

2024 北京师大实验中学初三（上）期末

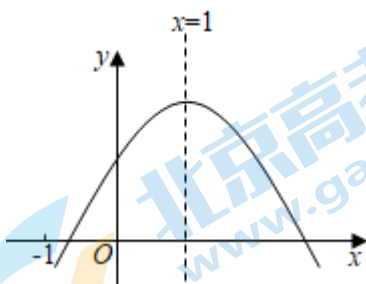
数 学

一、单项选择题(本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分)

1. 下列自然能源图标中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



2. 抛物线 $y=2(x-1)^2+5$ 的顶点坐标是（ ）



A. (1, 5)

B. (2, 1)

C. (2, 5)

D. (-1, 5)

3. 已知关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1} + (2k-3)x + 4 = 0$ 是一元二次方程，则 k 的值应为（ ）

A. ± 3

B. 3

C. -3

D. 不能确定

4. $\odot O$ 的半径为 3，点 P 在 $\odot O$ 外，点 P 到圆心的距离为 d ，则 d 需要满足的条件（ ）

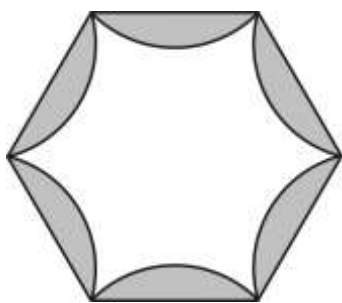
A. $d > 3$

B. $d = 3$

C. $0 < d < 3$

D. 无法确定

5. 小明将图  案绕某点连续旋转若干次，每次旋转相同角度 α ，设计出一个外轮廓为正六边形的图案（如图），则 α 可以为（ ）



A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

6. 若扇形的圆心角为 90° ，半径为 6，则该扇形的弧长为（ ）

A. $\frac{3}{2}\pi$

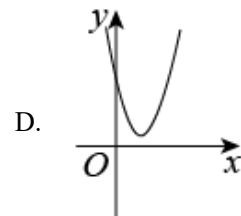
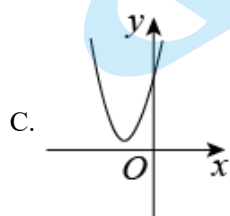
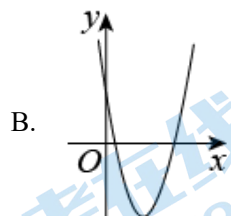
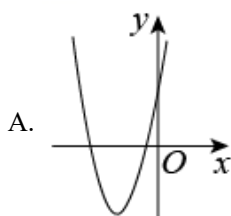
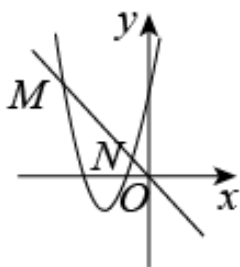
B. 2π

C. 3π

D. 6π

7. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=kx$ 交于 M, N 两点，则二次函数 $y=ax^2+(b-k)x+c$ 的图象

可能是 ()



8. 做随机抛掷一枚纪念币的试验，得到的结果如下所示：

抛掷次数 m	500	1000	1500	2000	2500	3000	4000	5000
“正面向上”的次数 n	265	512	793	1034	1306	1558	2083	2598
“正面向上”的频率 $\frac{n}{m}$	0.530	0.512	0.529	0.517	0.522	0.519	0.521	0.520

下面有 3 个推断：

- ①当抛掷次数是 1000 时，“正面向上”的频率是 0.512，所以“正面向上”的概率是 0.512；
- ②随着试验次数的增加，“正面向上”的频率总在 0.520 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“正面向上”的概率是 0.520；
- ③若再次做随机抛掷该纪念币的实验，则当抛掷次数为 3000 时，出现“正面向上”的次数不一定是 1558 次。

其中所有合理推断的序号是 ()

- A. ② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

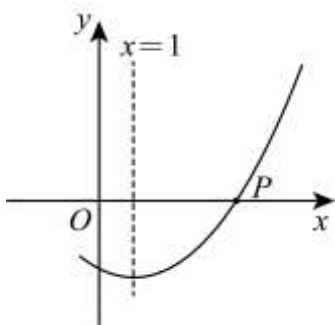
二、填空题（共 8 小题，每题 2 分，共 16 分）

9. 若正六边形的边长是 1，则它的半径是_____。

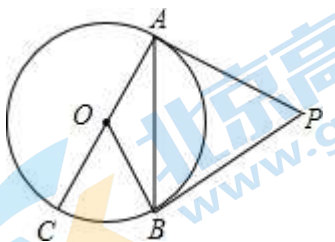
10. 写出一个二次函数，其图象满足：①开口向下；②与 y 轴交于点 $(0, -1)$ ，这个二次函数的解析式可以是_____。

11. 草坪上的自动喷水装置的旋转角为 200° ，且它的喷灌区域是一个扇形。若它能喷灌的扇形草坪面积为 5π 平方米，则这个扇形的半径是_____米。

12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$ ，点 P ，点 Q 是抛物线与 x 轴的两个交点，若点 P 的坐标为 $(4, 0)$ ，则点 Q 的坐标为_____.

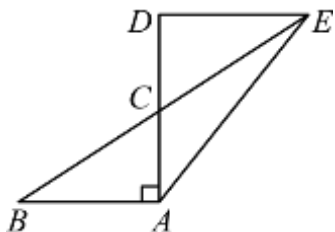


13. 如图， PA ， PB 是 $\odot O$ 的切线， A ， B 为切点， AC 是 $\odot O$ 的直径， $\angle BAC = 20^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数为_____.



14. 已知 a 是 $x^2 + x - 2 = 0$ 的根，则代数式 $(a^2 + a) \left(a - \frac{2}{a} + 3 \right)$ 的值为_____.

15. 如图， $\triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 C 成中心对称， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ， $\angle CAB = 90^\circ$ ，则 AE 的长是_____.



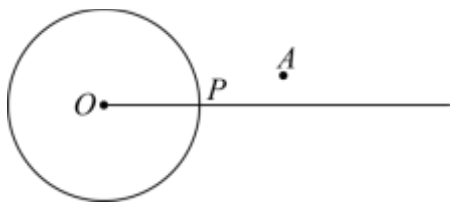
16. 抛物线 $y = -x^2 + 2x + m$ 交 x 轴于点 $A(a, 0)$ 和 $B(b, 0)$ (点 A 在点 B 左侧)，抛物线的顶点为 D ，下列四个结论：①抛物线过点 $(2, m)$ ；②当 $m = 0$ 时， $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形；③ $a + b = 4$ ；④抛物线上有两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$ ，若 $x_1 < x_2$ ，且 $x_1 + x_2 > 2$ ，则 $y_1 > y_2$ 。其中结论正确的序号是_____.

三、解答题 (共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解方程： $x^2 + 2x - 5 = 0$.

18. 下面是小元设计的“过圆上一点作圆的切线”的尺规作图过程.

已知：如图， $\odot O$ 及 $\odot O$ 上一点 P .



求作：过点 P 的 $\odot O$ 的切线.

作法：如图，作射线 OP；

① 在直线 OP 外任取一点 A，以 A 为圆心，AP 为半径作 $\odot A$ ，与射线 OP 交于另一点 B；

② 连接并延长 BA 与 $\odot A$ 交于点 C；

③ 作直线 PC；

则直线 PC 即为所求. 根据小元设计的尺规作图过程，

(1) 使用直尺和圆规，补全图形；(保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明：

证明： $\because$ BC 是 $\odot A$ 的直径，

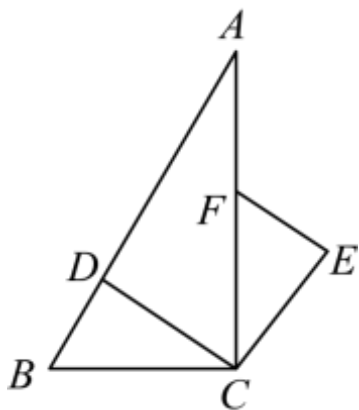
$\therefore \angle BPC = 90^\circ$ _____ (填推理依据).

