

顺义区 2020 届高三第二次统练

数学参考答案及评分参考

一、选择题（共 10 题，每题 4 分，共 40 分）

- (1) C (2) B (3) A (4) C (5) D
(6) B (7) D (8) B (9) A (10) D

二、填空题（共 5 题，每题 5 分，共 25 分）

- (11) 2 (12) $a_n = n+1, n \in \mathbb{N}^*$ (13) $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$
(14) $a = \pm 1$ (15) ②③

注：第 14 题全部答对得 5 分，只写一个答案得 3 分，有错误答案得 0 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题（共 6 题，共 85 分）

(16) （共 14 分）

解：选①：在 $\triangle ABC$ 中， $\cos C = \frac{1}{3}$ ，

根据余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ ----- 2 分

且 $a + b = 5$ ， $c = 3$ ，得到 $9 = 25 - 2ab - \frac{2ab}{3}$ ----- 6 分

所以 $ab = 6$ ----- 8 分

所以 $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ ----- 10 分

$\therefore \cos C = \frac{1}{3}$

$$\therefore \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{-----12分}$$

$$\text{所以三角形}\triangle ABC\text{的面积是 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 2\sqrt{2} \quad \text{-----14分}$$

$$\text{选②: 在}\triangle ABC\text{中, } \cos C = -\frac{1}{3},$$

$$\text{当 } \cos C = -\frac{1}{3} \text{ 时, 根据余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad \text{-----2分}$$

$$\text{又 } a + b = 5, \quad c = 3, \text{ 得到 } ab = 12 \quad \text{-----8分}$$

$$\text{此时方程组 } \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 12 \end{cases} \text{ 无解.} \quad \text{-----12分}$$

所以这样的三角形不存在. -----14分

$$\text{选③: 在}\triangle ABC\text{中, 因为 } \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 所以 } \cos C = \pm \frac{1}{3}. \quad \text{-----2分}$$

$$\text{当 } \cos C = \frac{1}{3} \text{ 时, 根据余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{-----4分}$$

$$\text{且 } a + b = 5, \quad c = 3, \text{ 得到 } 9 = 25 - 2ab - \frac{2ab}{3} \quad \text{-----6分}$$

$$\text{所以 } ab = 6 \quad \text{-----8分}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{-----10分}$$

$$\text{所以三角形}\triangle ABC\text{的面积是 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 2\sqrt{2} \quad \text{-----12分}$$

$$\text{当 } \cos C = -\frac{1}{3} \text{ 时, 根据余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

又 $a+b=5$, $c=3$, 得到 $ab=12$,

此时方程组 $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=12 \end{cases}$ 无解.

所以这样的三角形不存在.

----- 14 分

③法二: 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{25}{2} > c^2$,

根据余弦定理 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 得到 $\cos C > 0$

----- 2 分

因为 $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\cos C = \frac{1}{3}$

----- 4 分

根据余弦定理 $c^2 = a^2+b^2 - 2ab\cos C$

----- 6 分

和 $a+b=5$, $c=3$, 得到 $ab=6$

----- 10 分

所以 $\begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

----- 12 分

所以三角形 $\triangle ABC$ 的面积是 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 2\sqrt{2}$

----- 14 分

17. (共 14 分)

解: (I) 取 BD 中点 O , 联结 AO, C_1O

$\therefore BD \perp AO, BD \perp C_1O$.

