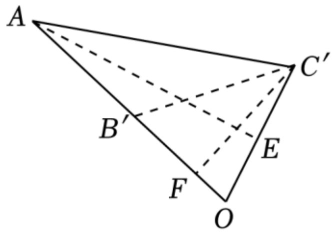


图3

此时 $OA=OB'+AB'=2$；

∴综上所述：OA 的最小值为 1，最大值为 2．

【点评】本题主要考查旋转的性质、等边三角形及圆的综合，熟练掌握旋转的性质、等边三角形及圆的综合问题是解题的关键．

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！