

海淀区高三年级第二学期期末练习

数 学 (文科)

2019.5

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 6\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $[1, 3]$
- (B) $[3, 5]$
- (C) $[5, 6]$
- (D) $[1, 6]$

(2) 复数 $z = a + i$ ($a \in \mathbb{R}$) 的实部是虚部的2倍，则 a 的值为

- (A) $-\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) -2
- (D) 2

(3) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的右顶点和抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合，则 a 的值为

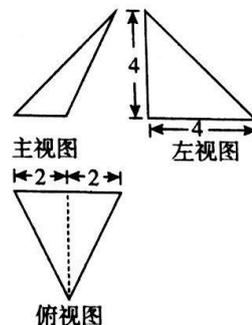
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

(4) 若关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解，则 a 的取值范围是

- (A) $(0, +\infty)$
- (B) $[1, +\infty)$
- (C) $[2, +\infty)$
- (D) $[3, +\infty)$

(5) 某三棱锥的三视图如右图所示，则该三棱锥的所有棱长构成的集合为

- (A) $\{2, 4, 2\sqrt{3}, 6\}$
- (B) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}, 6\}$
- (C) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 6\}$
- (D) $\{2, 4, 2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}\}$



- (6) 把函数 $y=2^x$ 的图象向左平移 t 个单位长度, 得到的图象对应函数的解析式为 $y=3 \cdot 2^x$, 则 t 的值为
- (A) $\log_2 2$ (B) $\log_2 3$
(C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$
- (7) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, 则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ”的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (8) 记 $x^2 + y^2 \leq 1$ 表示的平面区域为 W , 点 O 为原点, 点 P 为直线 $y=2x-2$ 上的一个动点. 若区域 W 上存在点 Q , 使得 $|OQ|=|PQ|$, 则 $|OP|$ 的最大值为
- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{3}$ (D) 2

第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

- (9) 已知直线 $l_1: x+y+1=0$ 与 $l_2: x+ay+3=0$ 平行, 则 $a=$ _____, l_1 与 l_2 之间的距离为 _____.
- (10) 函数 $f(x) = (x+t)(x-t^2)$ 是偶函数, 则 $t=$ _____.
- (11) 已知 $a = \frac{1}{2}$, $b = \log_4 3$, $c = \sin \frac{\pi}{8}$, 则这三个数中最大的是 _____.
- (12) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$, 且 $a_5 = 15$, 则 $a_8 =$ _____.
- (13) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在线段 DC 上. 若 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP}$, 且点 P 在直线 AC 上, 则 $|\overrightarrow{AF}| =$ _____.
- (14) 已知集合 $A_0 = \{x \mid 0 < x < 1\}$. 给定一个函数 $y=f(x)$, 定义集合 $A_n = \{y \mid y=f(x), x \in A_{n-1}\}$, 若 $A_n \cap A_{n-1} = \emptyset$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质“ \mathcal{P} ”.
- (I) 具有性质“ \mathcal{P} ”的一个一次函数的解析式可以是 _____;
- (II) 给出下列函数: ① $y = \frac{1}{x}$; ② $y = 2^x$; ③ $y = \sin(\frac{\pi}{2}x) + 1$, 其中具有性质“ \mathcal{P} ”的函数的序号是 _____. (写出所有正确答案的序号)

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $a=7$ ， $b=8$ ， $A=\frac{\pi}{3}$ 。

(I) 求 $\sin B$ 的值；

(II) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，求 $\triangle ABC$ 的面积。

(16) (本小题满分 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$ 。

(I) 求公比 q 和 a_1 的值；

(II) 若 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求证： $-3, S_n, a_{n+1}$ 成等差数列。

(17) (本小题满分 14 分)

如图 1 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $CE \perp AD$ ，垂足为 E ， $AD=3BC=3$ ， $EC=1$ 。将 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置，使平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$ ，如图 2 所示，点 G 是 AD_1 的中点。