$\therefore OP \perp PC$.

又 $\because$ OP 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore$ PC 是 $\odot O$ 的切线 _____ (填推理依据).

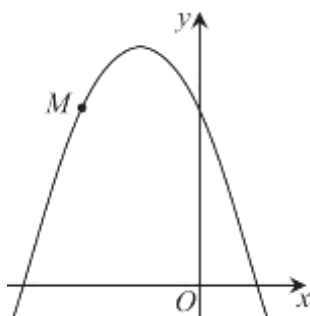
19. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D, F 分别在 AB, AC 上， $CF = CB$ ，连接 CD，将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后得 CE，连接 EF.



(1) 求证： $\triangle BCD \cong \triangle FCE$ ；

(2) 若直线 EF 交 AB 于点 G，直接写出 $\angle AGE$ 的度数.

20. 如图，已知抛物线 $y = -x^2 + mx + 3$ 经过点 $M(-2, 3)$.



- (1) 求 m 的值，并求出此抛物线的顶点坐标；
- (2) 当 $-3 \leq x \leq 0$ 时，直接写出 y 的取值范围.

21. 邮票素有“国家名片”之称，方寸之间，包罗万象．为宣传北京 2022 年冬奥会，中国邮政发行了若干套冬奥会纪念邮票，其中有一套展现雪上运动的邮票，如图所示：



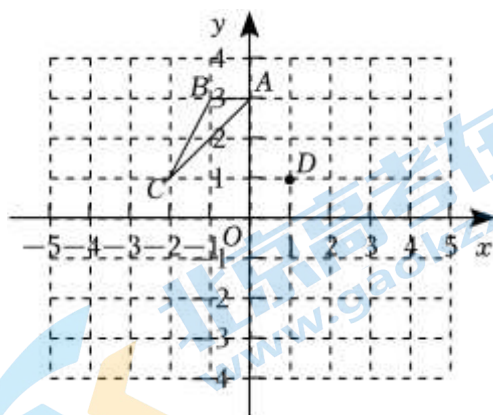
某班级举行冬奥会有奖问答活动，答对的同学可以随机抽取邮票作为奖品．

- (1) 在抢答环节中，若答对一题，可从 4 枚邮票中任意抽取 1 枚作为奖品，则恰好抽到“冬季两项”的概率是_____．
- (2) 在抢答环节中，若答对两题，可从 4 枚邮票中任意抽取 2 枚作为奖品，请用列表或画树状图的方法，求恰好抽到“高山滑雪”和“自由式滑雪”的概率．

22. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+4)x + 2k+4 = 0$.

- (1) 求证：方程总有两个实数根；
- (2) 若方程有一个根小于 1，求 k 的取值范围.

23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(0,3)$ ， $B(-1,3)$ ， $C(-2,1)$ ，点 D 的坐标为 $(1,1)$.

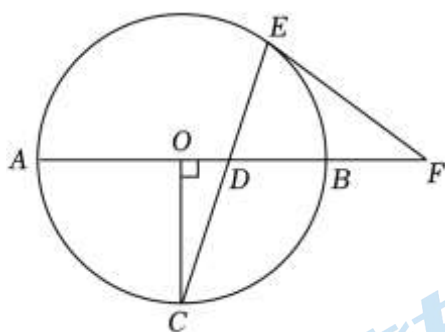


- (1) $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 D 中心对称，其中点 A 与点 A' 对应，点 B 与点 B' 对应，请在坐标系中画

出 $\triangle A'B'C'$ ，并写出点 B' 的坐标；

(2) 若点 $P(a,b)$ 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点，请直接写出这个点关于点 D 中心对称的对应点 P' 的坐标.

24. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， $OC \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 C ， D 为 OB 上一点，延长 CD 交 $\odot O$ 于点 E ，延长 OB 至 F ，使 $DF = FE$ ，连接 EF .



(1) 求证： EF 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $OD = 1$ 且 $BD = BF$ ，求 $\odot O$ 的半径.

25. 如图 1，一灌溉车正为绿化带浇水，喷水口 H 离地竖直高度为 $h = 1.2$ 米. 建立如图 2 所示的平面直角坐标系，可以把灌溉车喷出的上、下边缘抽象为两条抛物线的部分图象，把绿化带横截面抽象为矩形 $DEFG$ ，其水平宽度 $DE = 2$ 米，竖直高度 $EF = 0.7$ 米，下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移得到，上边缘抛物线最高点 A 离喷水口的水平距离为 2 米，高出喷水口 0.4 米，灌溉车到绿化带的距离 OD 为 d 米.



图1

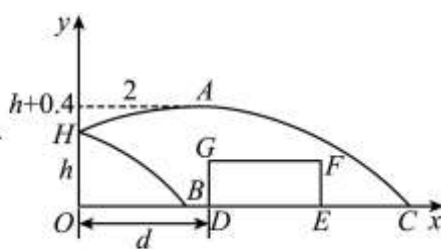


图2

(1) 求上边缘抛物线喷出水的最大射程 OC ；

(2) 求下边缘抛物线与 x 轴交点 B 的坐标；

(3) 若 $d = 3.2$ 米，灌溉车行驶时喷出的水_____（填“能”或“不能”）浇灌到整个绿化带.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2mx - m^2 + 3m$ ，线段 AB 的两个端点分别为 $A(1,3)$ ， $B(7,3)$.

(1) 求抛物线顶点 C 的坐标（用含有 m 的代数式表示）；

(2) 若 $m = 4$ ，且对于该抛物线上的两点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，当 $t \leq x_1 \leq t+1$ ， $x_2 \geq 6$ 时，均满足 $y_1 \geq y_2$ ，求 t 的取值范围；

(3) 若抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，结合函数图象，直接写出 m 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 为直线 AC 上一个动点（点 D 不与点 A ， C 重合），连接 BD ，将线段 BD 绕 D 点逆时针旋转 90° 得线段 DE ，连接 CE .

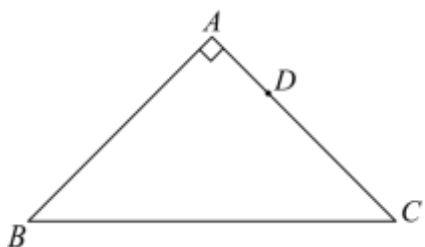
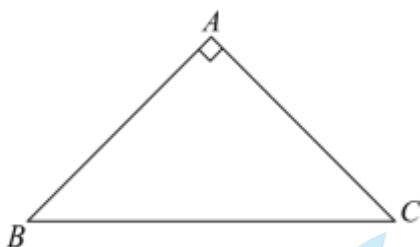


图1



备用图

(1) 如图1, 若点 D 在线段 AC 上,

①依题意补全图1;

②用等式表示线段 CB , CD , CE 之间的数量关系, 并证明.

(2) 若 $BC=m$, 直接写出当 AE 取得最小值时 CD 的长 (用含 m 的式子表示).

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为1, P 是 $\odot O$ 外一点, 给出如下的定义: 若在 $\odot O$ 上存在一点 T , 使得点 P 关于某条过点 T 的直线对称后的点 Q 在 $\odot O$ 上, 则称 Q 为点 P 关于 $\odot O$ 的关联点.

