2023-2024 学年高三年级 12 月月考（数学）
(考试时间：120 分钟　总分：150 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x(x+1)\le 0\}$，集合 $B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|x\ge -1\}$　　B. $\{x|x>-1\}$　　C. $\{x|x\ge 0\}$　　D. $\{x|x>0\}$

2. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程为

A. $x=-1$　　B. $y=-1$　　C. $x=-\frac{1}{2}$　　D. $y=-\frac{1}{2}$

3. 在 $(x^2+\frac{2}{x^3})^5$ 的展开式中，常数项为

A. 10　　B. 20　　C. 40　　D. 80

4. 已知复数 $z=\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})(a,b\in\mathbf{R})$，则“$z$ 为纯虚数”的充分必要条件为

A. $a^2+b^2\ne 0$　　B. $ab=0$

C. $a=0,\ \ b\ne 0$　　D. $a\ne 0,\ \ b=0$

5. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $a>b$，则

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $2^a>2^b$

C. $\lg a>\lg b$　　D. $\sin a>\sin b$

6. 将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 图象在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减，则 m 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

7. 甲、乙、丙、丁、戊五人排成一排，甲和乙都排在丙的同一侧，排法种数为

A. 12　　B. 40　　C. 60　　D. 80

8. 已知曲线C上任意一点P坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{2}t,a+\frac{\sqrt{2}}{2}t)$（$t$为参数），$A(-1,0)$，$B(1,0)$．若曲线$C$上存在点$P$满足$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，则实数$a$的取值范围为

A. $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　D．$[-2,2]$

9.已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\geq 0,\\ \cos\pi x, x<0.\end{cases}$ 若关于x的方程$f(x+a)=0$在$(0,+\infty)$内有唯一实根，则实数a的最小值为

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D．1

10. 已知甲、乙、丙三人组成考察小组，每个组员最多可以携带供本人在沙漠中生存 36 天的水和食物，且计划每天向沙漠深处走 30 公里，每个人都可以在沙漠中将部分水和食物交给其他人然后独自返回．若组员甲与其他两个人合作，且要求三个人都能够安全返回，则甲最远能深入沙漠公里数为

A. 1080　　B. 900　　C. 810　　D．540

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 若等比数列$\{a_n\}$满足$a_2a_4=a_5$，$a_4=8$，则公比$q=$____；前n项和$S_n=$_____.

12. 在ΔABC中，$c=a\cos B$．则$A=$_______；若$\sin C=\frac{1}{3}$，则$\cos(\pi+B)=$_______.

13. 若非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，$2|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的大小为_______.

14. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线为等边三角形$OAB$的边$OA,OB$所在直线，直线$AB$过双曲线的焦点，且$|AB|=2$，则$a=$ _______.

15. 在平面直角坐标系 xOy 中，动点 $P(x,y)$ 到两坐标轴的距离之和等于它到定点 $(1,1)$ 的距离，记点 P 的轨迹为 C .给出下面四个结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

③点 $(-a^2,1)$ $(a\in\mathbf{R})$ 在曲线 C 上；

④在第一象限内，曲线 C 与 x 轴的非负半轴、y 轴的非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

16.（本小题满分 13 分）

已知 $\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=2\cos^2 x+a\sin 2x+1$ 的一个零点.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 单调递增区间.

17.（本小题共 13 分）

某公司购买了 A，B，C 三种不同品牌的电动智能送风口罩. 为了解三种品牌口罩的电池性能，现采用分层抽样的方法，从三种品牌的口罩中抽出 25 台，测试它们一次完全充电后的连续待机时长，统计结果如下（单位：小时）：

A	4	4	4.5	5	5.5	6	6			
B	4.5	5	6	6.5	6.5	7	7	7.5		
C	5	5	5.5	6	6	7	7	7.5	8	8

（Ⅰ）已知该公司购买的 C 品牌电动智能送风口罩比 B 品牌多 200 台，求该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量；

（Ⅱ）从 A 品牌和 B 品牌抽出的电动智能送风口罩中，各随机选取一台，求 A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率；