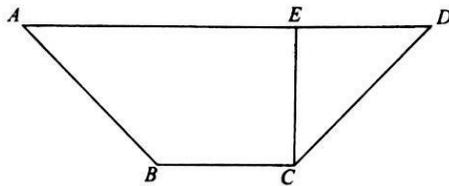


图 1

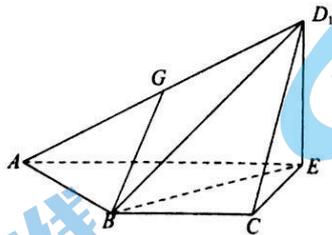


图 2

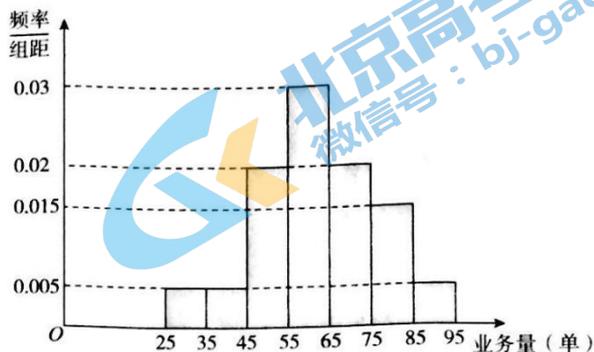
(I) 求证： $BG \parallel$ 平面 D_1EC ；

(II) 求证： $AB \perp$ 平面 D_1EB ；

(III) 求三棱锥 D_1-GEC 的体积。

(18) (本小题满分 13 分)

某快餐连锁店招聘外卖骑手. 该快餐连锁店提供了两种日工资方案: 方案 (1) 规定每日底薪 50 元, 快递业务每完成一单提成 3 元; 方案 (2) 规定每日底薪 100 元, 快递业务的前 44 单没有提成, 从第 45 单开始, 每完成一单提成 5 元. 该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量. 现随机抽取 100 天的数据, 将样本数据分为 $[25, 35)$, $[35, 45)$, $[45, 55)$, $[55, 65)$, $[65, 75)$, $[75, 85)$, $[85, 95]$ 七组, 整理得到如图所示的频率分布直方图.



- (I) 随机选取一天, 估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率;
- (II) 若骑手甲、乙选择了日工资方案 (1), 丙、丁选择了日工资方案 (2). 现从上述 4 名骑手中随机选取 2 人, 求至少有 1 名骑手选择方案 (1) 的概率;
- (III) 若仅从人均日收入的角度考虑, 请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择, 并说明理由. (同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)

(19) (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x (ax^2 + x + 1)$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线的倾斜角;
- (II) 若函数 $f(x)$ 的极大值大于 1, 求 a 的取值范围.

(20) (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$.

- (I) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标;
- (II) 若点 P 在椭圆 C 上, 线段 AP 的垂直平分线分别与线段 AP , x 轴, y 轴交于不同的三点 M, H, Q .
 - (i) 求证: 点 M, Q 关于点 H 对称;
 - (ii) 若 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 求点 P 的横坐标.

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案

数 学 (文科)

2019.05

一、选择题 (共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

- (1) B (2) D (3) B (4) C
(5) C (6) B (7) A (8) D

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

- (9) $1, \sqrt{2}$ (10) 0, 1
(11) b (12) 24
(13) $\sqrt{2}$ (14) $y = x + 1$ (答案不唯一), ① ②

三、解答题 (共 6 小题, 共 80 分)

(15) (共 13 分)

解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a = 7, b = 8, A = \frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以由正弦定理 } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\text{得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

(II) 方法 1:

因为 $a = 7, b = 8$, 所以 $B > A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $C < \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$,

即 C 一定为锐角, 所以 B 为 $\triangle ABC$ 中的最大角

所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形当且仅当 B 为锐角

$$\text{因为 } \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \text{ 所以 } \cos B = \frac{1}{7}$$

$$\text{因为 } \sin C = \sin(A + B)$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}$$

方法 2:

$$\text{由余弦定理 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\text{得 } 49 = 64 + c^2 - 2 \times 8 \times c \times \frac{1}{2}$$

$$\text{即 } c^2 - 8c + 15 = 0$$

解得 $c = 5$ 或 $c = 3$

当 $c = 3$ 时, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0$, 与 $\triangle ABC$ 为锐角三角形矛盾, 舍去

当 $c = 5$ 时, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} > 0$, 所以 B 为锐角,

因为 $b > a > c$, 所以 B 为最大角, 所以 $\triangle ABC$ 为锐角三角形

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$

(16) (共 13 分)

