2024 北京九中高二（下）开学考

数　学

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

一、单选题（共 80 分）

1．已知平面 α 与 β 平面为两个不同的平面，m 与 n 为两条不重合的直线，则下列说法正确的是（　）

A．若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则 $m//\beta$　　B．若 $m//n$，$n//\alpha$，则 $m//\alpha$

C．若 $m\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $m\perp\beta$　　D．若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则 $n\perp\beta$

2．直线 $x+y-3=0$ 的倾斜角为(　)

A．45°　　B．120°　　C．135°　　D．150°

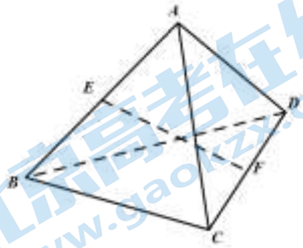
3．已知双曲线 C 的焦点在 y 轴上，且其中一条渐近线的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，则双曲线 C 的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\sqrt{3}$

4．抛物线 $y^2=6x$ 的焦点坐标为（　）

A．$(3,0)$　　B．$\left(\frac{3}{2},0\right)$　　C．$(0,3)$　　D．$\left(0,\frac{3}{2}\right)$

5．如图，在空间四边形 ABCD 中，AD=BC=2，E，F 分别为 AB，CD 的中点，EF=$\sqrt{2}$，则 AD 与 BC 所成的角为(　)



A．30°　B．60°　C．90°　　D．120°

6．如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\left(D^2+E^2-4F>0\right)$ 关于直线 $y=2x$ 对称，那么（　）

A．$D=2E$　　B．$E=2D$

C．$E+2D=0$　　D．$D=E$

7．已知直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $2x+my+1=0$ 平行，则它们之间的距离为（　）

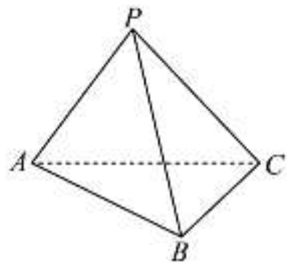
A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{10}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{3\sqrt{10}}{2}$

8．若直线 l：$4x+3y=0$ 与圆 C：$x^2+y^2-2x-4y+t=0$ 相切，则圆 C 的标准方程为（　　）

A．$(x-1)^2+(y-2)^2=4$　　B．$(x-1)^2+(y-2)^2=8$

C．$(x-1)^2+(y-2)^2=9$　　D．$(x-1)^2+(y+2)^2=4$

9．如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABP$ 均为正三角形，$AB=4$，二面角 $P-AB-C$ 的大小为 60°，则异面直线 PB 与 AC 所成角的余弦值是（　）



A．$-\frac{1}{8}$　B．$\frac{1}{8}$　C．$-\frac{1}{4}$　D．$\frac{1}{4}$

10．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1(a>0)$ 的右焦点为 $(3,0)$，则该双曲线的离心率等于（　）

A．$\dfrac{9}{4}$　　B．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{4}{3}$

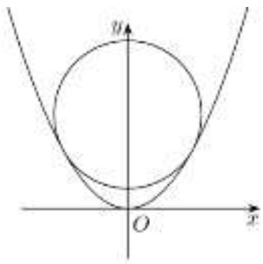
11．P 为直线 $y=kx+2$ 上任意一点，过 P 总能作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线，则 k 的最大值为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

12．首位数字是 1，且恰有两个数字相同的四位数共有（　　）个．

A．216 个　　B．252 个　　C．324 个　　D．432 个

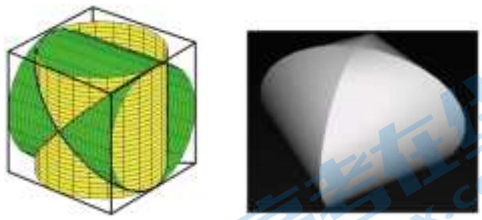
13．在抛物线型内壁光滑的容器内放一个球，其通过中心轴的纵剖面图如图所示，圆心在 y 轴上，抛物线顶点在坐标原点，已知抛物线方程是 $x^2=4y$，圆的半径为 r，若圆的大小变化时，圆上的点无法触及抛物线的顶点 O，则圆的半径 r 的取值范围是（　）