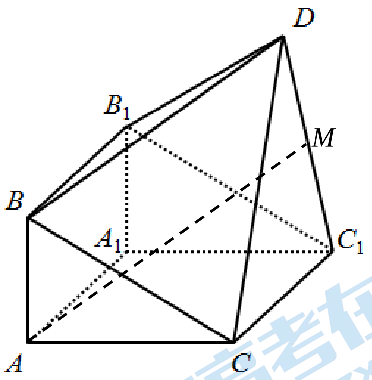
（Ⅲ）再从 A，B，C 三种不同品牌的电动智能送风口罩中各随机抽取一台，它们的待机时长分别是 a，b，c（单位：小时）. 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 μ_1，表格中数据的平均数记为 μ_0. 若 $\mu_0 \le \mu_1$，写出 $a+b+c$ 的最小值（结论不要求证明）.

18.（本小题满分 15 分）

如图，由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $D-BB_1C_1C$ 构成的几何体中，

$\angle BAC=90°$， $AB=1$， $BC=BB_1=2$

$C_1D=CD=\sqrt{5}$，平面 $CC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1.



（Ⅰ）求证： $AC\perp DC_1$；

（Ⅱ）若 M 为 DC_1 中点，求证： AM // 平面 DBB_1；

（Ⅲ）在线段 BC 上（含端点）是否存在点 P，使直线 DP 与平面 DBB_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$？若存在，求 $\dfrac{BP}{BC}$ 的值，若不存在，说明理由.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$，其中实数 $a<3$.

（Ⅰ）判断 $x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

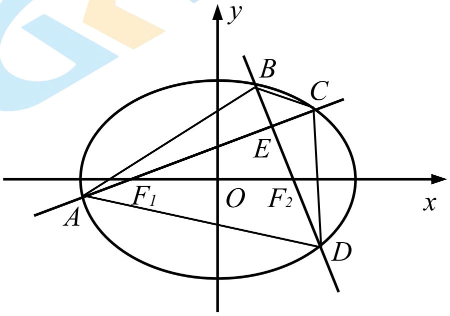
（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立，求 a 的取值范围.

20.（本小题满分 15 分）

已知椭圆W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左右两个焦点为$F_1,F_2$，且$|F_1F_2|=2$，椭圆上一动点$P$满足$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求椭圆W的标准方程及离心率；

（Ⅱ）如图，过点F_1作直线l_1与椭圆W交于点A,C，过点F_2作直线$l_2\perp l_1$，且l_2与椭圆W交于点B,D，l_1与l_2交于点E，试求四边形$ABCD$面积的最大值.



21（本小题满分 15 分）

对于正整数集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq 3$），如果去掉其中任意一个元素a_i（$i=1,2,\cdots,n$）之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空集的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合A为“和谐集”.

（I）判断集合$\{1,2,3,4,5\}$是否是“和谐集”（不必写过程）;

（II）求证：若集合A是“和谐集”，则集合A中元素个数为奇数;

（III）若集合A是“和谐集”，求集合A中元素个数的最小值.

参考答案

一、选择题

ACCDB　CDCBC

二、填空题

11．2,　2^n-1；12．$\frac{\pi}{2}$；　$-\frac{1}{3}$；13．$\frac{2\pi}{3}$；14．$\frac{3}{2}$；15.②③④

三、解答题

16．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题意可知 $f(\frac{\pi}{3})=0$，即 $f(\frac{\pi}{3})=2\cos^2\frac{\pi}{3}+a\sin\frac{2\pi}{3}+1=0$

即 $f(\frac{\pi}{3})=2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}a+1=0$，

解得 $a=-\sqrt{3}$．

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $f(x)=2\cos^2x-\sqrt{3}\sin 2x+1$

$$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2$$

$$=2\sin(2x+\frac{5\pi}{6})+2$$

函数 $y=\sin x$ 的增区间为 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}],k\in\mathbf{Z}$．

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{5\pi}{6}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，　$k\in\mathbf{Z}$，

得 $k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<k\pi-\frac{\pi}{6}$，　$k\in\mathbf{Z}$，

所以，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{6}]$，　$k\in\mathbf{Z}$．

17．（本小题共 13 分）

解：(I) 设该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量为 x 台，

则购买的 C 品牌电动智能送风口罩为 $\frac{5}{4}x$ 台，

由题意得 $\frac{5}{4}x-x=200$，所以 $x=800$．

答：该公司购买的 B 品牌电动智能送风口罩的数量为 800 台　　　　..………………5 分

（Ⅱ）设 A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率为 P，

则 $P=\dfrac{7}{7\times 8}=\dfrac{1}{8}$.