(1) 当点 P 在直线 $y=2x$ 上时.

①若点 $P(1,2)$, 在点 $Q_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $Q_2(0,1)$, $Q_3(1,0)$ 中, 点 P 关于 $\odot O$ 的关联点是_____;

②若 P 关于 $\odot O$ 的关联点 Q 存在, 求点 P 的横坐标 p 的取值范围.

(2) 已知点 $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$, 动点 M 满足 $AM \leq 1$, 若 M 关于 $\odot O$ 的关联点 N 存在, 直接写出 MN 的取值范围.

参考答案

一、单项选择题(本题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

1. 【答案】A

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义逐项判断即可.

【详解】A、既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故正确;

B、既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故错误;

C、是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 故错误;

D、既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故错误;

故选: A.

【点睛】本题考查轴对称图形与中心对称图形的识别, 理解基本定义是解题关键.

2. 【答案】A

【分析】已知抛物线的顶点式, 可直接写出顶点坐标.

【详解】解: 抛物线 $y=2(x-1)^2+5$ 的顶点坐标是 $(1, 5)$.

故选: A.

【点睛】本题考查二次函数的性质, 记住顶点式 $y=a(x-h)^2+k$, 顶点坐标是 (h, k) , 对称轴是直线 $x=h$.

3. 【答案】C

【分析】根据一元二次方程的定义: 未知数的最高次数是 2; 二次项系数不为 0; 是整式方程; 含有一个未知数.

【详解】解: 由关于 x 的方程 $(k-3)x^{|k|-1}+(2k-3)x+4=0$ 是一元二次方程, 得

$|k|-1=2$ 且 $k-3 \neq 0$.

解得 $k=-3$.

故选: C.

【点睛】本题考查了一元二次方程的概念, 判断一个方程是否是一元二次方程, 首先要看是否是整式方程, 然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2.

4. 【答案】A

【分析】根据点与圆的关系解答.

【详解】 $\because$ 点 P 在 $\odot O$ 外, $\odot O$ 的半径为 3,

$\therefore$ 点 P 到圆心的距离为 $d > 3$,

故选: A.

【点睛】此题考查点与圆的位置关系: 点与圆心的距离为 d , 圆的半径为 r , 当 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d=r$ 时, 点在圆上; 当 $d < r$ 时, 点在圆内.

5. 【答案】B

【分析】由题意依据每次旋转相同角度 α ，旋转了六次，且旋转了六次刚好旋转了一周为 360° 进行分析即可得出答案.

【详解】解：因为每次旋转相同角度 α ，旋转了六次，
且旋转了六次刚好旋转了一周为 360° ，
所以每次旋转相同角度 $\alpha = 360 \div 6 = 60^\circ$.

故选：B.

【点睛】本题考查旋转的性质，解题的关键是能够找到旋转中心，从而确定旋转角的度数.

6. 【答案】C

【分析】根据弧长公式计算即可.

【详解】解：该扇形的弧长 $= \frac{90\pi \times 6}{180} = 3\pi$.

故选 C.

【点睛】本题考查了弧长的计算：弧长公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$ （弧长为 l ，圆心角度数为 n ，圆的半径为 R ）.

7. 【答案】A

【分析】根据抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = kx$ 交于 M, N 两点，可得方程 $ax^2 + bx + c = kx$ 有两个不等的实数根，从而可判断；

【详解】由图像可知 $a > 0, b > 0, c > 0, k < 0$ ，则 $b - k > 0$ ，可排除选项 $B、D$ ，由图像可知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = kx$ 有两个不同的交点，则一元二次方程 $ax^2 + bx + c = kx$ 有两个不等的实数根，即一元二次方程 $ax^2 + (b - k)x + c = 0$ 有两个不等的实数根，所以二次函数 $y = ax^2 + (b - k)x + c$ 的图象与 x 轴有两个交点，故选 A .

【点睛】本题主要考查了二次函数与一次函数综合，结合二次函数与一元二次方程的关系求解是解题的关键.

8. 【答案】C

【分析】根据用频率估计概率以及频率和概率的概念判断.

【详解】①当抛掷次数是 1000 时，“正面向上”的频率是 0.512，但“正面向上”的概率不一定是 0.512，本小题推断不合理；

②随着试验次数的增加，“正面向上”的频率总在 0.520 附近摆动，显示出一定的稳定性，可以估计“正面向上”的概率是 0.520，本小题推断合理；

③若再次做随机抛掷该纪念币的试验，则当抛掷次数为 3000 时，出现“正面向上”的次数不一定是 1558 次，本小题推断合理；

故选：C.

【点睛】本题考查利用频率估计概率，大量重复实验时，事件发生的频率在某个固定位置左右摆动，并且摆动的幅度越来越小，根据这个频率稳定性定理，可以用频率的集中趋势来估计概率，这个固定的近似值就是这个事件的概率.

二、填空题（共 8 小题，每题 2 分，共 16 分）

9. 【答案】1

【分析】根据正六边形的边长等于正六边形的半径，即可求解.

【详解】正 6 边形的中心角为 $360^\circ \div 6 = 60^\circ$.

那么外接圆的半径和正六边形的边长将组成一个等边三角形.

$\therefore$ 它的外接圆半径是 1.

10. 【答案】 $y = -x^2 - 1$ （答案不唯一）.

【分析】根据抛物线开口方向得出 a 的符号，进而得出 c 的值，即可得出二次函数表达式.

【详解】解： $\because$ 图象为开口向下，并且与 y 轴交于点 $(0, -1)$,

$\therefore a < 0, c = -1$,

$\therefore$ 二次函数表达式为： $y = -x^2 - 1$ （答案不唯一）.

故答案为 $y = -x^2 - 1$ （答案不唯一）.

【点睛】本题考查了二次函数的图像特征及性质，掌握二次函数的图像特征及性质是解题的关键.

11. 【答案】3

【分析】根据已知得出自动喷水装置它能喷灌的草坪是扇形，面积为 5π 平方米，圆心角为 200° ，利用扇

形面积公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ 求出即可.

【详解】解： $\because$ 草坪上的自动喷水装置它能喷灌的草坪是扇形，面积为 5π 平方米，圆心角为 200° ,

$\therefore$ 它能喷灌的草坪的面积为： $\frac{200\pi R^2}{360} = 5\pi$?

解得： $R = 3$,

故答案为 3.

【点睛】此题主要考查了扇形面积求法.

12. 【答案】 $(-2, 0)$

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = 1$ ，点 P ，点 Q 是抛物线与 x 轴的两个交点，

$\therefore$ 点 P 和点 Q 关于直线 $x = 1$ 对称，

又 $\because$ 点 P 的坐标为 $(4, 0)$ ，

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(-2, 0)$.

故答案为 $(-2, 0)$.

13. 【答案】 40°

【分析】根据切线长定理得等腰 $\triangle PAB$ ，运用三角形内角和定理求解即可.

【详解】解： $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线， A, B 为切点，

$\therefore PA = PB, \angle PAC = 90^\circ$,

$\because \angle BAC = 20^\circ$,

$\therefore \angle PAB = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

$$\because PA=PB,$$

$$\therefore \angle PAB=\angle PBA=70^\circ,$$

$$\therefore \angle P=180^\circ-70^\circ\times 2=40^\circ.$$

故答案为 40° .

【点睛】本题考查了切线长定理和切线的性质，等腰三角形性质，三角形内角和，求一个角的余角，利用切线长得出 $PA=PB$ 是解题的关键.