A．（2，+∞）　　B．（1，+∞）

C．$(\dfrac{1}{2},+\infty)$　　D．[1，+∞）

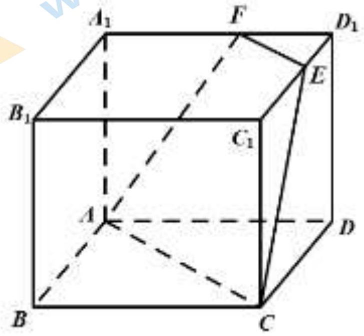
14．九章算术中，称一个正方体内两个互相垂直的内切圆柱所围成的几何体为“牟合方盖”（如图）．现提供一种计算“牟合方盖”体积的方法．显然，正方体的内切球同时也是“牟合方盖”的内切球．因此，用任意平行于水平面的平面去截“牟合方盖”，截面均为正方形，该平面截内切球得到的是上述正方形截面的内切圆．结合祖暅原理，两个同高的立方体，如在等高处的截面积相等，则体积相等．若正方体的棱长为 6，则“牟合方盖”的体积为（　）



A．144　　B．6π

C．72　　D．$\dfrac{16}{3}\pi$

15．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是棱 C_1D_1,A_1D_1 上的动点．给出下面四个命题



①直线 EF 与直线 AC 平行；

②若直线 AF 与直线 CE 共面，则直线 AF 与直线 CE 相交；

③直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离为定值；

④直线 AF 与直线 CE 所成角的最大值是 $\dfrac{\pi}{3}$．

其中，真命题的个数是（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

16．吹奏乐器“埙”（如图 1）在古代通常是用陶土烧制的，一种埙的外轮廓的上部是半椭圆，下部是半圆．半椭圆 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$（$y\geq 0$，$a>b>0$ 且为常数）和半圆 $x^2+y^2=b^2(y<0)$ 组成的曲线 D 如图 2 所示，曲

线 D 交 x 轴的负半轴于点 A，交 y 轴的正半轴于点 C，点 M 是半圆上任意一点，当点 M 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 时，$\triangle ACM$ 的面积最大，则半椭圆的方程是（　）

图1

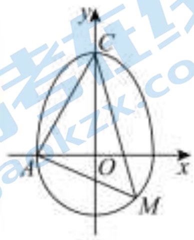


图2

A. $\frac{4x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1(y\geq 0)$　　B. $\frac{16x^2}{9}+\frac{4y^2}{3}=1(y\geq 0)$

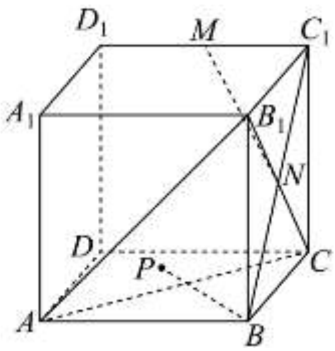
C. $\frac{2x^2}{3}+\frac{4y^2}{3}=1(y\geq 0)$　　D. $\frac{4x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1(y\geq 0)$

二、填空题（共 25 分）

17．过点 $(5,1)$，圆心为 $(8,-3)$ 的圆的标准方程是___.

18．$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中常数项是_____（用数字作答）.

19．直线 l 经过点 $P(-2,1)$，且点 $A(-1,-2)$ 到 l 的距离为1，则直线 l 的方程为___.



20．（图 1）庑殿顶是中国古代建筑一种官式建筑，而且等级是最高的，如故宫的英华殿．它屋面有四面坡， 前后坡屋面全等且相交成一条正脊，两山屋面全等与前后屋面相交成四条垂脊．由于屋顶四面斜坡， 也称“四阿顶”；（图 2）是庑殿顶的顶盖几何模型图，底面 $ABCD$ 是矩形，若四个侧面与底面所成的角均相等， 已知 $BC=2, EF=1$，则 $AB=$

庑殿顶　图1

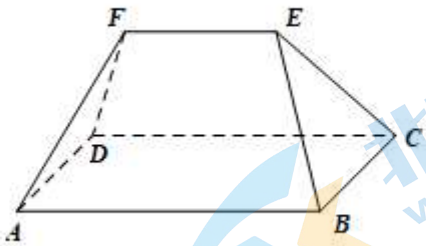
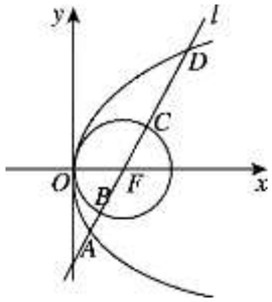


图2

21．如图，正方体 $ABCD-AB_1C_1D_1$ 的棱长为 $\sqrt{3}$，点 P 是平面 ACB_1 内的动点， M，N 分别为 C_1D_1, BC_1 的中点，若直线 BP 与直线 MN 所成的角为 θ，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则动点 P 的轨迹所围成的图形的面积为___.