答：在 A 品牌和 B 品牌抽出的电动智能送风口罩中各任取一台，
  A 品牌待机时长高于 B 品牌的概率为

$\dfrac{1}{8}$.　　　　　　　　　　　　　…………………10 分

（Ⅲ）18

18.（本小题满分 15 分）

解：【说明：本题下面过程中的标灰部分不写不扣分】

（Ⅰ）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，

故 $AC\perp CC_1$，

由平面 $CC_1D\perp$ 平面 ACC_1A_1 且平面 $CC_1D\cap$ 平面 $ACC_1A_1=CC_1$，

所以 $AC\perp$ 平面 CC_1D，

又 $DC_1\subset$ 平面 CC_1D，

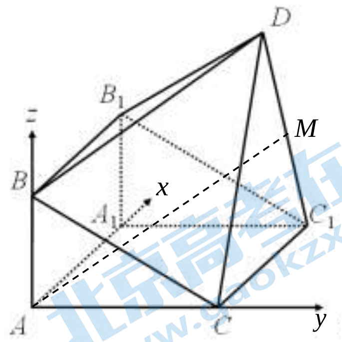
所以 $AC\perp DC_1$.

（Ⅱ）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$，

又 $\angle BAC=90°$，

所以，如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



依据已知条件可得 $A(0,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$C_1(2,\sqrt{3},0)$，

$B(0,0,1)$，$B_1(2,0,1)$，$D(1,\sqrt{3},2)$，

所以 $\overrightarrow{BB_1}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BD}=(1,\sqrt{3},1)$，

设平面 DBB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $z=-\sqrt{3}$，$x=0$，于是 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$，

因为 M 为 DC_1 中点，所以 $M(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)$，所以 $\overrightarrow{AM}=(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)$，

由 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=(\frac{3}{2},\sqrt{3},1)\cdot(0,1,-\sqrt{3})=0$ 可得 $\overrightarrow{AM}\perp\boldsymbol{n}$，

所以 AM 与平面 DBB_1 所成角为 $0°$，又 $AM\not\subset$ 平面 DBB_1，

所以 $AM\ //$ 平面 DBB_1.

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知平面 BB_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $P(0,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$，$\overrightarrow{DP}=(-1,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-1-\lambda)$.

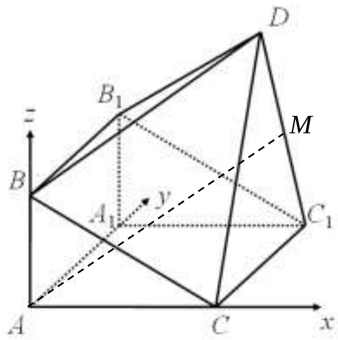
若直线 DP 与平面 DBB_1 成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则

$$\left|\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{DP}\rangle\right| = \frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{DP}\right|} = \frac{\left|2\sqrt{3}\lambda\right|}{2\sqrt{4\lambda^2-4\lambda+5}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

解得 $\lambda = \dfrac{5}{4} \notin [0,1]$，

故不存在这样的点.

{说明 1：如果学生如右图建系，关键量的坐标如下：



（Ⅱ）$\overrightarrow{BB_1} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{BD} = (\sqrt{3},1,1)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1} = 0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y = 0, \\ \sqrt{3}x + y + z = 0. \end{cases}$

$\boldsymbol{n} = (1,\ 0,\ -\sqrt{3})$，

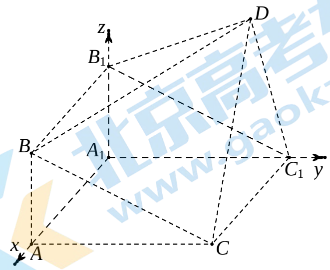
$M(\sqrt{3},\dfrac{3}{2},1)$，所以 $\overrightarrow{AM} = (\sqrt{3},\dfrac{3}{2},1)$，

