姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿ 准考证号：＿＿＿＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

2021年江西省高三教学质量监测卷

理科数学

说明：1. 全卷满分150分，考试时间120分钟.

2. 全卷分为试题卷和答题卡，答案要求写在答题卡上，不得在试题卷上作答，否则不给分.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

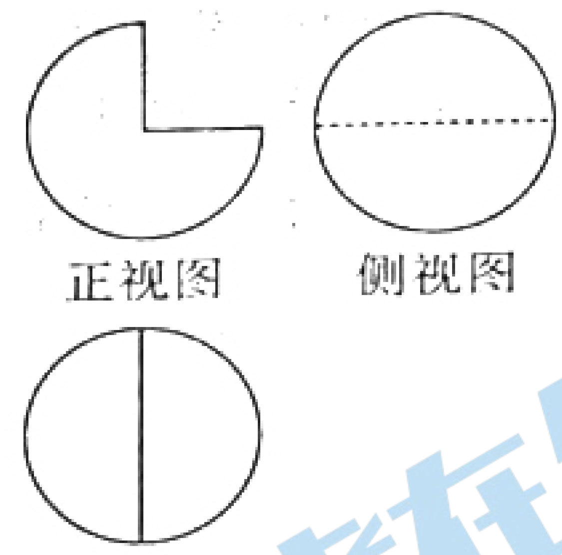
1. 集合 $A=\{x|y=\log_2(x-1)\}$，$B=\{x|x-a>0\}$，且 $(\complement_R A)\cap B=(0,1]$，则 $a=$

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 已知 $m,n\in\mathbf{R}$，且 $mi(1+2i)=n+4i$（其中 i 为虚数单位），则 $m+n=$

A. -2　　B. -4　　C. 2　　D. 4

3. 某几何体的三视图如图所示，已知图中圆的半径都为1，则此几何体的体积为



A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

4. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，若点 $A(x_0,2\sqrt{3})$ 在抛物线上，则 $|AF|=$

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{3}+1$

5. 根据下面给出的某地区2014年至2020年环境基础设施投资额（单位：亿元）的表格，以下结论中错误的是 C　100　118　262

年份	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
投资额/亿元	47	53	56	62	122	140	156

18　16

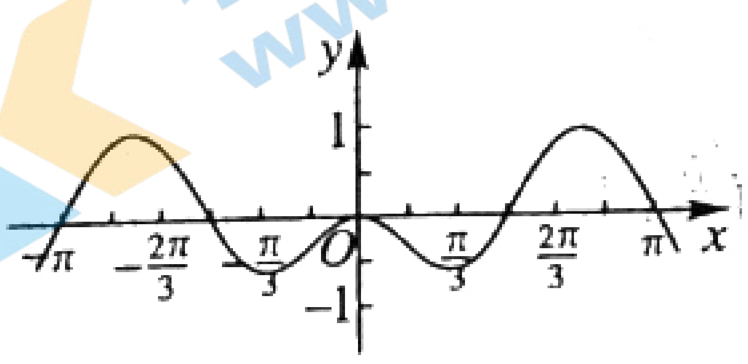
A. 该地区环境基础设施投资额逐年增加

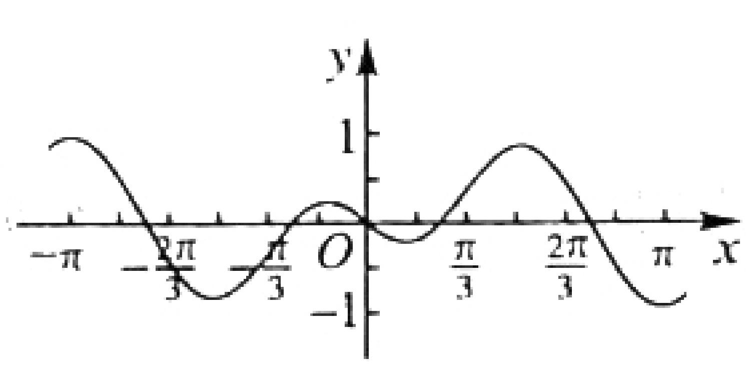
B. 2018年该地区环境基础设施投资增加额最大

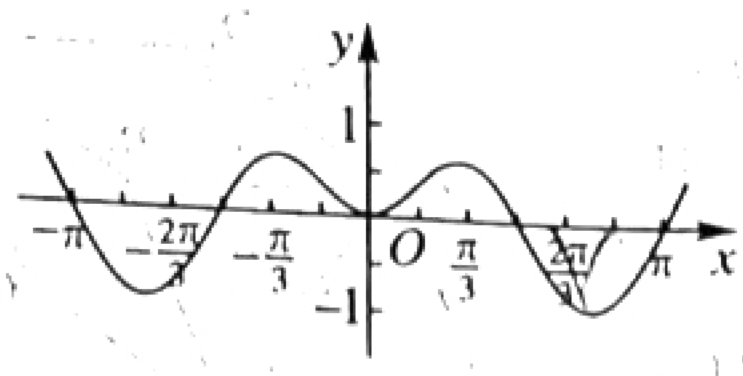
C. 2018年和2019年该地区环境基础设施投资总额比2014年至2017年的投资总额小