解: (1) 方法 1:

$$\text{由题设得 } \begin{cases} a_2 - a_1 = 6 \\ a_3 - a_2 = 18 \end{cases}$$

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_2 - a_1 = 6 \\ a_2q - a_1q = 18 \end{cases}$$

所以 $q = 3$

又因为 $a_2 - a_1 = a_1q - a_1 = 6$

所以 $a_1 = 3$

所以 $a_n = 3^n$

经检验, 此时 $a_{n+1} - a_n = 3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n$ 成立, 且 $\{a_n\}$ 为等比数列

所以 $a_3 = 3^3 = 27$

方法 2:

因为 $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$a_{n-2} - a_{n-3} = 2 \cdot 3^{n-3}$$

...

$$a_3 - a_2 = 2 \cdot 3^2$$

$$a_2 - a_1 = 2 \cdot 3^1$$

把上面 $n-1$ 个等式叠加，得到

$$a_n - a_1 = 2 \cdot (3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) = 3^n - 3$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 - 3 + 3^n (n \geq 2)$$

而 $a_1 = a_1 - 3 + 3^1$ 也符合上式

$$\text{所以 } a_n = a_1 - 3 + 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$$

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q

$$\text{所以对于 } \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ 有 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 - 3 + 3^{n+1}}{a_1 - 3 + 3^n} = q \text{ 恒成立}$$

$$\text{所以 } a_1 - 3 + 3^{n+1} - q(a_1 - 3 + 3^n) = 0$$

$$\text{即 } 3^n(3 - q) + (a_1 - 3)(1 - q) = 0$$

$$\text{所以 } q = 3, (a_1 - 3)(1 - q) = 0$$

而显然 $q = 1$ 不成立，所以 $a_1 = 3$

$$\text{所以 } a_n = 3^n$$

$$\text{所以 } a_3 = 3^3 = 27$$

方法 3:

$$\text{由题设得: } \begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n \end{cases}, \text{ 其中 } n \geq 2$$

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ 对于 } \forall n \in \mathbf{N}^* \text{ 恒成立}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a_n - a_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \\ a_n q - a_{n-1} q = 2 \cdot 3^n \end{cases}$$

所以 $q=3$

又因为 $a_2 - a_1 = a_1q - a_1 = 6$

所以 $a_1 = 3$

所以 $a_3 = a_1q^2 = 27$

方法 4:

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列,

所以, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 恒成立

由 $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 3^n$,

得 $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2 \cdot 3^{n+1} = a_n + 8 \cdot 3^n$

所以 $(a_n + 2 \cdot 3^n)^2 = a_n(a_n + 8 \cdot 3^n)$

所以 $a_n = 3^n$

所以 $q=3$, $a_3 = 27$

(II) 因为 $a_n = a_1q^{n-1} = 3^n$

所以 $a_{n+1} = a_1q^n = 3^{n+1}$

$$S_n = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3^{n+1}-3}{2}$$

因为 $S_n - (-3) = \frac{3^{n+1}-3}{2} + 3 = \frac{3^{n+1}+3}{2}$

$$a_{n+1} - S_n = 3^{n+1} - \frac{3^{n+1}-3}{2} = \frac{3^{n+1}+3}{2}$$

所以 $S_n - (-3) = a_{n+1} - S_n$

所以 $-3, S_n, a_{n+1}$ 成等差数列

(17) (共 14 分)

解: (I) 方法 1:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内, 过 B 作 AE 的垂线, 垂足为 F ,

因为 $CE \perp AD$, 所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$, $BC = CE = 1$, $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形,

且 $AF = FE = ED = 1$, F 为 AE 中点

在图 2 中, 连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点,

所以 $GF \parallel D_1E$

又因为 $BF \parallel EC$, $GF \cap BF = F$,

$GF, BF \subset$ 平面 BFG , $D_1E, EC \subset$ 平面 D_1EC ,

所以平面 $BFG \parallel$ 平面 CED_1

又因为 $BG \subset$ 面 GFB , 所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

方法 2:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内, 过 B 作 AE 的垂线, 垂足为 F

因为 $CE \perp AD$, 所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$, $BC = CE = 1$, $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形, F 为 AE 中点