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知平面 DBB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,\ 0,\ -\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC}$，$\lambda \in [0,1]$，

则 $P(\sqrt{3}\lambda, 0, 1-\lambda)$，$\overrightarrow{DP} = (\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, -1, -1-\lambda)$.}

{说明 2：如果学生如右图建系，关键量的坐标如下：



（Ⅱ）$\overrightarrow{B_1B} = (2,0,0)$，$\overrightarrow{BD} = (-1,\sqrt{3},1)$，

由 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1B} = 0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0, \\ -x + \sqrt{3}y + z = 0. \end{cases}$

$\boldsymbol{n} = (0, 1, -\sqrt{3})$，

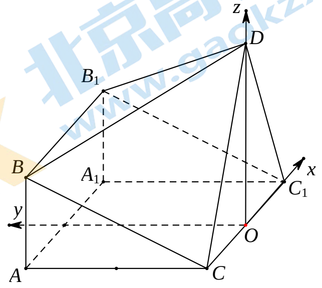
$M(\dfrac{1}{2},\sqrt{3},1)$，所以 $\overrightarrow{AM} = (-\dfrac{3}{2},\sqrt{3},1)$，

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知平面 DBB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (0, 1, -\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$， $\lambda\in[0,1]$，

则 $P(2,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$， $\overrightarrow{DP}=(1,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},-1-\lambda)$.}

{说明 3：如果学生如右图建系，关键量的坐标如下：



（Ⅱ） $\overrightarrow{BB_1}=(2,0,0)$， $\overrightarrow{BD}=(1,-\sqrt{3},1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x-\sqrt{3}y+z=0.\end{cases}$

$\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$，

$M(\frac{1}{2},0,1)$， 所以 $\overrightarrow{AM}=(\frac{3}{2},-\sqrt{3},1)$，

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知平面 DBB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$， $\lambda\in[0,1]$，

则 $P(-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$， $\overrightarrow{DP}=(-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,-1-\lambda)$.}

19.（本小题满分 14 分）

解：法 1：

（Ⅰ）由 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$ 可得

函数定义域为 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-2)]}{x+1}$$

$$=\frac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1},$$

由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=1, x_2=a-2$.

因为 $a<3$，所以 $a-2<1$.

当 $a\le 1$ 时， $a-2\le -1$，所以 $f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

当 $1<a<3$ 时， $-1<a-2<1$，

$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-1,a-2)$	$a-2$	$(a-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，且为极小值点.

（Ⅱ）易知 $f(0)=0$，

由（Ⅰ）可知，

当 $a\le 2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，

所以有 $f(x)\le 0$ 恒成立；

当 $2<a<3$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a-2]$ 上单调递增，

所以 $f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以 $a\le 2$ 时有 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立.

法 2：

（Ⅰ）由 $f(x)=x^2-2ax+4(a-1)\ln(x+1)$ 可得

函数定义域为 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=2x-2a+\frac{4(a-1)}{x+1}$$

$$=\frac{2[x^2+(1-a)x+(a-2)]}{x+1}$$

令 $g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$，经验证 $g(1)=0$，

因为 $a<3$，所以 $g(x)=0$ 的判别式 $\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2>0$，

{说明：写明 $\Delta=(1-a)^2-4(a-2)=a^2-6a+9=(a-3)^2\neq 0$ 也可以}

由二次函数性质可得，1 是 $g(x)=x^2+(1-a)x+(a-2)$ 的异号零点，

所以 1 是 $f'(x)$ 的异号零点，

所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

（Ⅱ）易知 $f(0)=0$，

因为 $f'(x)=\dfrac{2(x-1)[x-(a-2)]}{x+1}$，

又因为 $a<3$，所以 $a-2<1$，

所以当 $a\le 2$ 时，在区间 $[0,1]$ 上 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 单调递减，

所以有 $f(x)\le 0$ 恒成立；

当 $2<a<3$ 时，在区间 $[0,a-2]$ 上 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(a-2)>f(0)=0$，所以不等式不能恒成立；

所以 $a\le 2$ 时有 $f(x)\le 0$ 在区间 $[0,1]$ 上恒成立.