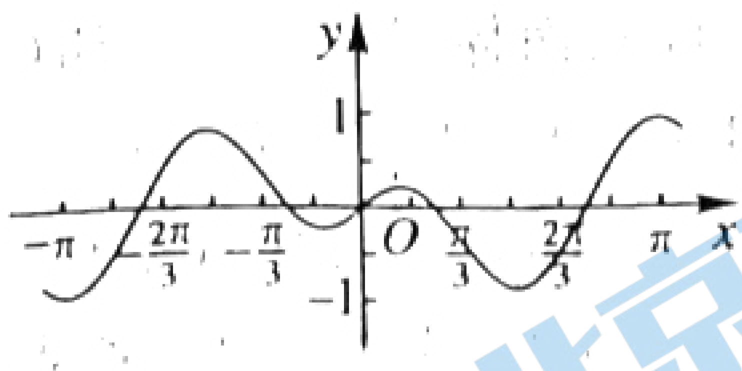
D. 2020年该地区环境基础设施投资增加额相比2019年有所减少

6. 函数 $f(x)=\frac{5^x-1}{5^x+1}\cos 2x$ 的图象为 D

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，则“$f(x)$的周期为 2”是“$f(x)=\dfrac{1}{f(x+1)}$”的

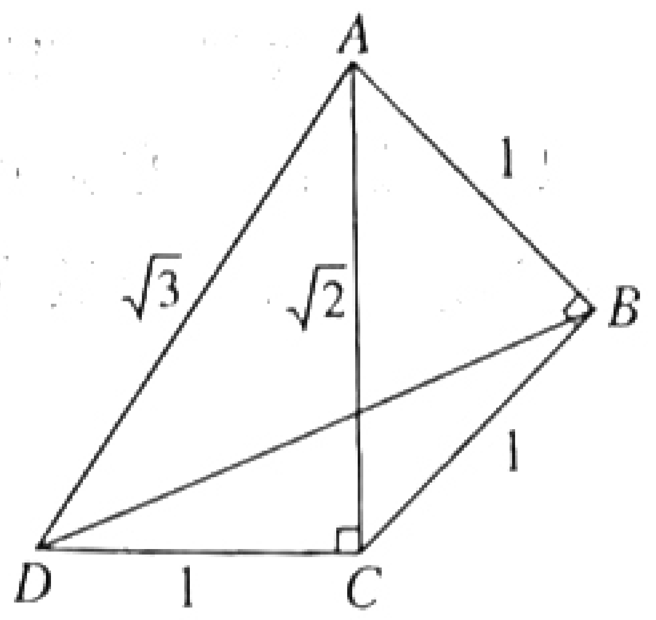
A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

8. $(x+2y+3z)^5$ 的展开式中 xy^2z^2 的系数为

A. 5　　　　B. 30　　　　C. 1 080　　　　D. 2 160

9. 如图是公元前约 400 年古希腊数学家泰特托斯用来构造无理数$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,…的图形之一,此图形中$\angle BAD$ 的余弦值是



A. $\dfrac{4-\sqrt{3}}{6}$　　　　B. $\dfrac{4+\sqrt{3}}{6}$

C. $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$　　　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$

10. 已知动直线 $l:x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$ 与圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 相交于 A,B 两点，圆 $C_2:x^2+y^2=1$. 下列说法：① l 与 C_2 有且只有一个公共点；②线段 AB 的长度为定值；③线段 AB 的中点轨迹为 C_2. 其中正确的个数是

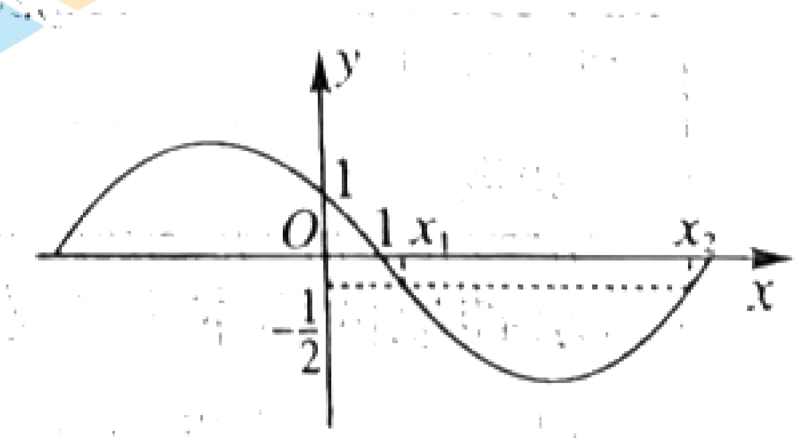
A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