在图 2 中, 连结 GF

因为点 G 是 AD_1 的中点,

所以 $GF \parallel D_1E$

又 $D_1E \subset$ 平面 D_1EC , $GF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $GF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BF \parallel EC$, $EC \subset$ 平面 D_1EC , $BF \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BF \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $GF \cap BF = F$

所以平面 $BFG \parallel$ 平面 D_1EC

又因为 $BG \subset$ 面 GFB , 所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

方法 3:

在图 1 的等腰梯形 $ABCD$ 内, 过 B 作 AE 的垂线, 垂足为 F ,

因为 $CE \perp AD$, 所以 $BF \parallel EC$

又因为 $BC \parallel AD$, $BC = CE = 1$, $AD = 3$

所以四边形 $BCEF$ 为正方形, $AF = FE = ED = 1$, 得 $AE = 2$

所以 $BC \parallel AE$, $BC = \frac{1}{2}AE$

在图 2 中设点 M 为线段 D_1E 的中点, 连结 MG, MC ,

因为点 G 是 AD_1 的中点,

所以 $GM \parallel AE$, $GM = \frac{1}{2}AE$

所以 $GM \parallel BC$, $GM = BC$, 所以四边形 $MGBC$ 为平行四边形

所以 $BG \parallel CM$

又因为 $CM \subset$ 平面 D_1EC , $BG \not\subset$ 平面 D_1EC

所以 $BG \parallel$ 平面 D_1EC

(II) 因为平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$,

平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE = EC$,

$D_1E \perp EC$, $D_1E \subset$ 平面 D_1EC ,

所以 $D_1E \perp$ 平面 $ABCE$

又因为 $AB \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $D_1E \perp AB$

又 $AB = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{2}$, $AE = 2$, 满足 $AE^2 = AB^2 + BE^2$,

所以 $BE \perp AB$

又 $BE \cap D_1E = E$

所以 $AB \perp$ 平面 D_1EB

(III) $CE \perp D_1E$, $CE \perp AE$, $AE \cap D_1E = E$

所以 $CE \perp$ 面 D_1AE

线段 CE 为三棱锥 $C-D_1AE$ 底面 D_1AE 的高

所以 $V_{D_1-GEC} = \frac{1}{2}V_{C-D_1AE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{6}$

18. (共 13 分) 搜索北京高考在线网, 获取更多试题及答案

解: (I) 设事件 A 为“随机选取一天, 这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单”

依题意, 连锁店的人均日快递业务量不少于 65 单的频率分别为:

0.2, 0.15, 0.05

因为 $0.2 + 0.15 + 0.05 = 0.4$

所以 $P(A)$ 估计为 0.4.

(II) 设事件 B 为“从四名骑手中随机选取 2 人，至少有 1 名骑手选择方案 (1)”

从四名新聘骑手中随机选取 2 名骑手，有 6 种情况，即

{甲, 乙}, {甲, 丙}, {甲, 丁}, {乙, 丙}, {乙, 丁}, {丙, 丁}

其中至少有 1 名骑手选择方案 (1) 的情况为

{甲, 乙}, {甲, 丙}, {甲, 丁}, {乙, 丙}, {乙, 丁}

所以 $P(B) = \frac{5}{6}$

(III) 方法 1:

快餐店人均日快递量的平均数是:

$$30 \times 0.05 + 40 \times 0.05 + 50 \times 0.2 + 60 \times 0.3 + 70 \times 0.2 + 80 \times 0.15 + 90 \times 0.05 = 62$$

因此，方案 (1) 日工资约为 $50 + 62 \times 3 = 236$

方案 2 日工资约为 $100 + (62 - 44) \times 5 = 190 < 236$

故骑手应选择方案 (1)

方法 2:

设骑手每日完成快递业务量为 n 件

方案 (1) 的日工资 $y_1 = 50 + 3n (n \in \mathbf{N}^*)$,

方案 (2) 的日工资 $y_2 = \begin{cases} 100, n \leq 44, n \in \mathbf{N}^* \\ 100 + 5(n - 44), n > 44, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

当 $n < 17$ 时, $y_1 < y_2$

依题意, 可以知道 $n \geq 25$, 所以这种情况不予考虑

当 $n \geq 25$ 时

$$\text{令 } 50 + 3n > 100 + 5(n - 44)$$

则 $n < 85$

即若骑手每日完成快递业务量在 85 件以下, 则方案 (1) 日工资大于方案 (2)