三、问答题（共 45 分）

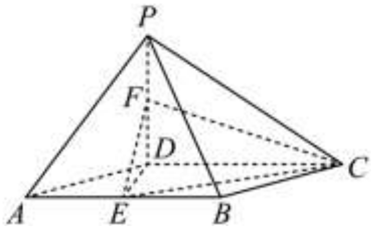
22．（本题 15 分）如图，抛物线的顶点在坐标原点，圆 $x^2+y^2=4x$ 的圆心是抛物线的焦点，直线 l 过抛物线的焦点且斜率为 2，直线 l 交抛物线和圆依次于 A，B，C，D 四点．



(1)求抛物线的方程；

(2)求 $|AB|+|CD|$ 的值．

23．（本题 15 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形， E,F 分别为 AB， PD 的中点.



(1)求证： $EF\ //$ 平面 PBC；

(2)若 $AD=2\sqrt{3}$，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.求 PD 的长.

条件①： $DE\perp PC$；条件②： $PB=PC$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

24．（本题 15 分）已知椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$，点 A 为长轴的右端点． B,C 为椭圆 E 上关于原点对称的两点．直线 AB 与直线 AC 的斜率 k_{AB} 和 k_{AC} 满足： $k_{AB}\bullet k_{AC}=-\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程;

（2）若直线 $l: y=kx+t$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{2}{3}$ 相切，且与椭圆 E 相交于 M,N 两点，求证：以线段 MN 为直径的圆恒过原点.

参考答案

1．C

【分析】由空间中直线与直线，直线与平面，平面与平面平行的关系判断 A 与 B；由直线与平面垂直的性质判断 C；由直线与平面，平面与平面垂直的关系判断 D

【详解】对于 A：若$\alpha//\beta$，$m//\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$，故 A 错误；

对于 B：若$m//n$，$n//\alpha$，则$m//\alpha$或$m\subset\alpha$，故 B 错误；

对于 C：若$m\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，由直线与平面垂直的性质可得$m\perp\beta$，故 C 正确；

对于 D：若$\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，则$m//\beta$或$m\subset\beta$，故 D 错误；

故选：C

2．C

【分析】先根据方程得斜率，再根据斜率与倾斜角关系求结果，

【详解】因为$x+y-3=0$，所以$y=-x+3$，$k=-1=\tan\alpha\ \therefore\alpha=\frac{3\pi}{4}$，选 C.

【点睛】本题考查斜率以及倾斜角，考查基本求解能力.

3．D

【解析】根据渐近线方程得出$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，再由离心率公式求解即可.

【详解】由题可知$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}$.

故选：D

【点睛】本题主要考查了求双曲线的离心率，属于基础题.

4．B

【分析】由抛物线的标准方程求解即可.

【详解】抛物线$y^2=6x$的焦点在x的正半轴上，$2p=6,p=3,\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，所以焦点坐标为$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

故选：B.

5．C

【详解】取 AC 的中点 M，连 ME,MF，

因为点 E，F 分别为 AB，CD 的中点，

所以$ME\parallel BC,MF\parallel AD$，且$ME=\frac{1}{2}BC=1,MF=\frac{1}{2}AD=1$

所以$\angle EMF$为异面直线 AD 与 BC 所成的角（或其补角），

在ΔMEF中，$ME=MF=1,EF=\sqrt{2}$，

所以$ME^2+MF^2=EF^2$，

所以$\angle EMF=90°$.

即异面直线 AD 与 BC 所成的角为$90°$．选 C.

6．B

【分析】圆心在直线 $y=2x$ 上，代入计算即可得解.

【详解】因为圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\left(D^2+E^2-4F>0\right)$ 的圆心为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，

由圆的对称性知，圆心在直线 $y=2x$ 上，故有 $-\frac{E}{2}=2\times\left(-\frac{D}{2}\right)$，即 $E=2D$.

故选：B.

7．A

【解析】利用两直线平行求出 m 的值，再利用两平行线间的距离公式即可求解.

【详解】因为直线 $x+2y+3=0$ 与直线 $2x+my+1=0$ 平行，

所以 $\frac{1}{2}=\frac{2}{m}$，可得 $m=4$，

所以 $2x+4y+1=0$，即 $x+2y+\frac{1}{2}=0$，

所以两平行间距离公式可得 $d=\frac{\left|3-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

故选：A

8．A

【分析】设圆方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$，根据相切得到 $r=d=2$，得到答案.

【详解】圆 C：$x^2+y^2-2x-4y+t=0$ 即 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$，圆心为 $(1,2)$

$r=d=\frac{4+6}{5}=2$，即 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

故选：A

【点睛】本题考查了圆的标准方程，确定半径是解题的关键.

9．B

【分析】根据二面角的大小可得长度关系，利用线线平行得异面直线所成角，根据余弦定理即可求解.