11. 定义：若存在 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $f(-x_i)=-f(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，则称函数 $y=f(x)$为“n 阶奇性函数”. 若函数 $g(x)=\begin{cases}mx+m,x\leqslant 0,\\ x\ln x,x>0\end{cases}$ 是“2 阶奇性函数”，则实数 m 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　　　B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$　　　　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

12. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi)$ 的一个周期的图象如图所示，其中 $f(0)=1,f(1)=0$. $f(x_1)=f(x_2)=-\dfrac{1}{2}$，则 $f(x_2-x_1-2)=$



A. $-\dfrac{7}{4}$　　　　B. $-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

C. $\dfrac{7}{4}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

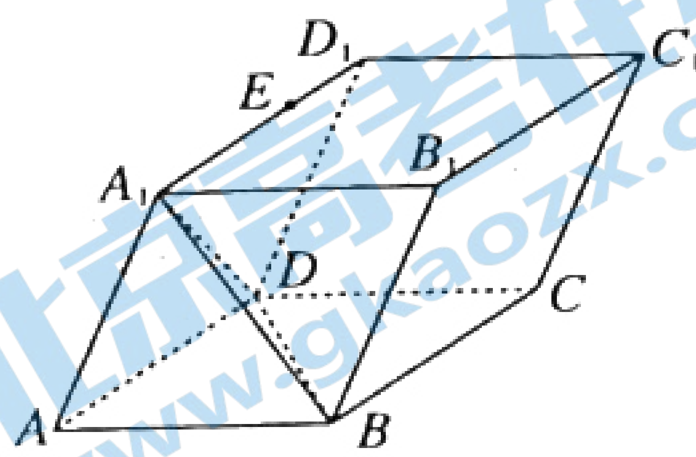
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且$|2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

14. 若 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x+y-5\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$则 $z=\dfrac{y}{x}$的最大值是________.

15. 已知 F 是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，过点 F 作渐近线的垂线 FH（点 H 为垂足），并交双曲线的右支于点 A，若 A 为线段 FH 的中点，则双曲线的离心率为________.

16. 如图，在平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，所有棱长均为 a，且$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle DAB=60°$，点 E 在棱 A_1D_1 上，且 $A_1E=2ED_1$，平面 α 过点 E 且平行于平面 A_1DB，则平面 α 与平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 各表面交线围成的多边形的面积是 $3\sqrt{5}a^2$.



三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}=S_n+a_n+2$，$a_3^2=S_1S_5$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

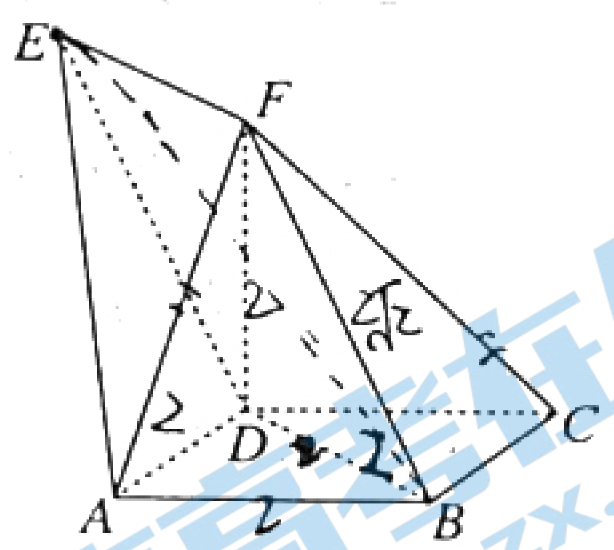
(2)设 $b_n=a_{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

如图，已知四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=60°$，$AB=2$，四边形 $BDEF$ 是平行四边形，$\angle DBF=45°$，$BF=2\sqrt{2}$，$FA=FC$.

(1)求证：$FD\perp$平面 $ABCD$；

(2)求二面角 A-DE-B 的余弦值.



19.(12 分)

在某学校某次射箭比赛中，随机抽取了 100 名学员的成绩(单位：环)，并把所得数据制成了如下所示的频数分布表：

22.5 99 182 195 144.5 57

成绩分组	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10]
频数	5	18	28	26	17	6

(1)求抽取的样本平均数 $\overline{x}$(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)；

(2)已知这次比赛共有 2 000 名学员参加，如果近似地认为这次成绩 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$(其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，σ^2 近似为样本方差 $s^2=1.61$)，且规定 8.27 环是合格线，那么在这 2 000 名学员中，合格的有多少人？

(3)已知样本中成绩在[9,10]的 6 名学员中，有 4 名男生和 2 名女生，现从中任选 3 人代表学校参加全国比赛，记选出的男生人数为 ξ，求 ξ 的分布列与期望 $E\xi$.