14. 【答案】4

【分析】先根据一元二次方程的根的定义可得 $a^2+a-2=0$ ，从而可得 $a^2+a=2$ ，根据当 $a=0$ 时，

$2\neq 0$ ，可得 $a\neq 0$ ，方程两边都除以 a 得 $a+1-\frac{2}{a}=0$ ，即 $a-\frac{2}{a}=-1$ ，再将其作为整体代入求值即可得.

【详解】解： $\because a$ 是 $x^2+x-2=0$ 的根，

$$\therefore a^2+a-2=0,$$

当 $a=0$ 时， $-2\neq 0$ ，

$$\therefore a\neq 0, \text{ 方程两边都除以 } a \text{ 得 } a+1-\frac{2}{a}=0, \text{ 即 } a-\frac{2}{a}=-1,$$

$$\therefore a^2+a=2,$$

$$\therefore (a^2+a)\left(a-\frac{2}{a}+3\right)=2\times(-1+3)=-2+6=4.$$

故答案为：4.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根、代数式求值，掌握理解一元二次方程的根的定义和等式恰当变形是解题关键.

15. 【答案】5

【分析】根据中心对称的性质以及勾股定理即可求解 AE 的长.

【详解】解： $\because \triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 C 成中心对称

$\therefore$ 点 A, C, D 在同一直线上，

$$\therefore \angle CAB=90^\circ$$

$$\therefore \angle D=90^\circ$$

$$\therefore AC=CD, AB=DE$$

$$\therefore AB=3, AC=2$$

$$\therefore AD=2AC=2\times 2=4$$

$$\therefore AE=\sqrt{DE^2+AD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

故答案为：5.

【点睛】本题主要考查中心对称的性质以及勾股定理，熟练掌握成中心对称的图形对应边相等，对应角相等的性质以及勾股定理是解决本题的关键.

16. 【答案】①②④

【分析】①根据抛物线与 y 轴的交点坐标及对称性即可判断；

②当 $m=0$ 时，可得抛物线与 x 轴的两个交点坐标和对称轴即可判断；

③根据抛物线与 x 轴的一个交点坐标和对称轴即可得另一个交点坐标即可判断；

④根据二次函数图象即可进行判断。

【详解】解：① $\because$ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, m)$ ，

$\therefore$ 对称轴为 $x = -\frac{2}{-2} = 1$

$\therefore (0, m)$ 关于对称轴的对称点为 $(2, m)$ ，在抛物线上

故①正确；

②当 $m=0$ 时，抛物线与 x 轴的两个交点坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，

对称轴为 $x=1$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形，

故②正确；

③ $\because$ 对称轴 $x=1$ ，

$\therefore \frac{a+b}{2} = 1$

$\therefore a+b=2$ ，

故③错误；

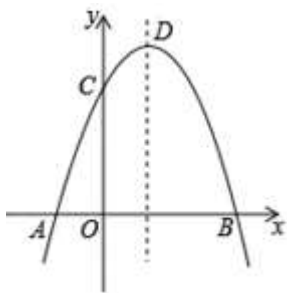
④观察二次函数图象可知：

当 $x_1 < x_2$ ，且 $x_1 + x_2 > 2$ ，

则 x_1 离对称轴比 x_2 离对称轴更近，故 $y_1 > y_2$ 。

故④正确。

故答案为：①②④。



【点睛】本题考查了二次函数图象与系数的关系、二次函数图象上点的坐标特征、抛物线与 x 轴的交点、等腰直角三角形，解决本题的关键是综合利用以上知识。

三、解答题（共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 【答案】 $x_1 = -1 + \sqrt{6}$ ， $x_2 = -1 - \sqrt{6}$

【分析】此题考查解一元二次方程，一元二次方程的解法有直接开平方法，公式法，配方法，因式分解法等，学生在平时的训练中，学会根据方程的特征，选择恰当的方法，提高解题效率。根据配方法的步骤先

把常数项移到等号的右边，再在左右两边同时加上一次项系数一半的平方，配成完全平方的形式，然后开方即可。

【详解】解： $x^2 + 2x - 5 = 0$ ，

$$x^2 + 2x = 5,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 6,$$

$$(x+1)^2 = 6,$$

$$x+1 = \pm\sqrt{6},$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{6}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{6}.$$

18. 【答案】(1) 见解析；(2) 直径所对的圆周角是直角；过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

【分析】(1) 根据题意作出图形即可；

(2) 根据圆周角定理得到 $\angle BPC = 90^\circ$ ，根据切线的判定定理即可得到结论。

【详解】解：(1) 补全图形如图所示，则直线 PC 即为所求；

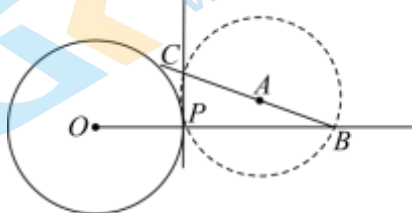


图2

(2) 证明： $\because BC$ 是 $\odot A$ 的直径，

$\therefore \angle BPC = 90^\circ$ (圆周角定理)，

$\therefore OP \perp PC$ 。

又 $\because OP$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线 (切线的判定)。

故答案为：圆周角定理；切线的判定。

【点睛】本题考查了切线的判定，圆周角定理，正确的作出图形是解题的关键。

19. 【答案】(1) 见解析 (2) $\angle AGE = 90^\circ$

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质、旋转的性质、平行线的性质：

(1) 由旋转的性质可得： $CD = CE$ ，再根据同角的余角相等可证明 $\angle BCD = \angle FCE$ ，再根据全等三角形的判定方法即可证明 $\triangle BCD \cong \triangle FCE$ ；

(2) 由题意： $\angle DCE = 90^\circ$ ，易求 $\angle E = 90^\circ$ ，进而可求出 $\angle BDC$ 的度数。

【小问 1 详解】

$\because$ 将线段 CD 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 后得 CE ，

$\therefore CD = CE$ ， $\angle DCE = 90^\circ$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle FCE,$$

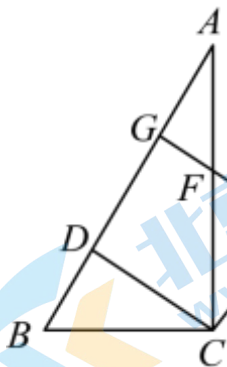
在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} CB = CF \\ \angle BCD = \angle FCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle FCE (\text{SAS}).$$

【小问 2 详解】

如图,



由题意: $\angle DCE = 90^\circ$,

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle E = 180^\circ - \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle ADC = 90^\circ.$$

20. 【答案】(1) $m = -2$, 顶点坐标 $(-1, 4)$;

$$(2) 0 \leq y \leq 4$$

【分析】(1) 将 $M(-2, 3)$ 代入 $y = -x^2 + mx + 3$ 即可求得 m 的值, 再将抛物线的一般式化为顶点式, 即可得出抛物线的顶点坐标;

(2) 根据抛物线的顶点坐标 $(-1, 4)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 可知 $-3 \leq x \leq 0$ 时, 当 $x = -3$ 时, y 取得最小值, 当 $x = -1$ 时, y 取得最大值, 即可求出 y 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 将 $M(-2, 3)$ 代入 $y = -x^2 + mx + 3$, 得:

$$3 = -(-2)^2 - 2m + 3$$

$$\text{解得: } m = -2$$

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3$$

$$\therefore y = -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3$$

$$\therefore y = -(x+1)^2 + 4$$

$\therefore$ 此抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$.

【小问 2 详解】

解：由 (1) 可知抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，

当 $x = -3$ 时， $y = -(-3+1)^2 + 4 = 0$ ，

$\therefore$ 当 $-3 \leq x \leq 0$ 时， y 的取值范围为： $0 \leq y \leq 4$.