日工资, 而依题中数据, 每日完成快递业务量超过 85 件的频率是 0.05, 较

低，

故建议骑手应选择方案（1）

方法 3:

设骑手每日完成快递业务量为 n 单，

方案（1）的日工资 $y_1 = 50 + 3n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

方案（2）的日工资 $y_2 = \begin{cases} 100, n \leq 44, n \in \mathbf{N}^* \\ 100 + 5(n - 44), n > 44, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

所以方案（1）日工资约为

$$140 \times 0.05 + 170 \times 0.05 + 200 \times 0.2 + 230 \times 0.3 + 260 \times 0.2 + 290 \times 0.15 + 320 \times 0.05 = 236$$

方案（2）日工资约为

$$100 \times 0.05 + 100 \times 0.05 + 130 \times 0.2 + 180 \times 0.3 + 230 \times 0.2 + 280 \times 0.15 + 330 \times 0.05 = 194.5$$

因为 $236 > 194.5$ ，所以建议骑手选择方案（1）。

19. (共 14 分)

解：(I) 因为 $f(x) = e^x(ax^2 + x + 1)$ ，

所以 $f'(x) = e^x(x + 2)(ax + 1)$

所以 $f'(-2) = 0$ ，

所以切线的倾斜角为 0

(II) 因为 $f'(x) = e^x(x + 2)(ax + 1)$

当 $a = 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = -2$

当 x 变化时， $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表函数 $f(x)$ 只有极小值，没有极大值，不合题意，舍去

当 $a \neq 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{a}$

当 $a < 0$ 时,

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow	极大值	\searrow

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} > e^0 = 1$, 满足题意

当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2}e^x(x+2)^2 \geq 0$,

所以函数 $f(x)$ 单调递增, 没有极大值, 舍去

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-2) = e^{-2}(4a-1) > 1$,

$$\text{解得 } a > \frac{e^2+1}{4}$$

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

由上表函数 $f(x)$ 的极大值 $f(-\frac{1}{a}) = e^{-\frac{1}{a}} < 1$, 不合题意

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (\frac{e^2+1}{4}, +\infty)$

20. (共 13 分) 北京高考在线网

解: (I) 依题意, 有 $\sqrt{4+b^2} = \sqrt{6}$

所以 $b = \sqrt{2}$

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

焦点坐标分别为 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$,

(II) (i) 方法 1:

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$

依题意 $x_0 \neq \pm 2, y_0 \neq 0, A(-2, 0)$,

所以 $M(\frac{x_0-2}{2}, \frac{y_0}{2})$

所以直线 PA 的斜率 $k_{PA} = \frac{y_0}{x_0+2}$

因为 $PA \perp MQ$, 所以 $k_{PA} \cdot k_{MQ} = -1$

所以直线 MQ 的斜率 $k_{MQ} = -\frac{x_0+2}{y_0}$

所以直线 MQ 的方程为 $y - \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0+2}{y_0}(x - \frac{x_0-2}{2})$

令 $x=0$, 得到 $y_Q = \frac{y_0}{2} + \frac{(x_0+2)(x_0-2)}{2y_0}$

因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$

所以 $y_Q = -\frac{y_0}{2}$, 所以 $Q(0, -\frac{y_0}{2})$

所以 H 是 M, Q 的中点, 所以点 M, Q 关于点 H 对称

方法 2:

设 $P(x_0, y_0)$, 直线 AP 的方程为 $y = k(x+2)$

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k(x+2) \end{cases}$$

消元得 $(1+2k^2)x^2 + 8k^2x + 8k^2 - 4 = 0$

所以 $\Delta = 16 > 0$

所以 $x_0 + (-2) = \frac{-8k^2}{1+2k^2}$

所以 $x_0 = \frac{-4k^2 + 2}{1+2k^2}$

所以 $x_M = \frac{-4k^2}{1+2k^2}$, $y_M = k(\frac{-4k^2}{1+2k^2} + 2) = \frac{2k}{1+2k^2}$

所以 $M(\frac{-4k^2}{1+2k^2}, \frac{2k}{1+2k^2})$

因为 $AP \perp MQ$, 所以 $K_{MQ} = -\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y - \frac{2k}{1+2k^2} = -\frac{1}{k}(x - \frac{-4k^2}{1+2k^2})$

