北京市房山区2019年高考第一次模拟测试

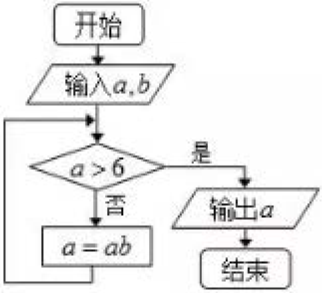
数学（理科）

一、选择题（本大题共8小题，共40.0分）

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{0,1\}$，则（　　）

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cap B=A$　　C. $A\cap B=B$　　D. $A=B$

2. 执行如图所示的程序框图，如果输入 $a=1$，$b=2$，则输出的 a 值为（　　）



A. 7　　B. 8　　C. 12　　D. 16

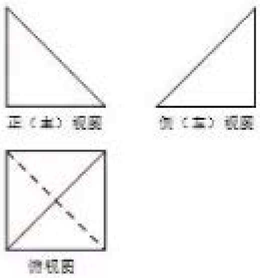
3. 在极坐标系中，圆 $\rho=2\cos\theta$ 的圆心坐标为（　　）

A. $(1,\frac{\pi}{2})$　　B. $(-1,\frac{\pi}{2})$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,0)$

4. 已知$\vec{a}$为单位向量，且$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，则$|\vec{b}|=$（　　）

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 某三棱锥的三视图如图所示，正视图与侧视图是两个全等的等腰直角三角形，直角边长为1，俯视图是正方形，则该三棱锥的四个面的面积中最大的是（　　）



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

6. 设 a 为实数，则“$a>\frac{1}{a^2}$”是“$a^2>\frac{1}{a}$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=2^x$（$x<0$）与 $g(x)=\ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,e)$　　C. $(2,e)$　　D. $(e,+\infty)$

8. 《九章算术》中有如下问题：今有蒲生一日，长三尺，莞生一日，长1尺，蒲生日自半，莞生日自倍，问几何日而长等？意思是：今有蒲第一天长高3尺，莞第一天长高1尺，以后蒲每天长高前一天的一半，莞每天长高前一天的2倍，若蒲、莞长

度相等，则所需时间为（　　）

（结果精确到0.1．参考数据：lg2=0.3010，lg3=0.4771．）

A．2.2天　　B．2.4天　　C．2.6天　　D．2.8天

二、填空题（本大题共6小题，共30.0分）

9．复数$z=\frac{3+i}{1+i}$，其中i是虚数单位，则复数z的虚部为______．

10．若x，y满足$\begin{cases}x\le 2,\\ y\le 2x,\\ x+y\ge 3,\end{cases}$则$x+2y$的最大值为______．

11．在△ABC中，已知$BC=6$，$AC=4$，$sinA=\frac{3}{4}$，则∠B=______．

12．已知点A（-2，0），B（0，2），若点P在圆（x-3）^{2}+（y+1）^{2}=2上运动，则△ABP面积的最小值为______．

13．函数$y=f(x)$，$x\in[1,+\infty)$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)$，$n\in N^*$，

①函数$f(x)$是增函数；

②数列$\{a_n\}$是递增数列．

写出一个满足①的函数$f(x)$的解析式______．

写出一个满足②但不满足①的函数$f(x)$的解析式______．

14．已知曲线$F(x,y)=0$关于x轴、y轴和直线$y=x$均对称．

设集合$S=\{(x,y)|F(x,y)=0,x\in Z,y\in Z\}$．下列命题：

①若（1，2）∈S，则（-2，-1）∈S；

②若（0，2）∈S，则S中至少有4个元素；

③S中元素的个数一定为偶数；

④若$\{(x,y)|y^2=4x,x\in Z,y\in Z\}\subseteq S$，则$\{(x,y)|x^2=-4y,x\in Z,y\in Z\}\subseteq S$．

其中正确命题的序号为______．（写出所有正确命题的序号）

三、解答题（本大题共6小题，共80.0分）

15．已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{3}sin2x+cos2x+1}{2cosx}$．