【点睛】本题主要考查二次函数图像和性质，懂得把二次函数的一般式化为顶点式是解题的关键.

21. 【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{6}$

【分析】(1) 直接由概率公式求解即可；

(2) 画树状图，共有 12 种等可能结果，其中恰好抽到“高山滑雪”和“自由式滑雪”的有 2 种结果，再由概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

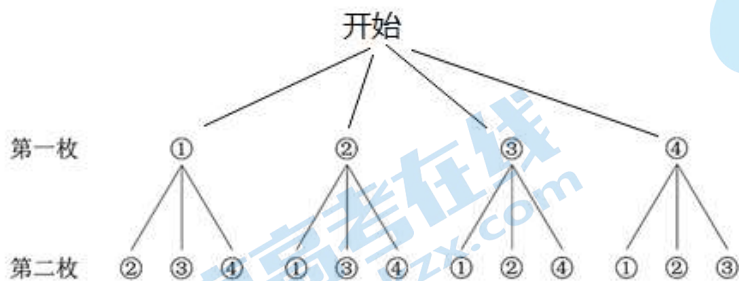
解：从 4 种邮票任取一张共有 4 种情况，其中“冬季两项”只有 1 种情况，

恰好抽到“冬季两项”的概率是 $\frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

解：直接使用图中的序号代表四枚邮票，由题意画出树状图，如图所示：



由树状图可知，所有可能出现的结果共有 12 种，并且它们出现的可能性相等. 其中，恰好抽到“高山滑雪”和“自由式滑雪”的结果有 2 种，

∴恰好抽到“高山滑雪”和“自由式滑雪”的概率为： $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】本题主要考查的是概率公式，用树状图法求概率．树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

22. 【答案】(1) 见解析 (2) $k < -1$

【分析】(1) 计算一元二次方程根的判别式，根据根的判别式进行判断即可得证；

(2) 根据公式法求得方程的解，得出 $x_1 = 2$ ， $x_2 = k + 2$ ，根据题意列出不等式，解不等式即可求解．

【小问 1 详解】

证明：关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+4)x + 2k + 4 = 0$ ，

$$\because b^2 - 4ac = [-(k+4)]^2 - 4 \times 1 \times (2k+4) = k^2 \geq 0$$

∴此方程总有两个实数根；

【小问 2 详解】

$$\because x^2 - (k+4)x + 2k + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-k-2) = 0$$

解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = k + 2$

∴方程有一个根小于 1

$$\therefore k + 2 < 1,$$

解得 $k < -1$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程根的情况与判别式的关系是解题的关键．

23. 【答案】(1) 见解析， $B'(3, -1)$

$$(2) P'(2-a, 2-b)$$

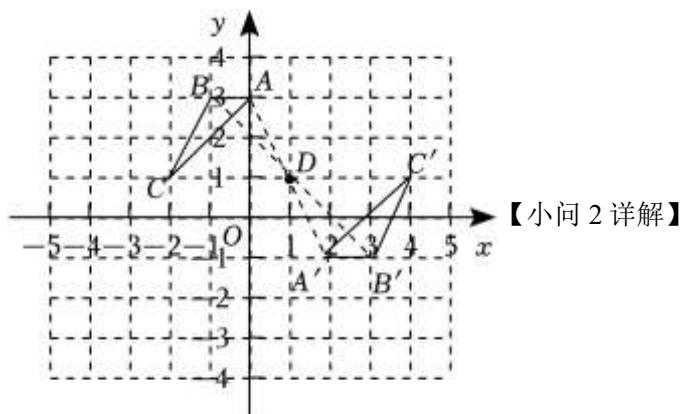
【分析】本题考查作图-旋转变换：

(1) 利用中心对称变换的性质分别作出 A ， B ， C 的对应点 A' ， B' ， C' 即可；

(2) 设 $P'(m, n)$ ，利用中点坐标公式求解．

【小问 1 详解】

如图， $\triangle A'B'C'$ 即为所求，点 $B'(3, -1)$ ；



即 $\angle FEO = 90^\circ$,

$\therefore OE \perp FE$,

$\because OE$ 是半径,

$\therefore EF$ 为 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: 设 $\odot O$ 的半径 $EO = BO = r$, 则 $BD = BF = r - 1$,

$\therefore FE = 2BD = 2(r - 1)$,

在 $Rt\triangle FEO$ 中, 由勾股定理得,

$$FE^2 + OE^2 = OF^2,$$

$$\therefore (2r - 2)^2 + r^2 = (2r - 1)^2,$$

解得 $r = 3$, 或 $r = 1$ (舍去),

$\therefore \odot O$ 的半径为 3.

25. 【答案】(1) 上边缘抛物线喷出水的最大射程 OC 为 6m;

(2) $B(2, 0)$;

(3) 不能.

【分析】(1) 求得上边缘的抛物线解析式, 即可求解;

(2) 根据二次函数的性质, 确定平移的单位, 求得下边缘抛物线解析式, 即可求解;

(3) 根据题意, 求得点 F 的坐标, 判断上边缘抛物线能否经过点 F 即可;

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $H(0, 1.2)$, $A(2, 1.6)$

且上边缘抛物线的顶点为 A , 故设抛物线解析式为: $y = a(x - 2)^2 + 1.6$

将 $H(0, 1.2)$ 代入可得: $a = -\frac{1}{10}$

即上边缘的抛物线为: $y = -\frac{1}{10}(x - 2)^2 + 1.6$

将 $y = 0$ 代入可得: $-\frac{1}{10}(x - 2)^2 + 1.6 = 0$

解得: $x_1 = -2$ (舍去) 或 $x_2 = 6$

即 $OC = 6m$

上边缘抛物线喷出水的最大射程 OC 为 6m;

【小问 2 详解】

由 (1) 可得, $H(0, 1.2)$

上边缘抛物线为: $y = -\frac{1}{10}(x-2)^2 + 1.6$, 可得对称轴为: $x = 2$

点 H 关于对称轴对称的点为: $(4, 1.2)$

下边缘抛物线是由上边缘抛物线向左平移得到, 可得上边缘抛物线向左平移 4 个单位, 得到下边缘抛物

线, 即下边缘的抛物线解析式为: $y = -\frac{1}{10}(x+2)^2 + 1.6$

将 $y = 0$ 代入可得: $-\frac{1}{10}(x+2)^2 + 1.6 = 0$

解得: $x_1 = -6$ (舍去) 或 $x_2 = 2$

即点 $B(2, 0)$;

【小问 3 详解】

$\because 2 < 3.2 < 6$,

$\therefore$ 绿化带的左边部分可以灌溉到,

由题意可得: $F(5.2, 0.7)$

将 $x = 5.2$ 代入到 $y = -\frac{1}{10}(x-2)^2 + 1.6$ 可得: $y = -\frac{1}{10}(5.2-2)^2 + 1.6 = 0.576 < 0.7$

因此灌溉车行驶时喷出的水不能浇灌到整个绿化带.

【点睛】此题考查了二次函数的应用, 涉及了待定系数法求解析式, 与 x 轴交点等问题, 解题的关键是理解题意, 正确求得解析式.

26. 【答案】(1) 抛物线顶点 $C(m, 3m)$; (2) 综合得 $2 \leq t \leq x_2 - 1$ 总有 $y_1 \geq y_2$; (3) m 的取值范围为 $1 \leq m < 4$ 或 $4 < m \leq 13$.