【详解】取 AB,PA,PC 中点为 O,M,N，连接 MO,OC,MN,NO，由于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABP$ 均为等边三角形，所以 $PO\perp AB,CO\perp AB$，故 $\angle POC$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角，即 $\angle POC=60^\circ$，

由于 $PO=CO=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=2\sqrt{3}$，$\therefore\triangle POC$ 为等边三角形，故 $PC=2\sqrt{3}$，进而 $ON=\frac{\sqrt{3}}{2}PC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$，

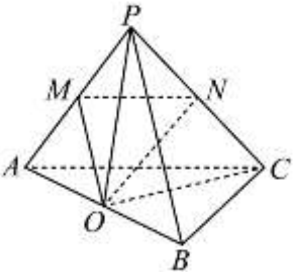
又 $OM=MN=\frac{1}{2}PB=2$，

由余弦定理可得 $\cos\angle NMO=\frac{MN^2+MO^2-NO^2}{2MN\cdot MO}=\frac{4+4-9}{2\times2\times2}=-\frac{1}{8}$，

由于 $PB//MO,MN//AC$，所以 $\angle NMO$ 即为直线 PB 与 AC 所成角或其补角，

所以直线 PB 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{8}$，

故选：B



10．C

【分析】根据双曲线的右焦点坐标可求得a的值，即可得出该双曲线的离心率的值.

【详解】因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1$的右焦点为$(3,0)$，所以，$a^2+5=9$，则$a^2=4$，可得$a=2$，

因此，该双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

故选：C.

11．D

【分析】根据题意，判断点P与圆的位置关系以及直线与圆的位置关系，根据直线与圆的位置关系，即可求得k的最大值.

【详解】因为过过P总能作圆$x^2+y^2=1$的切线，故点P在圆外或圆上，

也即直线$y=kx+2$与圆$x^2+y^2=1$相离或相切，

则$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}\ge 1$，即$k^2+1\le 4$，解得$k\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，

故k的最大值为$\sqrt{3}$.

故选：D.

12．D

【详解】符合条件的四位数必含有一个1或两个1.

1.含两个1.从除1之外的其余9个数字中任取两个，有C_9^2种取法.再与其中的一个1组成任意排列的三位数，有P_3^3种.这样构成的首位为1的四位数共有$N_1=C_9^2\cdot P_3^3$个.

2.只含一个1.从其余的9个数字中任取两个有C_9^2种，其中一个数字被重复选出有C_2^1种，这样的三个数字组成的三位数有P_3^1种.于是，构成的首位数字为1的四位数共有$N_2=C_9^2C_2^1P_3^1$个.

故符合题意的四位数共有$N=N_1+N_2=432$（个）. 选D.

13．A

【分析】设圆心为$P(0,a)$，（$a>0$），半径为r，$Q(x,y)$是抛物线上任一点，求出$|PQ|^2$，当$|PQ|^2$的最小值在原点处取得时，圆P过原点，可得此时圆半径的范围，半径不在这个范围内的圆不过原点.

【详解】设圆心为$P(0,a)$，（$a>0$），半径为r，$Q(x,y)$是抛物线上任一点，

$|PQ|^2=x^2+(y-a)^2=4y+(y-a)^2=(y-a+2)^2+4a-4$，

若$|PQ|^2$的最小值不在$O(0,0)$处取得，则圆P不过原点，

所以$a-2>0$，即$a>2$，此时圆半径为$r=\sqrt{4a-4}=2\sqrt{a-1}>2$.

因此当$r>2$时，圆无法触及抛物线的顶点O.

故选：A.

14．A

【分析】先求得正方体的内切球的体积V_1，再由已知得出牟合方盖的体积$V_2=\frac{4V_1}{\pi}$，可求得答案.

【详解】正方体的棱长$a=6$，则其内切球的半径$r=3$，内切球的体积$V_1=\frac{4}{3}\pi r^3=36\pi$.

由于截面正方形与其内切圆的面积之比为$\frac{(2r)^2}{\pi r^2}=\frac{4}{\pi}$，

设牟合方盖的体积为V_2，则$\pi V_2=4V_1$，

从而牟合方盖的体积$V_2=\frac{4V_1}{\pi}=\frac{4\times 36\pi}{\pi}=144$.

故选：A

15．B

【解析】利用特殊位置可判断①②的正误，可证明$EF//$平面$ABCD$，据此可判断③的正误，利用向量的数量积可求AF,CE夹角的余弦值，从而可求其最大值.

【详解】如图1，当F与A_1重合时，E与D_1重合时，直线EF与直线AC是异面直线，故①错误.

