

2018 北京五中高三（上）期中 数 学（理）

班级_____姓名_____学号_____成绩_____

一. 选择题（共 8 小题：共 40 分）

1. 已知集合 $M = \left\{x / \frac{x-3}{x+1} \leq 0\right\}$, $N = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A $\{1, 3\}$

B $\{-1, 1, 3\}$

C $\{-3, 1\}$

D $\{-3, -1, 1\}$

2. 在复数平面内, 复数 $\frac{1}{1-i}$ 的共轭复数对应的点位于 ()

A 第一象限

B 第二象限

C 第三象限

D 第四象限

3. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \geq 2, \\ x+2y \geq 3, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x+3y$ 的最小值是 ()

A 2

B 3

C 4

D 5

4. 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个非零向量, 则 “ $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ ” 是 “ $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ” 的 ()

A 充分不必要条件

B 必要不充分条件

C 充分必要条件

D 既不充分也不必要条件

5. 由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^2 - 2x$ 围成的图形的面积是 ()

A 1

B $\frac{9}{2}$

C 9

D $\frac{5}{2}$

6. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的所有面中最大的面积是 ()

A 4

B $\sqrt{5}$

C 2

D $\sqrt{2}$

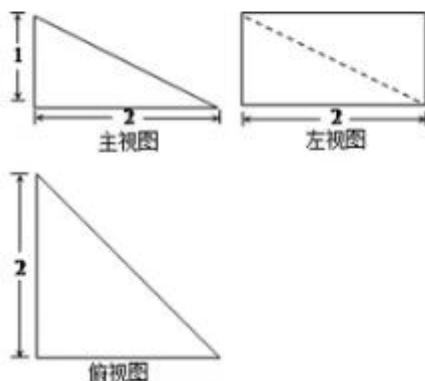
6. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的所有面中最大的面积是 ()

A 4

B $\sqrt{5}$

C 2

D $\sqrt{2}$



7. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的

x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi =$ ()

A $\frac{5\pi}{12}$

B $\frac{\pi}{3}$

C $\frac{\pi}{4}$

D $\frac{\pi}{6}$

8. 德国数学家科拉茨 1937 年提出了一个著名的猜想: 任给一个正整数 n , 如果 n 是偶数, 就将它减半 (即 $\frac{n}{2}$); 如果 n 是

奇数, 就将它乘 3 加 1 (即 $3n + 1$), 不断重复这样的运算, 经过有限步后, 一定可以得到 1. 对于科拉茨猜想,

目前谁也不能证明, 也不能否定, 现在请你研究: 如果对正整数 n (首项) 按照上述规则施行变换后的第 8 项为 1

(注: 1 可以多次出现), 则 n 的所有不同值的个数为 ()

A 4

B 6

C 32

D 128

二. 填空题 (共 6 小题: 共 30 分)

9. 已知 $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{m} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$, 则当 $\lambda =$ _____ 时, $\vec{m} \perp \vec{n}$; 当 $\lambda =$ _____ 时, $\vec{m} \parallel \vec{n}$.

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 前 n 项和为 S_n , 若 $2a_3, a_5, 3a_4$ 成等差数列, $a_2 a_4 a_6 = 64$, 则 $q =$ _____,

$S_n =$ _____.

11. 在 $(x - \frac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 _____.

12. 满足 $f(-x) = f(x)$ 且 $f(2-x) = -f(x)$ 的函数 $f(x)$ 可以是 _____ (写出一个即可)

13. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中 $\frac{a_{11}}{a_{10}} < -1$, 若它的前 n 项和为 S_n 有最大值, 那么 $\{S_n\}$ 中最小的正数是第_____项.

14. 若平面直角坐标系内 A, B 两点满足: (1) 点 A, B 都在 $f(x)$ 的图象上; (2) 点 A, B 关于原点对称, 则对称点 (A, B)

是函数 $f(x)$ 的一个“姊妹点对”, 点对 (A, B) 与 (B, A) 可看作一个“姊妹点对”, 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ \frac{2}{e^x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的“姊妹点对”有_____个.

三. 解答题 (共 6 小题; 共 80 分)

15. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = 4\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

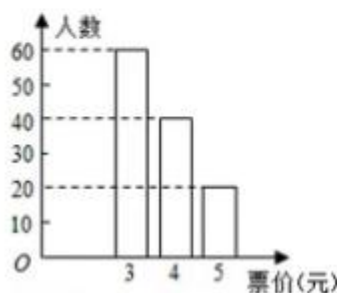
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 2, a = 3, S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 $b^2 + c^2$ 的值.