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由已知，$\begin{cases}2c=2\\2a=2\sqrt{3}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}c=1\\a=\sqrt{3}\\b=\sqrt{2}\end{cases}$.

所以椭圆 W 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　　………………………4 分

（Ⅱ）由题意可知 $EF_1\perp EF_2$，由此可求得 $|EO|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|=1$

所以 E 点轨迹为以原点为圆心，半径为1的圆，显然 E 点在椭圆 W 的内部

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BE|+\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|DE|=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|$

当直线 l_1,l_2 一条为椭圆的长轴，一条与 x 轴垂直时，例如 AC 为长轴，$BD\perp x$ 轴时

把 $x=1$ 代入椭圆方程，可求得 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，由此 $|BD|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，又 $|AC|=2\sqrt{3}$

所以此时 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=4$

当直线 l_1,l_2 的斜率都存在时，

设直线 $l_1: x=my-1,(m\ne 0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases} x=my-1 \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去x 可得$(2m^2+3)y^2-4my-4=0$

所以$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{4m}{2m^2+3} \\ y_1y_2=\dfrac{-4}{2m^2+3} \end{cases}$． $|AC|=\sqrt{(1+m^2)(y_1-y_2)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{2m^2+3}$

同理，由$l_2:x=-\dfrac{1}{m}x+1$可求得$|BD|=\dfrac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{2+3m^2}$

$$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\bullet|BD|=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{2m^2+3}\times\frac{4\sqrt{3}(m^2+1)}{2+3m^2}=\frac{24(m^2+1)^2}{(2m^2+3)(3m^2+2)}$$

$$=\frac{24(m^4+2m^2+1)}{6m^4+13m^2+6}=\frac{4(6m^4+12m^2+6)}{6m^4+13m^2+6}=4(1-\frac{m^2}{6m^4+13m^2+6})<4$$

综上，四边形$ABCD$面积的最大值为4，此时直线l_1,l_2一条为椭圆的长轴，一条与x轴垂直.

……………………13 分

(21)（本小题满分 13 分）

解:（I）集合$\{1,2,3,4,5\}$不是“和谐集”. ………………………………3 分

（II）设集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$所有元素之和为M.

由题可知，$M-a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，

因此a_i（$i=1,2,\cdots,n$）的奇偶性相同.

（ i ）如果M为奇数，则a_i（$i=1,2,\cdots,n$）也均为奇数，

由于$M=a_1+a_2+\cdots+a_n$，所以n为奇数.

（ ii ）如果M为偶数，则a_i（$i=1,2,\cdots,n$）均为偶数，

此时设$a_i=2b_i$，则$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$也是“和谐集”.

重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“和谐集”.

此时各项之和也为奇数，集合A中元素个数为奇数.

综上所述，集合A中元素个数为奇数. ………………………………8 分

（III）由（II）可知集合A中元素个数为奇数，

当$n=3$时，显然任意集合$\{a_1,a_2,a_3\}$不是"和谐集".

当$n=5$时，不妨设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

将集合$\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有$a_1+a_5=a_3+a_4$ ①，或者$a_5=a_1+a_3+a_4$ ②；

将集合$\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有$a_2+a_5=a_3+a_4$ ③，或者$a_5=a_2+a_3+a_4$ ④.

由①、③，得$a_1=a_2$，矛盾；由①、④，得$a_1=-a_2$，矛盾；

由②、③，得$a_1=-a_2$，矛盾；由②、④，得$a_1=a_2$，矛盾.

因此当$n=5$时，集合A一定不是"和谐集".

当$n=7$时，设$A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$，

因为$3+5+7+9=11+13$，$1+9+13=5+7+11$，

$9+13=1+3+7+11$，$1+3+5+11=7+13$，$1+9+11=3+5+13$，

$3+7+9=1+5+13$，$1+3+5+9=7+11$，

所以集合$A=\{1,3,5,7,9,11,13\}$是"和谐集".

集合A中元素个数n的最小值是7. ……………………………………13 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！