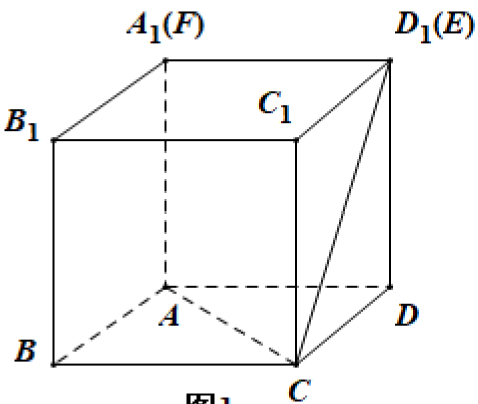
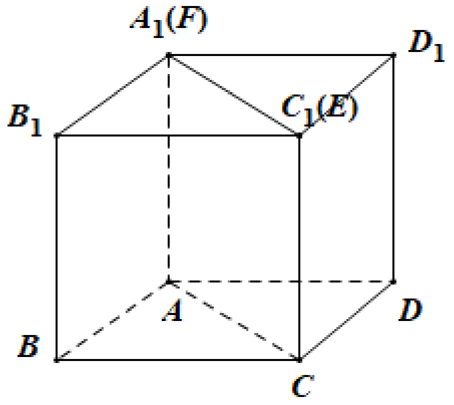


图1

如图2，当F与A_1重合时，E与C_1重合时，四边形$ACEF$为矩形，

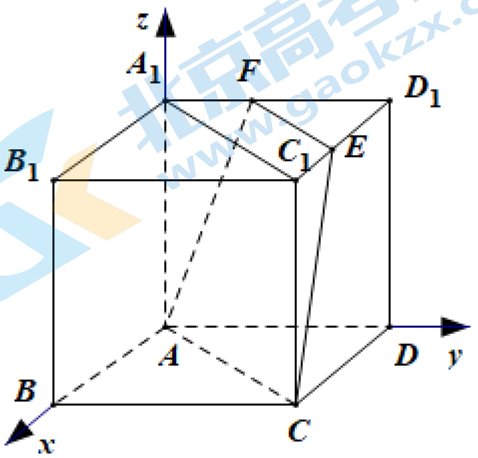
故直线AF与直线CE平行，故②错误.



因为平面 $ABCD$// 平面 $A_1B_1C_1D_1$，而 $EF\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，故 EF// 平面 $ABCD$，

所以直线 EF 到平面 $ABCD$ 的距离为定值（正方体的棱长），故③正确.

建立如图 3 所示的空间直角坐标系，



设正方体的棱长为1，则 $F(0,a,1)$， $E(b,1,1)$，其中 $0\le a\le 1,0\le b\le 1$，

而 $C(1,1,0)$，故 $\overrightarrow{AF}=(0,a,1)$， $\overrightarrow{CE}=(b-1,0,1)$，

设直线 AF 与直线 CE 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CE}\right\rangle\right|=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{(b-1)^2+1}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

若直线 AF 与直线 CE 不平行，则 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，

故直线 AF 与直线 CE 所成角的最大值是，所以④正确.

故选：B.

【点睛】方法点睛：空间中与直线与直线的位置关系有关的判断，应该让几何对象动态变化，在变化过程中确定位置关系，而角的最值判断，则需构建平面角，也可以通过直线的方向向量的夹角来处理.

16．D

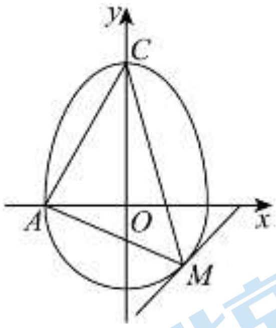
【分析】易知 $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，根据三角形 $\triangle ACM$ 面积最大即可知 $OM\perp AC$，再利用垂直关系的斜率表示即可得

$a=\sqrt{2}b=\frac{\sqrt{6}}{2}$，求出椭圆方程.

【详解】由点$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$在半圆上，所以$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$C(0,a),A(-b,0)$，

要使△ACM的面积最大，可平行移动AC，

当平移到AC与半圆相切于$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$时，$M$到直线$AC$的距离最大，如下图所示：



此时$OM\perp AC$，即$k_{OM}\cdot k_{AC}=-1$，

又$k_{OM}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},k_{AC}=\frac{a}{b}$，

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{b}=-1,\therefore a=\sqrt{2}b=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以半椭圆的方程为$\frac{4x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1(y\geq 0)$，

故选：D

17．$(x-8)^2+(y+3)^2=25$

【分析】求出圆的半径长，即可得出所求圆的标准方程.

【详解】由题意可知，所求圆的半径长为$r=\sqrt{(5-8)^2+(1+3)^2}=5$，

因此，所求圆的标准方程为$(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

故答案为：$(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

18．240

【分析】根据二项式定理，可知$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式通项为$T_{r+1}=2^rC_6^rx^{6-\frac{3}{2}r}$，令$6-\frac{3}{2}r=0$，求出$r=4$，带入通项公式，即可求出结果.

【详解】因为$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式通项为$T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=2^rC_6^rx^{6-\frac{3}{2}r}$，

令$6-\frac{3}{2}r=0$，则$r=4$，所以$\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中常数项是$2^r C_6^r=2^4 C_6^4=240$.