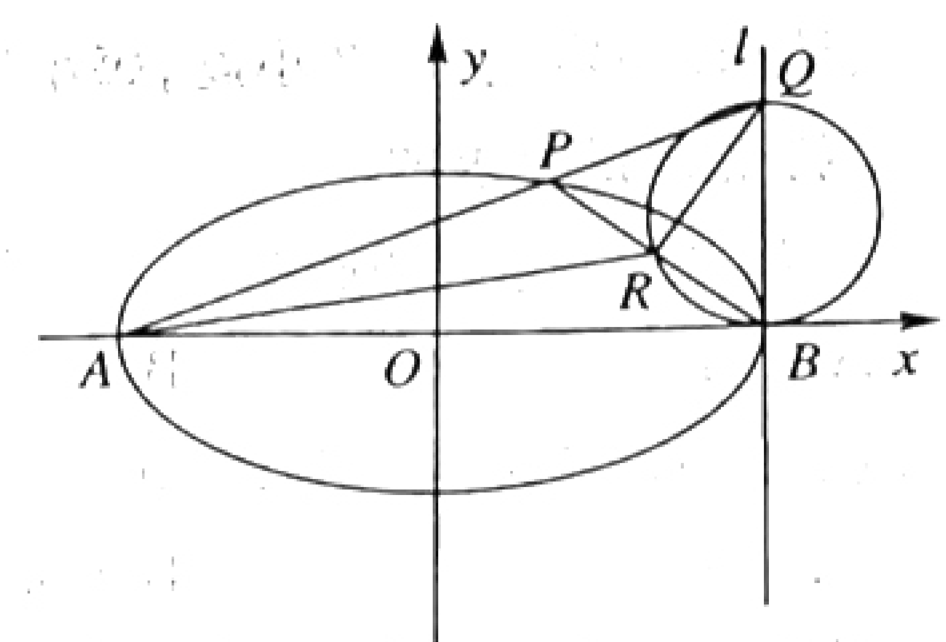
[附：若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9545$，$\sqrt{1.61}\approx1.27$，结果取整数部分]

20.(12 分)

如图，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，A，B 是椭圆的左右顶点，P 是椭圆 E 上异于 A，B 的一个动点，直线 l 过点 B 且垂直于 x 轴，直线 AP 与 l 交于点 Q，圆 C 以 BQ 为直径．当点 P 在椭圆短轴端点时，圆 C 的面积为 π．

(1)求椭圆 E 的标准方程；

(2)设圆 C 与 PB 的另一交点为点 R，记 $\triangle AQR$ 的面积为 S_1，$\triangle BQR$ 的面积为 S_2，试判断 $\frac{S_1}{S_2}$ 是否为定值，若是定值，求出这个定值，若不是定值，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围．



21.(12 分)

已知函数 $f(x)=xe^x+ax+b\cos x$．

(1)当 $b=0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数；

(2)当 $b=-2$，$x\geqslant 0$ 时，都有 $f(x)\geqslant 2e^x-4$，求实数 a 的取值范围．

(二)选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\y=\sqrt{3}-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$．

(1)求曲线 C_1 和 C_2 的直角坐标方程；

(2)已知点 $P(1,\sqrt{3})$，曲线 C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，求 $\left|\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PA|-|PB|}\right|$．

23.[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-\frac{1}{a}|(a>0)$．

(1)求证：$f(x)\geqslant 2$；

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant -x^2+4x+m$ 恒成立，求 m 的取值范围．

2021年江西省高三教学质量监测卷理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】B

【解析】∵ $A=(1,+\infty)$ $B=(a,+\infty)$，∴ $\complement_R A=(-\infty,1]$，可得 $a=0$，故选 B

2.【答案】B

【解析】$-2m+mi=n+4i \Rightarrow \begin{cases}-2m=n,\\ m=4\end{cases} \Rightarrow m+n=-m=-4$．

3.【答案】D

【解析】该几何体为$\frac{3}{4}$个球，则该几何体的体积为$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\pi\times1^3=\pi$．

4.【答案】C

【解析】$A(x_0,2\sqrt{3})$，则$12=4x_0 \Rightarrow x_0=3$，故$|AF|=x_0+1=4$．

5.【答案】C

【解析】2018 年和 2019 年该地区环境基础设施投资总额为 262 亿元，2014 年至 2017 年的总额为 218 亿元．

6.【答案】D

【解析】 $f(x)=\frac{5^x-1}{5^x+1}\cos 2x$，$f(-x)=\frac{5^{-x}-1}{5^{-x}+1}\cos(-2x)=\frac{1-5^x}{1+5^x}\cos 2x$，

$f(x)+f(-x)=0$，故$f(x)$为奇函数，由$f(\pi)=\frac{5^\pi-1}{5^\pi+1}\cos 2\pi>0$，故选 D.