（Ⅰ）求$f(0)$的值；

（Ⅱ）求函数$f(x)$的定义域；

（Ⅲ）求函数$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上的取值范围．

16．苹果是人们日常生活中常见的营养型水果．某地水果批发市场销售来自5个不同产地的富士苹果，各产地的包装规格相同，它们的批发价格（元/箱）和市场份额如下：

产地	A	B	C	D	E
批发价格	150	160	140	155	170
市场份额	15%	10%	25%	20%	30%

市场份额亦称“市场占有率”．指某一产品的销售量在市场同类产品中所占比重．

（Ⅰ）从该地批发市场销售的富士苹果中随机抽取一箱，估计该箱苹果价格低于160元的概率；

（Ⅱ）按市场份额进行分层抽样，随机抽取20箱富士苹果进行检验，

①从产地A，B共抽取n箱，求n的值；

②从这n箱中随机抽取三箱进行等级检验，随机变量X表示来自产地B的箱数，求

（Ⅲ）产地 F 的富士苹果明年将进入该地市场，定价 160 元/箱，并占有一定市场份额，原有五个产地的苹果价格不变，所占市场份额之比不变（不考虑其他因素）。设今年苹果的平均批发价为每箱 M_1 元，明年苹果的平均批发价为每箱 M_2 元，比较 M_1，M_2 的大小．（只需写出结论）

17. 如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E，F，O 分别为 DC，AE，BC 的中点．以 AE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起，使点 D 到达点 P 的位置，且平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$（如图 2）．

（Ⅰ）求证：$BC\perp$ 平面 POF；

（Ⅱ）求直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 PE 上是否存在点 M，使得 $AM\parallel$ 平面 PBC？若存在，求 $\frac{PM}{PE}$ 的值；若不存在，说明理由．

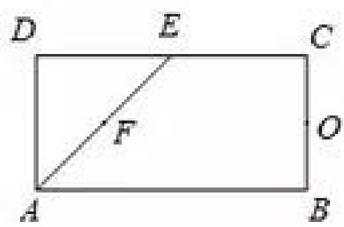


图 1

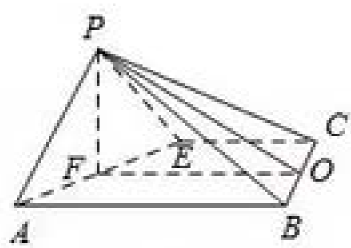


图 2

18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左顶点为 A，右焦点为 F，且 $|AF|=3$．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）过点 F 做互相垂直的两条直线 l_1，l_2 分别交直线 l：$x=4$ 于 M，N 两点，直线 AM，AN 分别交椭圆于 P，Q 两点，求证：P，F，Q 三点共线．

19. 已知函数 $f(x)=(mx^2-x)\ln x+\frac{1}{2}mx^2(m\le 1)$．

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 的图象在 x 轴的上方，求 m 的取值范围．

20. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n\in\{0,1\}$，$n\in N^*$，且 $a_1=1$，则称 $\{a_n\}$ 为一个 X 数列．对于一个 X 数列 $\{a_n\}$，若数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=1$，且 $b_{n+1}=|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}|b_n$，$n\in N^*$，则称 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的伴随数列．

（Ⅰ）若 X 数列 $\{a_n\}$ 中 $a_2=1$，$a_3=0$，$a_4=1$，写出其伴随数列 $\{b_n\}$ 中 b_2，b_3，b_4 的值；

（Ⅱ）若 $\{a_n\}$ 为一个 X 数列，$\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的伴随数列．

①证明："$\{a_n\}$ 为常数列"是"$\{b_n\}$ 为等比数列"的充要条件；

②求 b_{2019} 的最大值．

答案

1. C
2. B
3. D
4. A
5. C
6. A
7. B
8. C
9. -1
10. 10
11. $\frac{\pi}{6}$
12. 4
13. $f(x)=x^2$ $f(x)=(x-\frac{4}{3})^2$
14. ①②④
15. 解：（Ⅰ）$f(0)=\frac{\sqrt{3}\cdot sin0+cos0+1}{2cos0}=\frac{1+1}{2}=1$；

（Ⅱ）由 $cosx\neq0$，得$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$.

∴函数的定义域是 $\{x|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z\}$；

（Ⅲ）$f(x)=\frac{\sqrt{3}\cdot2\cdot sinx\cdot cosx+2\cdot cos^2x-1+1}{2\cdot cosx}$

$=\sqrt{3}\cdot sinx+cosx=2sin(x+\frac{\pi}{6})$.

∵$x\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，即$0<x<\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

∴$\frac{1}{2}<sin(x+\frac{\pi}{6})\le1$，得 $1<2sin(x+\frac{\pi}{6})\le2$.

∴函数 $f(x)$ 在$(0,\ \frac{\pi}{2})$上的取值范围为 $(1,\ 2]$.