故答案为：240.

19．$x=-2$或$4x+3y+5=0$

【分析】当直线l斜率存在时，设出点斜式并利用点到直线的距离公式算出l的方程为$4x+3y+5=0$；当直线与x轴垂直时，l方程为$x=-2$也符合题意．由此即可得到此直线l的方程.

【详解】设直线l的方程为$y-1=k(x+2)$，即$kx-y+2k+1=0$

∵点$A(-1,-2)$到l的距离为1，

∴$\frac{|-k+2+2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解之得$k=-\frac{4}{3}$，

得l的方程为$4x+3y+5=0$.

当直线与x轴垂直时，方程为$x=-2$，点$A(-1,-2)$到l的距离为1，

∴直线l的方程为$x=-2$或$4x+3y+5=0$.

故答案为$x=-2$或$4x+3y+5=0$

【点睛】本题主要考查求经过定点，且到定点的距离等于定长的直线l方程，着重考查了直线的方程、点到直线的距离公式等知识，属于基础题.

20．3

【分析】取AD,BC的中点G,M，连接GM，过点F作$FO\perp$面$ABCD$于点O，过点E作$EL\perp$面$ABCD$于点L；根据题意分析出点O,L在直线GM上，然后根据$AB=GM=OG+OL+LM$即可求出AB的长.

【详解】取AD,BC的中点G,M，连接GM，

过点F作$FO\perp$面$ABCD$于点O，过点E作$EL\perp$面$ABCD$于点L，作$OH\perp AB$于点H，连接FG,FH，

因为底面$ABCD$是矩形，所以$AB//CD$，

又因为$CD\subset$面$CDFE$，$AB\not\subset$面$CDFE$，所以$AB//$面$CDFE$，

又因为$AB\subset$面$ABEF$，面$CDFE\cap$面$ABEF=EF$，

所以$AB//EF$，

因为面$ABEF$，面$CDFE$都与底面$ABCD$所成的角相等，

所以点O,L在直线GM上，且$OL=EF=1$，$OH=\frac{1}{2}BC=1$，

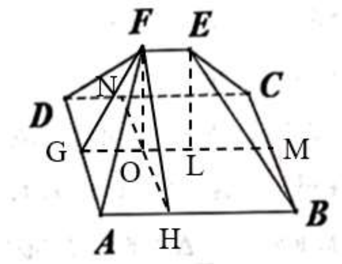
根据三垂线定理可得，$\angle FGO$为面FAD与面$ABCD$所成的角，$\angle FHO$为面$ABEF$与面$ABCD$所成的角，

所以$\angle FGO=\angle FHO$，又OF为公共边，

所以$\mathrm{Rt}\triangle OFG\cong\mathrm{Rt}\triangle OFH$，所以$OG=OH=1$，

同理$ML=1$，

所以$AB=GM=OG+OL+LM=1+1+1=3$.



故答案为：3.

21．$\frac{\pi}{4}$/$\frac{1}{4}\pi$

【分析】第一步：作辅助线，找到直线 BP 与 MN 所成的角，第二步：求点 P 到 BD_1 的距离，得到点 P 的轨迹，即可得解.

【详解】如图，连接 BD_1，因为 M，N 分别为 C_1D_1,BC_1 的中点，

所以 $MN//BD_1$，（三角形中位线定理的应用）

因此直线 BP 与 MN 所成的角就是直线 BP 与 BD_1 所成的角，

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $AC\perp BD$，

因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，可得 $AC\perp DD_1$，

又因为 $BD\cap DD_1=D$ 且 $BD,DD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1，

因为 $BD_1\subset$ 平面 BDD_1B_1，所以 $AC\perp BD_1$，同理可得 $AB_1\perp BD_1$，

因为 $AC\cap AB_1=A$，且 $AC,AB_1\subset$ 平面 ACB_1，所以 $BD_1\perp$ 平面 ACB_1，故 $\angle PBD_1=\theta$.

设 BD_1 与平面 ACB_1 的交点为 G，连接 PG，

所以 $BD_1\perp PG$，因此在 $\mathrm{Rt}\triangle PGB$ 中，$\tan\theta=\frac{PG}{BG}$，

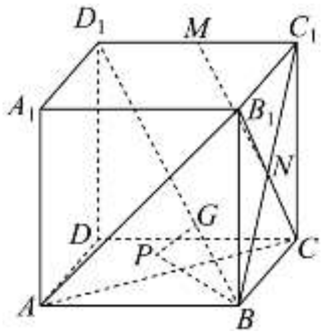
因为 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，

又三棱锥 $V_{B_1-ABC}=V_{B-AB_1C}$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin 60^\circ\times BG$，

所以 $BG=1$，则 $PG=\frac{1}{2}$，

所以点 P 的轨迹是以 G 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆，其面积 $S=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$.