7.【答案】 B

【解析】当$f(x)=\frac{1}{f(x+1)}$成立时，有$f(x)=\frac{1}{f(x+1)}=\frac{1}{\frac{1}{f(x+2)}}=f(x+2)$，

则$f(x)$的周期为2；

当$f(x)=\sin \pi x$时，$f(x)$的周期为2，则x取整数时，$f(x)=f(x+1)=0$，$f(x)=\frac{1}{f(x+1)}$无意义．

8.【答案】C

【解析】$C_5^1\cdot C_4^2 2^2\cdot C_2^2 3^2=5\times6\times4\times9=1080$，故选 C.

9.【答案】C

【解析】在ΔBCD中，$\angle DCB=135^\circ \Rightarrow BD^2=1+1+2\times1\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}$，

在ΔBAD中，$\cos\angle BAD=\frac{3+1-2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$．

10.【答案】D

【解析】C_2的圆心到直线l的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1$，∴直线$l$与圆$C_2$相切，故①正确；

$|AB|=2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{2-1}=2$，∴线段 AB 的长度为定值，故②正确；

由①知l为C_2的切线，而C_1与C_2为同心圆，则根据对称性，l与C_2的切点即为线段AB的中点，

故线段AB的中点轨迹为C_2，故③正确.

11.【答案】D

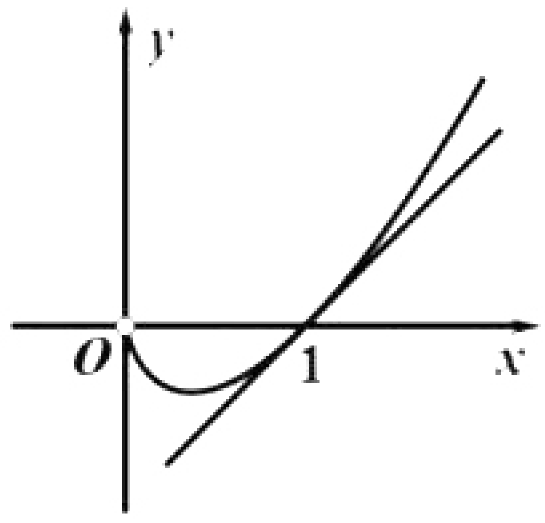
【解析】依题意，方程$g(-x)=-g(x)$有且只有两个正根，

即$m(-x)+m=-x\ln x$有且只有两个正根，

方程可以化为：$x\ln x=m(x-1)$，因此转化为

函数$y=x\ln x$与$y=m(x-1)$在y轴右侧的图象有两个交点，

先研究函数$y=x\ln x$的图象，因为$y'=(x\ln x)'=\ln x+1$，



当$0<x<\dfrac{1}{e}$时，$y'<0$；当$x>\dfrac{1}{e}$时，$y'>0$，

且当$x=1$时，$y=0$，$y'=1$，在$x=1$处切线的斜率是1，简图如图所示：

直线$y=m(x-1)$过点$(1,0)$斜率为m，由图象有两个交点，可以得到$m>0$且$m\neq1$.

12.【答案】A

【解析】由$f(0)=1\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{1}{2},\Rightarrow\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，

由$f(1)=0\Rightarrow\omega+\varphi=2k\pi+\pi\Rightarrow\omega=2k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in Z$，

又因为周期$T>4(1-0)\Rightarrow\dfrac{2\pi}{\omega}>4\Rightarrow0<\omega<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\omega=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow T=12$，$f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{5}{6}\pi\right)$.

因为$f(x_1)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x_1+\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{2}$，所以$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x_1+\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{4}$.

因为点$(x_1,-\dfrac{1}{2}),(x_2,-\dfrac{1}{2})$关于直线$x=4$对称，

所以设$(\dfrac{\pi}{6}\times4+\dfrac{5\pi}{6})-(\dfrac{\pi}{6}x_1+\dfrac{5\pi}{6})=\alpha$，

则$\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}x_1+\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$，

又$(\dfrac{\pi}{6}x_2+\dfrac{5\pi}{6})-(\dfrac{\pi}{6}x_1+\dfrac{5\pi}{6})=2\alpha\Rightarrow\dfrac{\pi}{6}(x_2-x_1)=2\alpha$，所以

$f(x_2-x_1-2)=2\sin[\dfrac{\pi}{6}(x_2-x_1)-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{6}]=2\sin(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha)=2\cos2\alpha=2(2\times\dfrac{1}{16}-1)=-\dfrac{7}{4}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$\frac{\pi}{2}$

【解析】由 $|2a+3b|=|2a-3b|$，得到 $2\vec{a}\perp 3\vec{b}$，所以 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