16.（Ⅰ）设事件 A：“从该地批发市场销售的富士苹果中随机抽取一箱，该箱苹果价格低于 160 元”．由题意可得：$P(A)=0.15+0.25+0.20=0.6$ ………………．（3 分）

（Ⅱ）（1）A 地抽取 $20\times15\%=3$； B 地抽取 $20\times10\%=2$

所以 $n=3+2=5$…………………………..（5 分）

（2）X 的可能取值 0，1，2$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，

$P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$…………………..（8 分）

所以 X 的分布列为

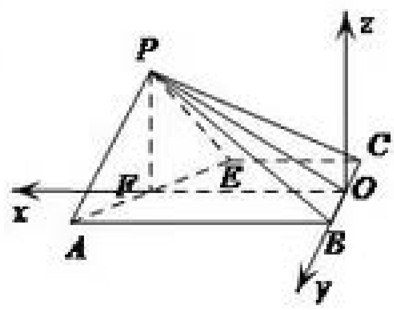
X	0	1	2

P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$………………（10 分）

（Ⅲ）$M_1<M_2$…………（13 分）

17．证明：（Ⅰ）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，E 是 CD 中点，



所以 $DA=DE$ 即 $PA=PE$，

又 F 为 AE 的中点，所以 $PF\perp AE$，

又 平面 $PAE\perp$平面 $ABCE$，平面 $PAE\cap$平面 $ABCE=AE$，

$PF\subset$平面 PAE，

所以 $PF\perp$平面 $ABCE$，$BC\subset$平面 $ABCE$，

所以 $PF\perp BC$，

由 F，O 分别为 AE，BC 的中点，易知 $FO\parallel AB$，所以 $OF\perp BC$，

所以 $BC\perp$平面 POF，

（Ⅱ）：过点 O 做平面 $ABCE$ 的垂线 OZ，

以 O 为原点，分别以 OF，OB，OZ 为 x，y，z 轴建立坐标系 O-xyz

则$A(4，1，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，-1，0)$，$E(2，-1，0)$，$P(3，0，\sqrt{2})$，

$\therefore\overrightarrow{AP}=(-1，-1，\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BP}=(3，-1，\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(0，2，0)$，

设平面 PBC 的法向量为$\vec{n}=(x，y，z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$得$\begin{cases}3x-y+\sqrt{2}z=0\\ 2y=0\end{cases}$，令 $z=3$ 得$\vec{n}=(-\sqrt{2}，0，3)$，

$\cos<\vec{n}，\overrightarrow{AP}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$，

所以 直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值$\frac{2\sqrt{22}}{11}$，

（Ⅲ）在线段 PE 上不存在点 M，使得 $AM\parallel$平面 PBC，证明如下：

点 M 在线段 PE 上，设$\frac{PM}{PE}=\lambda$则$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PE}$，$\lambda\in[0，1]$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{PE}=(-1-\lambda，-1-\lambda，\sqrt{2}(1-\lambda))$，

若 $AM\parallel$平面 PBC，则$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$，

由 $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$得 $(-1-\lambda，-1-\lambda，(1-\lambda)\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}，0，3)=0$，

解得 $\lambda=2\notin[0，1]$

所以 在线段 PE 上不存在点 M，使得 $AM\parallel$平面 PBC，

18.解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c，依题意：$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$，解得：$a=2$，$c=1$

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

（Ⅱ）证明：由题意可知，直线 l_1，l_2 的斜率均存在且不为 0，$A(-2，0)$ $F(1，0)$

设 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则 $k_1\cdot k_2=-1$，

则直线 l_1 的方程为 $y=k_1(x-1)$，则 M 点坐标为 $(4，3k_1)$，$k_{AM}=\frac{3k_1}{4+2}=\frac{k_1}{2}$，设直线 AM

的方程为$y=\frac{k_1}{2}(x+2)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{k_1}{2}(x+2),\end{cases}$ 得：$(3+k_1^2)x^2+4k_1^2x+4k_1^2-12=0$

因为 x=-2 是方程的根，

所以$x_p=\frac{6-2k_1^2}{3+k_1^2}$，$y_p=\frac{k_1}{2}(x_P+2)=\frac{6k_1}{3+k_1^2}$.

同理可得$x_Q=\frac{6-2k_2^2}{3+k_2^2}$，$y_Q=\frac{6k_2}{3+k_2^2}$.