故答案为：$\frac{\pi}{4}$.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是利用等体积法求得 $BG=1$，从而得解.

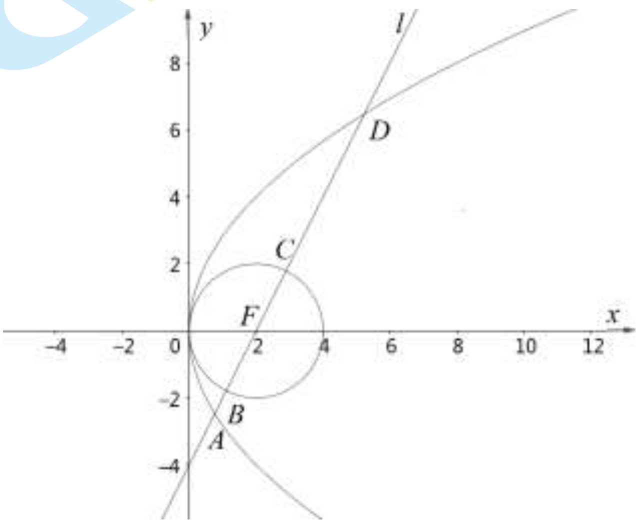
22．(1)抛物线方程为 $y^2=8x$.

(2)$|AB|+|CD|=10-4=6$.

【分析】（1）根据抛物线的性质求抛物线的标准方程.

（2）利用 $|AB|+|CD|=|AD|-|BC|$，分别求出 AD 、 BC 的长度即可.

【详解】（1）解：（1）由圆的方程 $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$ 可知，圆心为 $F(2,0)$，半径为 2，又由抛物线焦点为已知圆的圆心，得到抛物线焦点为 $F(2,0)$，抛物线方程为 $y^2=8x$.



（2）$|AB|+|CD|=|AD|-|BC|$

∵ $|BC|$ 为已知圆的直径

∴ $|BC|=4$，则 $|AB|+|CD|=|AD|-4$

设 $A(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，

∵ $|AD|=|AF|+|FD|$，而 A 、 D 在抛物线上，

由已知可知，直线 l 方程为 $y=2(x-2)$，

由 $\begin{cases} y^2=8 \\ y=2(x-2) \end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-6x+4=0$

∴ $x_1+x_2=6$

∴ $|AD|=6+4=10$

因此，$|AB|+|CD|=10-4=6$.

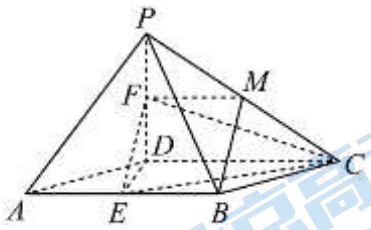
23．(1)证明见解析

(2)12

【分析】（1）由线面平行的判定定理证明即可；

（2）由题意可建立以 D 为坐标原点的空间直角坐标系 $D-xyz$，设 $F(0,0,t)(t>0)$, 分别求出平面 EFC 和平面 FCD 的法向量，由二面角公式代入解方程即可求出 t，进而求出 PD 的长.

【详解】（1）取 PC 中点 M，连接 FM, BM.



在$\triangle PCD$ 中，M, F 分别为 PC, PD 的中点，所以 $MF//DC, MF=\frac{1}{2}DC$.

在菱形 $ABCD$ 中，因为 $AB//DC, BE=\frac{1}{2}DC$，

所以 $BE//MF, BE=MF$.

所以四边形 $BEMF$ 为平行四边形，所以 $EF//BM$.

又因为 $EF\not\subset$平面 $PBC, BM\subset$平面 PBC，

所以 EF // 平面 PBC.

（2）选择条件①：

因为 $PD\perp$平面 $ABCD, DE, DC\subset$平面 $ABCD$，

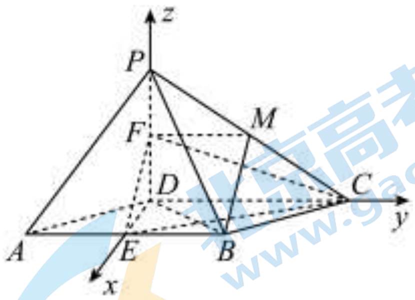
所以 $PD\perp DE, PD\perp DC$.

又因为 $DE\perp PC, PD\cap PC=P, PD, PC\subset$平面 PCD，

所以 $DE\perp$平面 PCD，又 $DC\subset$平面 PCD，

所以 $DE\perp DC$，

以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



连接 BD，因为 $AB // DC$，所以 $DE\perp AB$，又 E 为 AB 中点，所以 $AD=DB$，

所以$\triangle ADB$ 为正三角形.因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DE=3$.