14.【答案】2

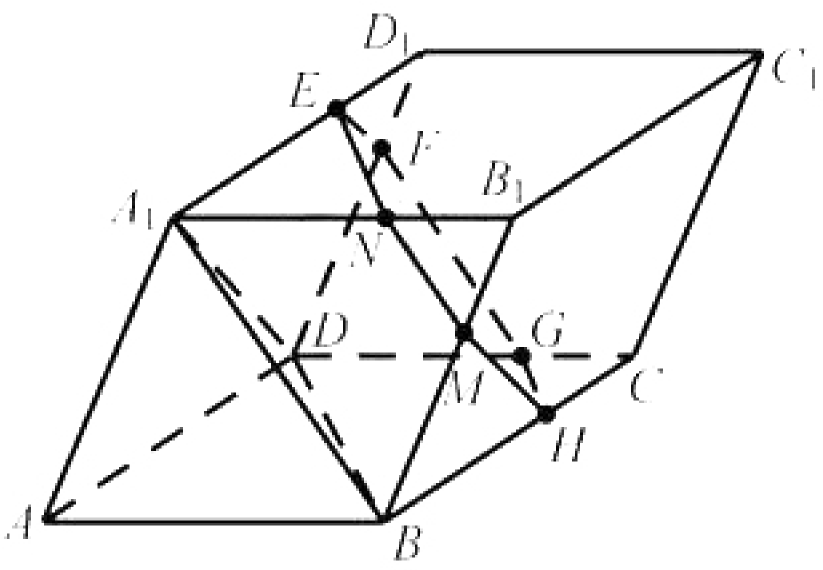
【解析】$z=\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}\in(-\infty,2]$，$z_{\max}=2$.

15.【答案】$\sqrt{2}$

【解析】垂线 FH 的方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$，与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 联立，得到点 H 的坐标为 $(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c})$，

由中点公式得到点 $A(\frac{a^2+c^2}{2c},\frac{ab}{2c})$，代入双曲线方程，得到：

$\frac{(a^2+c^2)^2}{4a^2c^2}-\frac{a^2}{4c^2}=1\Rightarrow e=\sqrt{2}$.



16.【答案】$\frac{13\sqrt{3}}{36}a^2$

【解析】如图，符合条件的截面是六边形 $EFGHMN$，$EF=GH=MN=\frac{1}{3}a,FG=HM=NE=\frac{2}{3}a$，且六边形内角均为 $120°$，连接 EG,GM,ME，可知 $\triangle EGM$ 为等边三角形，所以面积为 $\frac{13\sqrt{3}}{36}a^2$.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：（1）由 $S_{n+1}=S_n+a_n+2$，得 $a_{n+1}-a_n=2\left(n\in N^*\right)$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，2 为公差的等差数列. ………………… 3 分

由 $a_3^2=S_1S_5$ 得 $(a_1+4)^2=a_1(5a_1+20)$，$a_1^2+3a_1-4=0$，解得 $a_1=1$ 或—4（舍），

$\therefore a_n=2n-1\left(n\in N^*\right)$； ………………… 6 分

（2）$b_n=2\times 2^n-1=2^{n+1}-1$， ……………… 8 分

$\therefore T_n=(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^{n+1}-1)=(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1})-n=2^{n+2}-n-4$ ………… 12 分

18.解：（1）连接 AC，设 $AC\cap BD$ 于点 G，

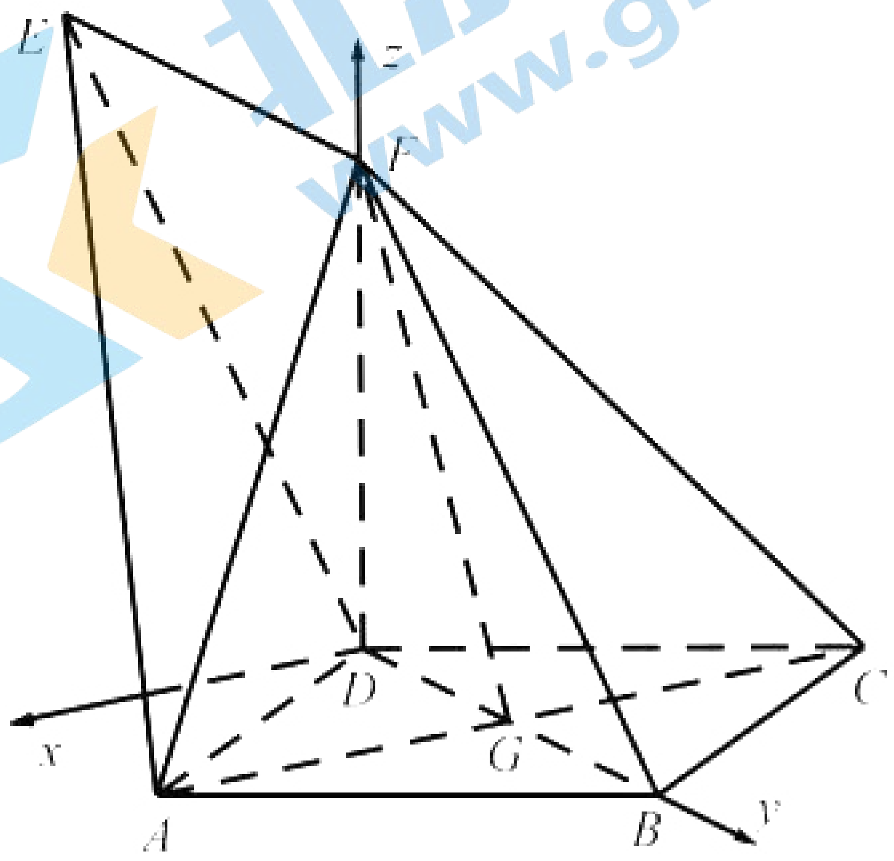
因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$，