【分析】(1) 把抛物线配方为顶点式即可得出顶点坐标;

(2) 先求出 $m=4$ 时, 二次函数解析式 $y = -(x-4)^2 + 12$, 再求出当 $x=6$ 时, 函数值

$y = -(6-4)^2 + 12 = 8$, 求出函数值为 8 时的自变量的值为 2 与 6, 只要 x_1 在 $2 \leq x_1 \leq 6$ 变化, $y_1 \geq y_2$, 求

出 t 的范围; 当 $x_1 > 6$ 时, 根据函数性质对称轴的右侧, 函数值随自变量 x 的增大而减小, $t+1 \leq x_2$, 可得 $2 \leq t \leq x_2 - 1$ 即可;

(3) 先求出抛物线顶点轨迹函数 $y=3x$, 根据点 A 在抛物线上和点 B 在抛物线上, 解关于 m 的一元二次方程, 去掉交于两点的情况即可.

【详解】解: (1) $y = -x^2 + 2mx - m^2 + 3m = -(x-m)^2 + 3m$,

$\therefore$ 抛物线顶点 $C(m, 3m)$,

(2) 当 $m=4$ 时, $y = -(x-4)^2 + 12$,

当 $x=6$ 时, $y = -(6-4)^2 + 12 = -4 + 12 = 8$,

$$-(x-4)^2 + 12 = 8,$$

解得 $x = 2, x = 6$,

∵ 抛物线开口向下，抛物线对称轴为 $x=4$,

∴ 离抛物线对称轴越近函数值越大，

$$\therefore y_1 \geq y_2, y_2 \leq 8,$$

$$\therefore y_1 \geq 8,$$

$$\therefore 2 \leq x_1 \leq 6,$$

$$\therefore \begin{cases} t \geq 2 \\ t+1 \leq 6 \end{cases},$$

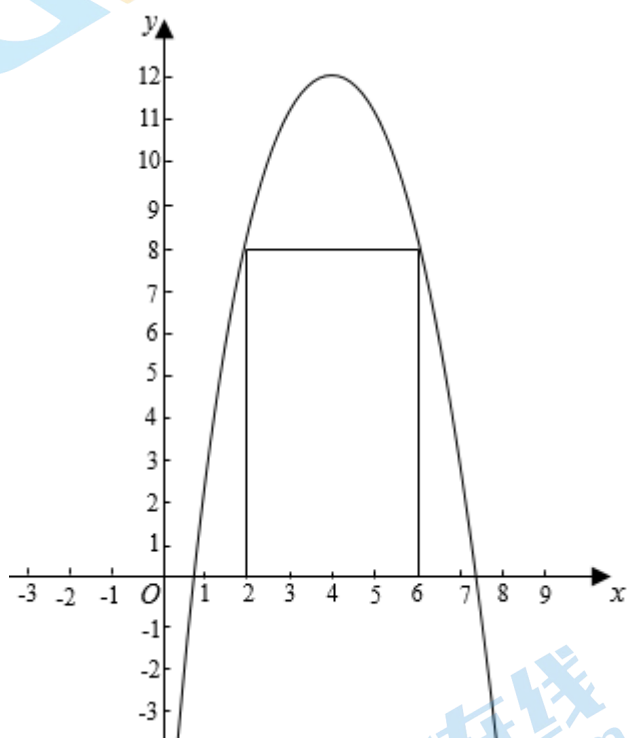
$$\therefore 2 \leq t \leq 5,$$

当 $x_1 > 6$ 时，只要 $x_1 < x_2$ 根据函数的性质，在对称轴的右侧，函数值随自变量 x 的增大而减小，

$$\therefore t+1 \leq x_2,$$

$$\therefore t \leq x_2 - 1,$$

综合得 $2 \leq t \leq x_2 - 1$ 总有 $y_1 \geq y_2$;



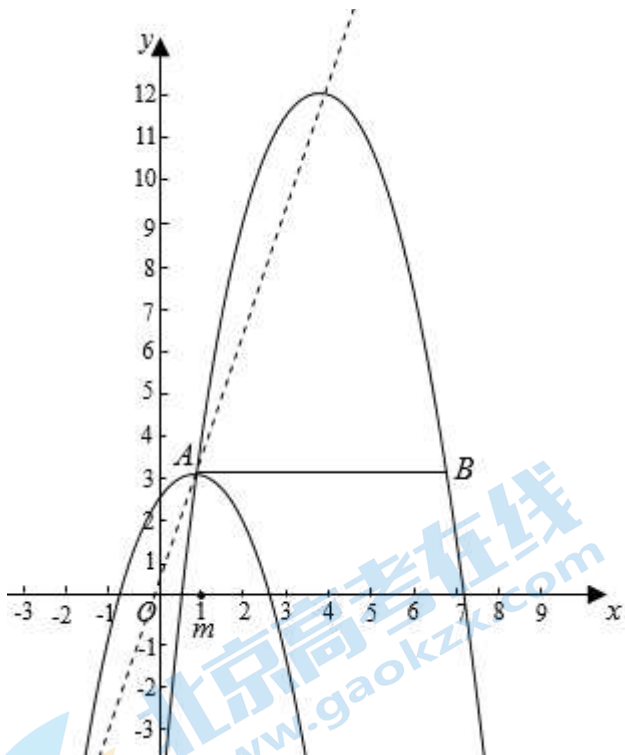
(3) 抛物线顶点所在解析式为 $y=3x$,

当点 $A(1, 3)$ 在抛物线上时，把点 A 代入解析式得：

$$-1^2 + 2m - m^2 + 3m = 3,$$

$$\text{整理得 } m^2 - 5m + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } m = 1, m = 4,$$



当点 $B(7, 3)$ 在抛物线上时，把点 B 代入抛物线解析式得：

$$-7^2 + 2m \times 7 - m^2 + 3m = 3,$$

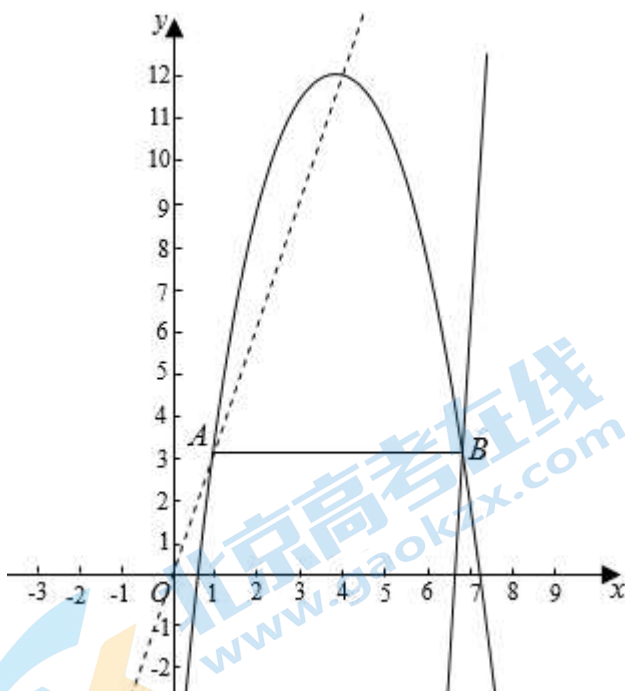
$$\text{整理得 } m^2 - 17m + 52 = 0,$$

$$\text{解得 } m = 4, m = 13,$$

$\therefore$ 当 $m=4$ 时 A 、 B 两点都在抛物线上，

抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，

$\therefore m$ 的取值范为 $1 \leq m < 4$ 或 $4 < m \leq 13$.



【点睛】 本题考查抛物线综合，抛物线化为顶点式，二次函数的性质，一元二次方程的解法，抛物线与线

段的公共交点问题，掌握抛物线综合，抛物线化为顶点式，二次函数的性质，一元二次方程的解法，抛物线与线段的公共交点，利用一元二次方程的解确定自变量的范围是解题关键.