16. (本小题满分 13 分) 2014 年 12 月 28 日开始, 北京市公共电汽车和地铁按照里程分段计价. 具体如下表 (不考虑公交卡折扣情况).

乘公共电汽车方案	10 公里 (含) 内 2 元 10 公里以上部分, 每增加 1 元可乘坐 5 公里 (含)
乘坐地铁方案 (不含机场线)	6 公里 (含) 内 3 元 6 公里至 12 公里 (含) 4 元 12 公里至 22 公里 (含) 5 元 22 公里至 32 公里 (含) 6 元 32 公里以上部分, 每增加 1 元可乘坐 20 公里 (含)

已知在北京地铁四号线上, 任意一站到陶然亭站的票价不超过 5 元, 先从那些只乘坐四号线地铁, 且在陶然亭出站的乘客中随机选出 120 人, 他们乘坐地铁的票价统计如图所示.

- (1) 如果从那些只乘坐四号线地铁，且在陶然亭站处站的乘客中任选 1 人，试估计此人乘坐地铁的票价小于 5 元的概率；
- (2) 从那些只乘坐四号线地铁，且在陶然亭站处站的乘客中随机选 2 人，记 X 为这 2 人乘坐的地铁的票价和，根据统计图，并以频率作为概率，求 X 的分别列和数学期望；
- (3) 小李乘坐地铁从 A 地到陶然亭的票价是 5 元，返程时，小李乘坐某路公共汽车所花交通也是 5 元，假设小李往返过程中乘坐地铁和公共电汽车的路程均为 s 公里，试写出 s 的取值范围（只需写出结论）。

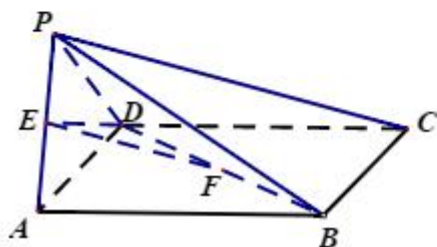


17. (本小题满分 14 分) 如图，在四棱锥

$P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ ， E, F

分别为 PA, BD 中点， $PA = PD = AD = 2$ 。

- (1) 求证： $EF \parallel$ 平面 PBC ；
- (2) 求二面角 $E-DF-A$ 的余弦值
- (3) 在棱 PC 上是否存在一点 G ，使 $GF \perp$ 平面 EDF ？若存在，指出点 G 的位置；若不存在，说明理由。

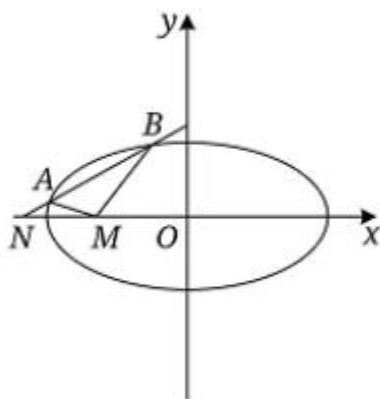


18. (本小题满分 13 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{n} = 1 (0 < n < 2)$.

(1) 若椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 求 n 的值;

(2) 若过点 $N(-2, 0)$ 任作一条直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 在 x 轴上是否存在点 M , 使得

$\angle NMA + \angle NMB = 180^\circ$? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



19. (本小题满分 14 分) 已知定义在 $(1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = x - \ln x - 2$, $g(x) = x \ln x + x$.

(1) 求证: $f(x)$ 存在唯一的零点, 且零点属于 $(3, 4)$;

(2) 若 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $g(x) > k(x-1)$ 对任意的 $x > 1$ 恒成立, 求 k 的最大值.

20. (本小题满分 13 分) 给定正整数 $n (n \geq 5)$, 数列 $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 定义

$E(a_1, a_2, \dots, a_n) = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ 为数列 $\{a_n\}$ 的位差和.

(1) 当 $n = 5$ 时, 求数列 $\{a_n\}: 1, 3, 4, 2, 5$ 的位差和;

(2) 若位差和 $E(a_1, a_2, \dots, a_n) = 4$, 求满足条件的数列 $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n$ 的个数;

(3) 求证: 位差和 $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为偶数.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980