且点 G 是 AC 的中点，又 $FA=FC$，所以 $AC\perp FG$，

又因为 $BD\subset$ 平面 $BDEF$，$FG\subset$ 平面 $BDEF$，

所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，$FD\subset$ 平面 $BDEF$，

所以 $AC\perp FD$， ………………… 4 分



在 ΔBDF 中，$BD=AB=2$，$\angle DBF=45°, BF=2\sqrt{2}$，

由余弦定理得 $FD=2$，因为 $FD^2+BD^2=BF^2$，

即 $FD\perp BD$，所以 $FD\perp$ 平面 $ABCD$；………………… 6 分

（2）如图，以点 D 为坐标原点，过点 D 且平行于 CA 的直线为 x 轴，DB, DF 所在直线分别为 y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(\sqrt{3},1,0), B(0,2,0), F(0,0,2)$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BF}=(0,-2,2)$， ………… 8 分

平面 BDE 的法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$，设平面 ADE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{DA}\Rightarrow\sqrt{3}x+y=0$，由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{DE}\Rightarrow y=z$，令 $x=1\Rightarrow y=z=-\sqrt{3}$， ………………… 10 分

即 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\dfrac{1}{1\times\sqrt{1+3+3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. 由（1）可知 $AG\perp$ 平面 $BDEF$ 于点 G，

所以二面角 $A-DE-B$ 为锐二面角，所以所求二面角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ………………… 12 分

19.解：（1）由所得数据列成的频数分布表，得：

样本平均数

$\bar{x}=4.5\times0.05+5.5\times0.18+6.5\times0.28+7.5\times0.26+8.5\times0.17+9.5\times0.06=7$. ………………… 4 分

（2）由（1）知 $Z\sim N(7,1.61)$，$\therefore P(Z\geq8.27)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$，

$\therefore$ 在这 2000 名学员中，合格的有：$2000\times0.15865\approx317$ 人. ………………… 8 分

（3）由已知得 ξ 的可能取值为 1，2，3

$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$， ………………… 10 分

$\therefore\xi$ 的分布列为：

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E\xi=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$（人）. ………………… 12 分

20．解：（1）由已知，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$， ………………… 1 分

当点 P 在短轴端点时，由 ΔAOP 相似于 $\Delta ABQ\Rightarrow BQ=2b$， ………………… 3 分

所以圆 C 的面积为 πb^2，因此 $b=1,a=2$，

故椭圆的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ………………… 5 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\Rightarrow\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{1}{4}$ ①.

A,B 的坐标分别为 $(-2,0),(2,0)$，

$k_{AP}=\frac{y_0}{x_0+2}\Rightarrow$ 直线 $AP:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，令 $x=2$，则 $Q(2,\frac{4y_0}{x_0+2})$. ………………… 7 分

又 $k_{BP}=\frac{y_0}{x_0-2}$，点 R 在圆上，所以 $QR\perp BR$，因此 $k_{RQ}=\frac{2-x_0}{y_0}$，

所以直线 RQ 的方程为：$y-\frac{4y_0}{x_0+2}=\frac{2-x_0}{y_0}(x-2)$，即 $y_0(x_0+2)y-4y_0^2=(4-x_0^2)(x-2)$，

由①式得到 $4-x_0^2=4y_0^2$，代入直线 RQ 的方程，化简为：$4y_0x-(x_0+2)y-4y_0=0$， … 10 分

设 A,B 两点到直线 RQ 的距离分别为 d_1,d_2，

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{|-8y_0-4y_0|}{|8y_0-4y_0|}=3$，为定值. ………………… 12 分

另解：

（2）设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\Rightarrow\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{1}{4}$，即 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{4}$.