当$x_p=\frac{6-2k_1^2}{3+k_1^2}=1$，即$k_1^2=1$时，可得$k_2^2=1$，$x_Q=1$

又 F 的坐标为 F（1，0）所以 P，F，Q 三点共线；

当$x_p=\frac{6-2k_1^2}{3+k_1^2}\neq1$，即$k_1^2\neq1$，$k_2^2\neq1$时，

$$k_{PF}=\frac{\frac{6k_1}{3+k_1^2}}{\frac{6-2k_1^2}{3+k_1^2}-1}=\frac{2k_1}{1-k_1^2},\quad k_{QF}=\frac{\frac{6k_2}{3+k_2^2}}{\frac{6-2k_2^2}{3+k_2^2}-1}=\frac{2k_2}{1-k_2^2}=\frac{2(-\frac{1}{k_1})}{1-(-\frac{1}{k_1})^2}=\frac{-2k_1}{k_1^2-1}$$

所以 k_{QF}=k_{PF}所以 P，F，Q 三点共线，

综上所述 P，F，Q 三点共线

19.解：（Ⅰ）当 m=0 时，f（x）=-$x$ln$x$，f'（x）=-ln$x$-1，

所以 f（1）=0，f'（1）=-1，

所以曲线 y=f（x）在 x=1 处的切线方程是 y=-x+1；

（Ⅱ）"函数 f（x）的图象在 x 轴的上方"，等价于"x>0 时，f（x）>0 恒成立"，

由$f(x)=(mx^2-x)lnx+\frac{1}{2}mx^2$得 f'（x）=（2mx-1）ln$x$+2mx-1=（2mx-1）（ln$x$+1），

①当 m≤0 时，因为$f(1)=\frac{1}{2}m\leq0$，不合题意；

②当 0<m≤1 时，令 f'（x）=0 得$x_1=\frac{1}{2m}$，$x_2=\frac{1}{e}$显然$\frac{1}{2m}>\frac{1}{e}$；

令 f'（x）>0 得$0<x<\frac{1}{e}$或$x>\frac{1}{2m}$；令 f'（x）<0 得$\frac{1}{e}<x<\frac{1}{2m}$，

所以函数 f（x）的单调递增区间是$(0,\frac{1}{e})$，$(\frac{1}{2m},+\infty)$，单调递减区间是$(\frac{1}{e},\frac{1}{2m})$，

当$x\in(0,\frac{1}{e})$时，mx^2-x<0，ln$x$<0，所以$f(x)=(mx^2-x)lnx+\frac{1}{2}mx^2>0$，

只需$f(\frac{1}{2m})=-\frac{1}{4m}ln\frac{1}{2m}+\frac{1}{8m}>0$，所以$m>\frac{1}{2\sqrt{e}}$，

所以$\frac{1}{2\sqrt{e}}<m\leq1$.

20.（Ⅰ）解：$b_2=|a_1-\frac{a_2}{2}|b_1=\frac{1}{2}$，$b_3=|a_2-\frac{a_3}{2}|b_2=\frac{1}{2}$，$b_4=|a_3-\frac{a_4}{2}|b_3=\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）①证明：充分性：若 X 数列$\{a_n\}$为常数列，

∵a_1=1，∴$a_n=1$，$n\in N^*$，

∴$b_{n+1}=|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}|b_n=\frac{1}{2}b_n$，$n\in N^*$，

必要性：（方法一）假设数列$\{b_n\}$为等比数列，而数列$\{a_n\}$不为常数列，

∴数列$\{a_n\}$中存在等于 0 的项，设第一个等于 0 的项为a_k，其中$k>1$，$k\in N^*$，

∴$b_k=|1-\frac{0}{2}|b_{k-1}=b_{k-1}$，得等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\frac{b_k}{b_{k-1}}=1$.

又$b_{k+1}=|\frac{a_{k+1}}{2}|b_k$，得等比数列$\{b_n\}$的公比$q=|\frac{a_{k+1}}{2}|\leq\frac{1}{2}$，与$q=1$矛盾.

∴假设不成立.

∴当数列$\{b_n\}$为等比数列时，数列$\{a_n\}$为常数列.

综上"$\{a_n\}$为常数列"是"$\{b_n\}$为等比数列"的充要条件；

②解：当$a_n=1$，$a_{n+1}=1$时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$.

当$a_n=1$，$a_{n+1}=0$时，$b_{n+1}=b_n$.

当$a_n=0$，$a_{n+1}=1$时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$.

当$a_n=0$，$a_{n+1}=0$时，$b_{n+1}=0$.

综上$b_{n+2}=\frac{1}{4}b_n$，或$\frac{1}{2}b_n$，或 0，又由题意可知$b_n\geq0$，

∴$b_{n+2}\leq\frac{1}{2}b_n$.

∴$b_{2019}\leq\frac{1}{2}b_{2017}\leq\cdots\leq\frac{1}{2^{1009}}\cdot b_1=\frac{1}{2^{1009}}$.

当数列$a_n=\begin{cases}1,n=2k-1,k\in N^*\\0,n=2k,k\in N^*\end{cases}$时，$b_{2019}=\frac{1}{2^{1009}}$.

b_{2019}的最大值为$\frac{1}{2^{1009}}$.