令 $x = 0$, 得到 $y_Q = \frac{2k}{1+2k^2} - \frac{1}{k} \cdot \frac{4k^2}{1+2k^2} = \frac{-2k}{1+2k^2}$

所以 $Q(0, \frac{-2k}{1+2k^2})$

所以 H 是 M, Q 的中点, 所以点 M, Q 关于点 H 对称

方法 3:

设 $P(x_0, y_0)$, 直线 AP 的方程为 $x = ty - 2$

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x = ty - 2 \end{cases}$

消元得, $(t^2 + 2)y^2 - 4ty = 0$

因为 $0 + y_0 = \frac{4t}{t^2 + 2}$, 所以 $y_0 = \frac{4t}{t^2 + 2}$

所以 $y_M = \frac{2t}{t^2 + 2}$, $x_M = \frac{-4}{t^2 + 2}$,

所以 $M(\frac{-4}{t^2 + 2}, \frac{2t}{t^2 + 2})$

因为 $AP \perp MQ$, 所以 $K_{MQ} = -\frac{1}{k}$

所以直线 MQ 的方程为 $y - \frac{2t}{t^2 + 2} = -t(x - \frac{-4}{t^2 + 2})$

令 $x = 0$, 得到 $y_Q = \frac{-2t}{t^2 + 2}$, 所以 $Q(0, \frac{-2t}{t^2 + 2})$

所以 H 是 M, Q 的中点, 所以点 M, Q 关于点 H 对称

(ii) 方法 1:

因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 且 $|PQ|=|AQ|$, 所以 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形

所以 $|AP|=\sqrt{2}|AQ|$

因为 $P(x_0, y_0)$, $Q(0, -\frac{y_0}{2})$

$$\text{即 } \sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=\sqrt{2}\sqrt{2^2+\frac{y_0^2}{4}}$$

化简, 得到 $3x_0^2+16x_0-12=0$, 解得 $x_0=\frac{2}{3}, x_0=-6$ (舍)

即点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$

方法 2:

因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 且 $|PQ|=|AQ|$, 所以 $\angle AQP=90^\circ$,

所以 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ}=0$

因为 $P(x_0, y_0)$, $Q(0, -\frac{y_0}{2})$,

所以 $\overrightarrow{AQ}=(2, -\frac{y_0}{2})$, $\overrightarrow{PQ}=(-x_0, -\frac{3y_0}{2})$

所以 $(2, -\frac{y_0}{2}) \cdot (-x_0, -\frac{3y_0}{2})=0$

$$\text{即 } -2x_0+\frac{3y_0^2}{4}=0$$

因为 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$

化简, 得到 $3x_0^2+16x_0-12=0$, 解得 $x_0=\frac{2}{3}, x_0=-6$ (舍)

即点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$

方法 3:

因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形, 且 $|PQ|=|AQ|$, 所以 $\angle AQP=90^\circ$

所以 $|AP|=2|MQ|$

因为 $P(x_0, y_0)$, $Q(0, -\frac{y_0}{2})$, $M(\frac{x_0-2}{2}, \frac{y_0}{2})$

$$\text{所以 } \sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}=2\sqrt{(\frac{x_0-2}{2})^2+y_0^2}$$

化简得到 $8x_0 - 3y_0^2 = 0$

因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$

化简，得到 $3x_0^2 + 16x_0 - 12 = 0$ ，解得 $x_0 = \frac{2}{3}, x_0 = -6$ （舍）

即点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$

方法 4:

因为 $\triangle APQ$ 为直角三角形，所以 $\angle AQP = 90^\circ$

所以点 A, P, Q 都在以 AP 为直径的圆上，

因为 $P(x_0, y_0)$ ， $Q(0, -\frac{y_0}{2})$ ， $A(-2, 0)$

所以有 $(x - \frac{-2+x_0}{2})^2 + (y - \frac{y_0}{2})^2 = (\frac{1}{2}\sqrt{(x_0+2)^2 + y_0^2})^2$

所以 $-2x_0 + \frac{3y_0^2}{4} = 0$

因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$

化简，得到 $3x_0^2 + 16x_0 - 12 = 0$ ，解得 $x_0 = \frac{2}{3}, x_0 = -6$ （舍）

即点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$