A,B 的坐标分别为 $(-2,0),(2,0)$，$AB=4$，

由 $PB\perp QR$，则 $k_{PB}\cdot k_{QR}=-1$，所以 $\frac{k_{QA}}{k_{QR}}=\frac{1}{4}$， ………………… 7 分

令直线 QR 交 x 轴于点 T，则 $\frac{QB}{AB}:\frac{QB}{BT}=\frac{1}{4}$，所以 $AT=3BT$，T 为定点 ………………… 9 分

则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{AT}{BT}=3$，为定值. ………………… 12 分

21．解：（1）$b=0$，$f(x)=xe^x+ax \Rightarrow f'(x)=(x+1)e^x+a$，

记 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=(x+2)e^x$，$g'(x)=0 \Rightarrow x=-2$，$f'(-2)=a-\dfrac{1}{e^2}$，

$x<-2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$a-\dfrac{1}{e^2}<f'(x)<a$，

$x>-2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$f'(x)>a-\dfrac{1}{e^2}$， ……………… 2 分

①当 $a-\dfrac{1}{e^2}\ge 0$ 即 $a\ge\dfrac{1}{e^2}$，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$ 单调递增，无极值点； ……………… 3 分

②当 $a-\dfrac{1}{e^2}<0$ 且 $a>0$ 即 $0<a<\dfrac{1}{e^2}$ 时，$f'(x)=0$ 有两不同根，$f(x)$ 有两个极值点；……4 分

③当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=0$ 有一根，$f(x)$ 有一个极值点． ……………… 5 分

（2）依题意 $(x-2)e^x+ax-2\cos x+4\ge 0$ 对任意的 $x\ge 0$ 恒成立，

记 $h(x)=(x-2)e^x+ax-2\cos x+4$，$h(0)=0$，

$h'(x)=(x-1)e^x+a+2\sin x$，$h'(0)=a-1$， ……………… 6 分

$h''(x)=xe^x+2\cos x$，$x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$xe^x\ge 0, 2\cos x>0 \Rightarrow h''(x)>0$，

$x\in[\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 时，$xe^x\ge\dfrac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}>\pi>2$，$h''(x)>2+2\cos x\ge 0$，所以 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

……………… 7 分

①$a-1\ge 0$ 即 $a\ge 1$ 时，$h'(x)\ge h'(0)=a-1\ge 0$，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)\ge h(0)=0$ 恒成立； ……………… 10 分

②$a-1<0$ 即 $a<1$ 时，

$h'(0)<0, h'(4-a)=(3-a)e^{4-a}+a+2\sin(4-a)\ge 3-a+a+2\sin(4-a)>0$，

存在 $x_0\in(0,4-a)$，使得 $h'(x_0)=0$，当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递减，

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<h(0)=0$，与题意不符．

综上，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$． ……………… 12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22．解：(1) $\sqrt{3}x=\sqrt{3}+\sqrt{3}t$，$y=\sqrt{3}-\sqrt{3}t$，

两式相加可得：$C_1:\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$， ……………… 3 分

$C_2: y^2=4x$； ……………… 5 分

(2)将 $C_1:\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，代入 $y^2=4x$，

$\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2=4\left(1-\frac{1}{2}t\right)$， $\frac{3}{4}t^2+3t+3=4-2t$， $\frac{3}{4}t^2+5t-1=0$， $\Delta>0$ ……………… 7 分

$t_1+t_2=\frac{5}{-\frac{3}{4}}=-\frac{20}{3}$，$t_1t_2=-\frac{4}{3}$，所以 t_1，t_2 异号，故 $\left|\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PA|-|PB|}\right|=\left|\frac{|t_1t_2|}{|t_1|-|t_2|}\right|=\frac{|t_1t_2|}{|t_1+t_2|}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{20}{3}}=\frac{1}{5}$.

……………… 10 分

23.解：(1) $f(x)=|x+a|+\left|x-\frac{1}{a}\right|\ge\left|(x+a)-\left(x-\frac{1}{a}\right)\right|=\left|a+\frac{1}{a}\right|\ge 2$， ……………… 4 分

当且仅当 $a=1$ 且 $x\in[-1,1]$ 时等式成立； ……………… 5 分

(2)由题可知：$f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|+|x-2|\ge -x^2+4x+m$ 恒成立，

即 $m\le|x+\frac{1}{2}|+|x-2|+x^2-4x$， ……………… 7 分

令 $|x+\frac{1}{2}|+|x-2|\ge\frac{5}{2}$，当 $x\in[-\frac{1}{2},2]$ 时取等号；

$x^2-4x\ge -4$，当且仅当 $x=2$ 时取等号； ……………… 8 分

所以 $|x+\frac{1}{2}|+|x-2|+x^2-4x\ge\frac{5}{2}-4=-\frac{3}{2}$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，

所以 $m\le-\frac{3}{2}$，故 $m\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$. ……………… 10 分

另解：

(2)由题可知：$f(x)=\left|x+\frac{1}{2}\right|+|x-2|\ge -x^2+4x+m$ 恒成立，

$f(x)_{\min}=f(2)=\frac{5}{2}$， ……………… 7 分

令 $g(x)=-x^2+4x+m$，$g(x)_{\max}=g(2)=4+m$， ……………… 8 分

由题可得：$f(x)_{\min}\ge g(x)_{\max}$，故 $m+4\le\frac{5}{2}$，即 $m\le-\frac{3}{2}$，故 $m\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$. ……………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。