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 D 为直线 AC 上一个动点（点 D 不与点 A ， C 重合），连接 BD ，将线段 BD 绕 D 点逆时针旋转 90° 得线段 DE ，连接 CE 。

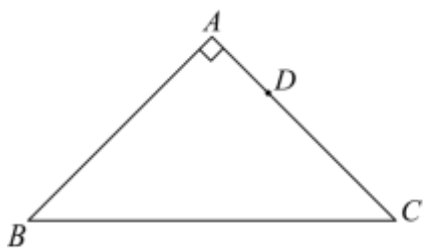
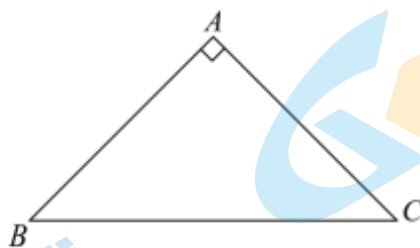


图1



备用图

(1) 如图 1，若点 D 在线段 AC 上，

①依题意补全图 1；

②用等式表示线段 CB ， CD ， CE 之间的数量关系，并证明。

(2) 若 $BC=m$ ，直接写出当 AE 取得最小值时 CD 的长（用含 m 的式子表示）。

【答案】(1) ①见解析；② $CE + \frac{\sqrt{2}}{2}CD = BC$ ，见解析

(2) $CD = \frac{3\sqrt{2}}{4}m$

【分析】本题是三角形综合题；

(1) ①由题意画出图形即可；

②过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 AC 的延长线于 F ，证明 $\triangle EDF \cong \triangle DBA$ (AAS)，由全等三角形的性质得出 $EF = AD$ ， $DF = AB$ ，由等腰直角三角形的性质得出结论；

(2) 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于 F ，证明 $\triangle EDF \cong \triangle DBA$ (AAS)，得出 $EF = AD$ ， $DF = AB$ ，由等腰直角三角形的性质及勾股定理得出答案。

【小问 1 详解】

解：①如图，补全图形如下：

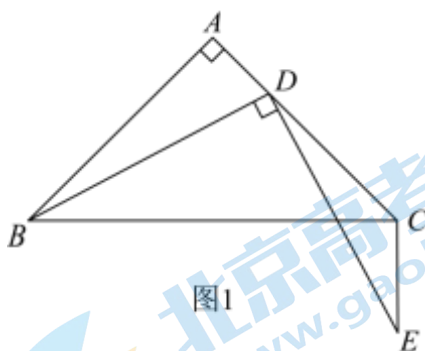
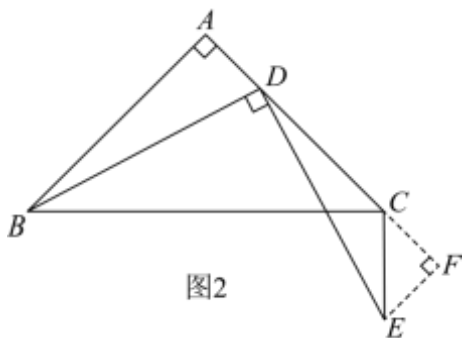


图1

②结论： $CE + \frac{\sqrt{2}}{2}CD = BC$.

理由：过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 AC 的延长线于 F ，



$$\therefore \angle F = 90^\circ = \angle BAC,$$

由旋转知， $DE = BD$ ， $\angle BDE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle EDF + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle EDF \cong \triangle DBA (\text{AAS}),$$

$$\therefore EF = AD, \quad DF = AB,$$

$$\because AB = AC = CD + AD,$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC, \quad DF = CD + AD,$$

$$\because DF = CF + CD,$$

$$\therefore CF = AD = EF,$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2} CE = AD,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} CE + CD = \frac{\sqrt{2}}{2} BC,$$

$$\text{即 } CE + \frac{\sqrt{2}}{2} CD = BC.$$

【小问 2 详解】

如图 2 中，由②可知， $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle ECF = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 如图 3 中，当 $AE \perp CE$ 时， AE 的值最小。

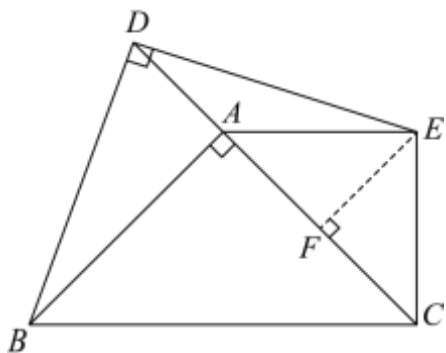


图3

$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ, BC = m,$

$$\therefore AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

过点 E 作 $EF \perp AC$,

$\because \angle ACE = 45^\circ, \angle AEC = 90^\circ,$

$\therefore \angle EAC = \angle ECA = 45^\circ,$

$\therefore EA = EC,$

$$\therefore AF = CF = EF = \frac{\sqrt{2}}{4} m,$$

同法可证 $AD = EF = AF = CF,$

$$\therefore CD = 3CF = \frac{3\sqrt{2}}{4} m.$$

【点睛】主要考查了旋转的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质，利用一线三垂直模型构造出全等三角形是解本题的关键。

28. 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的半径为 1， P 是 $\odot O$ 外一点，给出如下的定义：若在 $\odot O$ 上存在一点 T ，使得点 P 关于某条过点 T 的直线对称后的点 Q 在 $\odot O$ 上，则称 Q 为点 P 关于 $\odot O$ 的关联点。

(1) 当点 P 在直线 $y = 2x$ 上时。

①若点 $P(1, 2)$ ，在点 $Q_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ， $Q_2(0, 1)$ ， $Q_3(1, 0)$ 中，点 P 关于 $\odot O$ 的关联点是_____；

②若 P 关于 $\odot O$ 的关联点 Q 存在，求点 P 的横坐标 p 的取值范围。

(2) 已知点 $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ，动点 M 满足 $AM \leq 1$ ，若 M 关于 $\odot O$ 的关联点 N 存在，直接写出 MN 的取值范围。

【答案】(1) ① Q_1, Q_2 ；② $-\frac{3\sqrt{5}}{5} \leq p < -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{5} < p \leq \frac{3\sqrt{5}}{5}$

(2) $\frac{5}{8} \leq MN \leq 4$

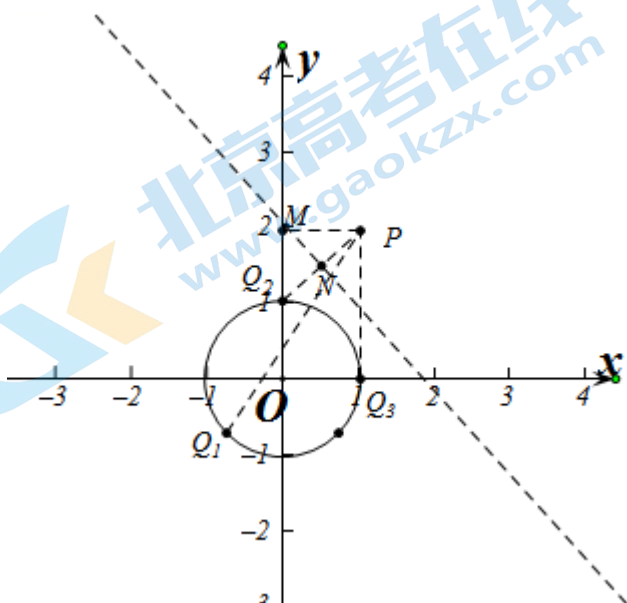
【分析】(1) ①根据新定义，画出图形，进而即可求解；

②设 $y = 2x$ 与 $\odot O$ 交于点 M, N ，过点 N, P 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 A, B ，根据勾股定理得出 $x^2 + y^2 = 1$ ，联立直线解析式，得出交点坐标，进而根据相似三角形的判定与性质求出 p 的最大值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，同理可得 p 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 即可求解；