设 $F(0,0,t)(t>0), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(-3,0,t), \overrightarrow{EC}=(-3,2\sqrt{3},0)$，

根据条件，可得平面 FCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-3x+tz=0\\ -3x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $x=2t$，则 $y=\sqrt{3}t, z=6$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(2t,\sqrt{3}t,6)$，

由题意，二面角 $E-FC-D$ 的大小为 45°，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{2t}{\sqrt{3t^2+4t^2+36}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $t=\pm6$（舍负）.

因为 F 是 PD 的中点，所以 PD 的长为 12.

经检验符合题意.

选择条件②：

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD, DB, DC, DE\subset$ 平面 $ABCD$，

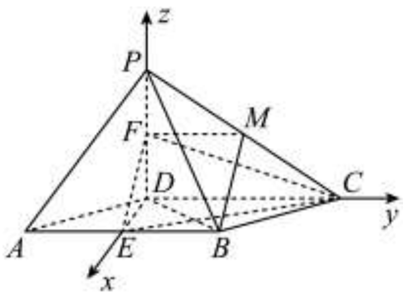
所以 $PD\perp DB, PD\perp DC, PD\perp DE$.

连接 BD，因为 $PB^2=PD^2+BD^2, PC^2=PD^2+DC^2$，且 $PB=PC$，

所以 $BD=DC$，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=BD=AD$，即 $\triangle ADB$ 为正三角形.

又因为 E 为 AB 中点，所以 $DE\perp DC$，

以 D 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.



又因为 $AB // DC, DE\perp AB$.

因为 $\triangle ADB$ 为正三角形且 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $DE=3$.

设 $F(0,0,t)(t>0), E(3,0,0), C(0,2\sqrt{3},0)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(-3,0,t), \overrightarrow{EC}=(-3,2\sqrt{3},0)$，

根据条件，可得平面 FCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$.

设平面 EFC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{EC}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}-3x+tz=0\\ -3x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取$x=2t$，则$y=\sqrt{3}t,z=6$，所以$\overrightarrow{n_2}=\left(2t,\sqrt{3}t,6\right)$，

由题意，二面角$E-FC-D$的大小为45°，

所以$\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\left|\dfrac{2t}{\sqrt{3t^2+4t^2+36}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$t=\pm6$（舍负）.

因为F是PD的中点，所以PD的长为12.

经检验符合题意.

24.（1）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$（2）见证明

【分析】（1）由$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$可得$a^2$的值，从而得到椭圆$E$的标准方程；

（2）原问题等价于$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，联立方程，利用韦达定理即可得到结果.

【详解】解：（1）设$B\left(x_0,y_0\right)$则$C\left(-x_0,-y_0\right)$

由$\dfrac{x_0^2}{a^2}+y_0^2=1$得，$y_0^2=1-\dfrac{x_0^2}{a^2}=\dfrac{a^2-x_0^2}{a^2}$

由$k_{AB}\cdot k_{AC}=-\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{y_0}{x_0-a}\cdot\dfrac{-y_0}{-x_0-a}=-\dfrac{1}{2}$得，$y_0^2=\dfrac{a^2-x_0^2}{2}$

所以$\dfrac{a^2-x_0^2}{a^2}=\dfrac{a^2-x_0^2}{2}$，所以$a^2=2$

即椭圆E的标准方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）设$M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+t\end{cases}$得：$\left(1+2k^2\right)x^2+4ktx+2t^2-2=0$

$x_1+x_2=\dfrac{-4kt}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-2}{1+2k^2}$

$y_1y_2=\left(kx_1+t\right)\left(kx_2+t\right)=k^2x_1x_2+kt\left(x_1+x_2\right)+t^2=\dfrac{k^2\left(2t^2-2\right)}{1+2k^2}+\dfrac{-4k^2t^2}{1+2k^2}+t^2=\dfrac{t^2-2k^2}{1+2k^2}$

又l与圆C相切，所以$\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$即$\dfrac{2}{3}=\dfrac{t^2}{1+k^2}$

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{2t^2-2+t^2-2k^2}{1+2k^2}$

$=\dfrac{3t^2-2\left(1+k^2\right)}{1+2k^2}=\dfrac{2\left(1+k^2\right)-2\left(1+k^2\right)}{1+2k^2}=0$

所以，$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$，即$\angle MON=90^0$

所以，以线段 MN 为直径的圆经过原点.

【点睛】圆锥曲线中定点问题的常见解法

（1）假设定点坐标，根据题意选择参数，建立一个直线系或曲线系方程，而该方程与参数无关，故得到一个关于定点坐标的方程组，以这个方程组的解为坐标的点即所求定点；

（2）从特殊位置入手，找出定点，再证明该点符合题意.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通