(2) 依题意，关于 $\odot O$ 的关联点在半径为 3 的圆内，进而根据点与圆的位置关系，求得 MN 的最值，即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图所示，



$$\because P(1, 2), Q_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$\therefore PQ_1$ 连线的中点在 $\odot O$ 的内部，

$\therefore Q_1$ 是 P 关于 $\odot O$ 的关联点，

$$\because P(1, 2), Q_3(1, 0),$$

$\therefore PQ_3$ 的中点的纵坐标为 1，

$\therefore$ 点 P, Q_3 关于 $y = 1$ 对称点，

$\therefore Q_3$ 是 P 关于 $\odot O$ 的关联点，

$$\because P(1, 2), Q_2(0, 1),$$

$$\therefore PQ_2 \text{ 中点 } N \text{ 为 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), M(0, 2), MP = MQ_2,$$

$$\therefore MN \perp PQ_3,$$

$\therefore Q_3$ 与 P 关于 MN 对称,

设直线 MN 解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{1}{2}m + n = \frac{3}{2} \\ n = 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -1 \\ n = 2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 2,$$

$\therefore$ 当 $y = 0$ 时 $x = 2$,

$\therefore MN$ 与 x 轴交于点 $(2, 0)$,

设点 O 到 MN 的距离为 h ,

$$\text{根据等面积法知 } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} h,$$

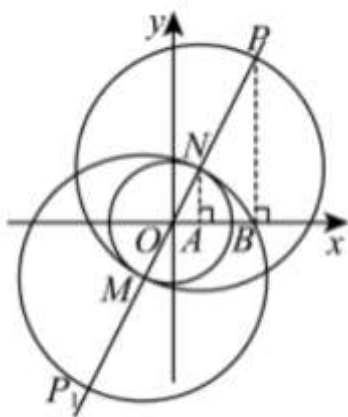
$$\therefore h = \sqrt{2} > 1,$$

$\therefore Q_2$ 不是 P 关于 $\odot O$ 的关联点,

综上, P 关于 $\odot O$ 的关联点是 Q_1, Q_3 ,

故答案为: Q_1, Q_3 .

② 设 $y = 2x$ 与 $\odot O$ 交于点 M, N , 过点 N, P 分别作 x 轴的垂线, 垂足分别为 A, B ,



设 $\odot O$ 上点的坐标为 (x, y) , 则 $x^2 + y^2 = 1$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases},$$

当点 P 的对称点为 M 时, 点 P 的横坐标最大,

$$\therefore ON = 1, OP = 1 + 2 = 3, AN \parallel PB,$$

$$\therefore \triangle AON \sim \triangle OBP,$$

$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OA}{OB}, \text{ 即 } \frac{1}{3} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{p},$$

$$\therefore p = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

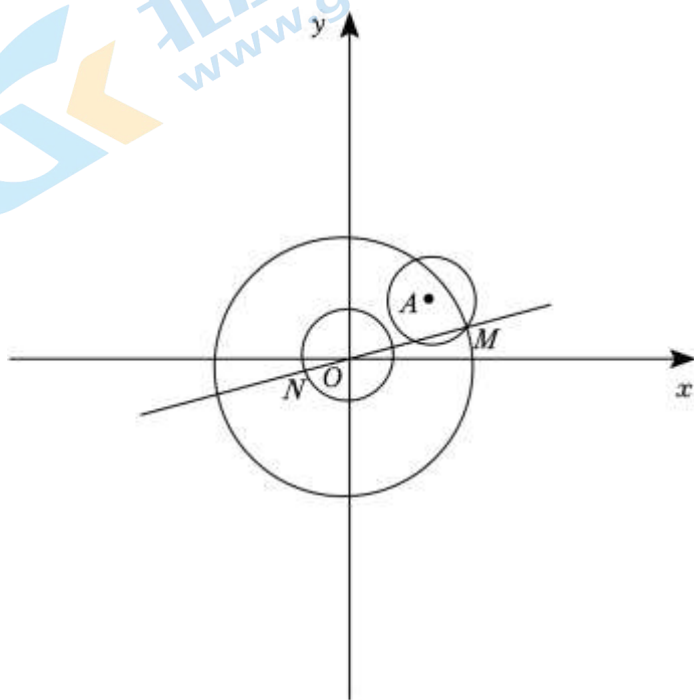
同理可得 p 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$,

又 P 只能在 $\odot O$ 外,

$$\therefore -\frac{3\sqrt{5}}{5} \leq p < -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 或 } \frac{\sqrt{5}}{5} < p \leq \frac{3\sqrt{5}}{5};$$

【小问 2 详解】

解：依题意，关于 $\odot O$ 的关联点在半径为 3 的圆内，如图所示，

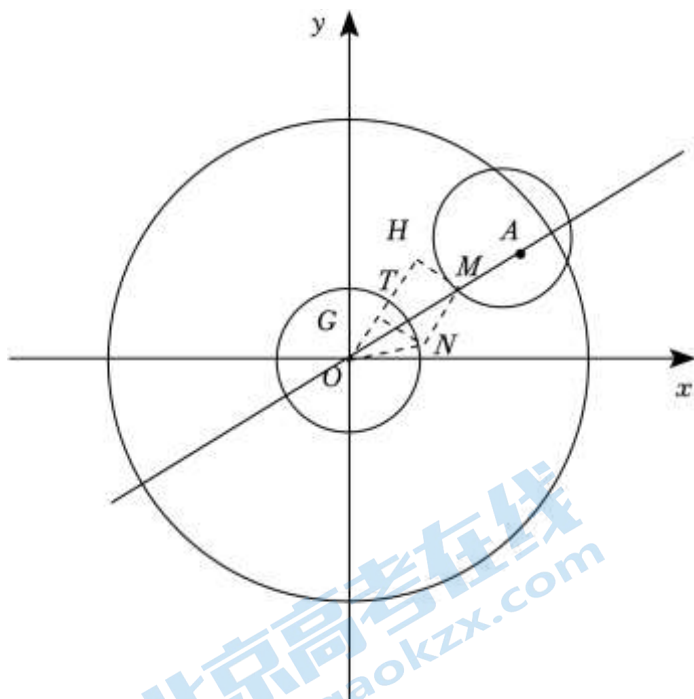


$$\because AM \leq 1,$$

则 M 在半径为 1 的 $\odot A$ 上以及圆内， M 关于 $\odot O$ 的关联点 N ,

$$\therefore MN \text{ 的最大值为 } OM + ON = 3 + 1 = 4,$$

如图所示，当 M 在线段 OA 上时， MN 取最小值，



$$\therefore OA = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2},$$

四边形 $MNGH$ 是矩形，则 $MN = GH$ ， $MH = NG$ ，

设 $MN = GH = x$ ，则 $GT = HT = \frac{1}{2}x$ ，

$$\text{在 } Rt\triangle OMH \text{ 中， } MH^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ONG \text{ 中， } NG^2 = 1^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 = 1^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{8},$$

$$\therefore \frac{5}{8} \leq MN \leq 4.$$

【点睛】本题考查了坐标与图形，勾股定理，平行线分线段成比例，解一元二次方程，点与圆的位置关系求最值问题，熟练掌握以上知识是解题的关键。

北京初三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024年1月北京初三期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！



微信搜一搜



京考一点通