----- 2 分

又 $\because AO, C_1O \subset \text{平面} AC_1O \therefore BD \perp \text{平面} AC_1O$

----- 4 分

又 $\because AC_1 \subset \text{平面} AC_1O \therefore BD \perp AC_1$

----- 5 分

(II)

$\therefore$ 二面角 $A-BD-C_1$ 是直二面角

$$\therefore \angle C_1OA = 90^\circ$$

$$\therefore C_1O \perp AO$$

$\therefore OA, OB, OC_1$ 两两垂直

$\therefore$ 以 O 为原点, 如图建系:

$$\therefore O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), D(0,-1,0), C_1(0,0,1)$$

$$\text{又 } E, F \text{ 为中点} \quad \therefore E(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), F(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), \overrightarrow{DE} = (0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 DEF 的一个法向量

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } y=1 \text{ 得 } z=-3, x=1$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 1, -3)$$

又 $\because OC_1 \perp$ 平面 ABD $\therefore$ 平面 ABD 的一个法向量 $\overrightarrow{OC_1} = (0, 0, 1)$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{OC_1} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OC_1}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OC_1}|} = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

$\therefore$ 平面 DEF 与平面 ABD 所成的锐二面角余弦值为 $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

18. (本题 15 分)

解: (I) 根据甲班的统计数据可知:

甲班每天学习时间在 5 小时以上的学生频率为 $0.5 + 0.25 + 0.05 = 0.8$

所以, 估计高三年级每天学习时间达到 5 小时以上的学生人数

为 $600 \times 0.8 = 480$ 人 -----4 分

(II) 甲班级自主学习时长不足 4 小时的人数为: $40 \times 0.05 = 2$ 人

乙班级自主学习时长不足 4 小时的人数为: $40 \times 0.1 = 4$ 人 -----6 分

X 的可能值为: 0, 1, 2

$$P(x=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}, P(x=1) = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}, P(x=2) = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5} \quad \text{-----9 分}$$

$\therefore$ 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\therefore X \text{ 的数学期望为 } E(x) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1 \quad \text{-----12 分}$$

(III) $D_{\text{甲}} < D_{\text{乙}}$ -----15 分

19. (本题 14 分)

(I) $a=1$ 时, $f(x) = e^x - x^2$. $f'(x) = e^x - 2x$

(或在这里求的 $f'(x) = e^x - 2ax$ 也可以) . -----2 分

$$\therefore f(0) = e^0 - 0 = 1, \quad k = f'(0) = e^0 - 0 = 1. \quad \text{-----4 分}$$

所求切线方程为 $y = x + 1$ -----5 分

(II) 方法一: $f'(x) = e^x - 2ax$.

若 $f(x) = e^x - x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f'(x) \geq 0$ -----6 分

即 $a \leq \frac{e^x}{2x}$ 恒成立, 等价于 $a \leq \left(\frac{e^x}{2x}\right)_{\min}$. -----7 分

$$\text{设 } g(x) = \frac{e^x}{2x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{2x^2}, \quad \text{-----8 分}$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 1$

当 $x \in (0,1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = \frac{e}{2}$.

-----11 分

所以 $a \in \left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$.

-----12 分

方法二: $f'(x) = e^x - 2ax$.

若 $f(x) = e^x - x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 则对任意 $x \in (0,+\infty)$, 都有 $f'(x) \geq 0$ -----6 分

等价于 $(f'(x))_{\min} \geq 0$.

设 $h(x) = e^x - 2ax$, $h'(x) = e^x - 2a$.

当 $x \in (0,+\infty)$ 时, $e^x > 1$

-----7 分

分类讨论: ①当 $2a \leq 1$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$ 恒成立,

所以 $h(x) = e^x - 2ax$ 在 $x \in (0,+\infty)$ 上单调递增, 那么 $h(x) \geq h(0) = 1$,

所以 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 满足 $f'(x) \geq 0$.

-----8 分

②当 $2a > 1$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x) = e^x - 2a = 0$, 得 $x = \ln 2a$.

当 $x \in (0, \ln 2a)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $x \in (0, \ln 2a)$ 上单调递减;

当 $x \in (\ln 2a, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $x \in (\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增;

所以函数 $h(x)$ 的最小值为 $h(\ln 2a) = 2a(1 - \ln 2a)$

-----10 分

由 $2a(1 - \ln 2a) \geq 0$ 解得 $a \leq \frac{e}{2}$, 所以 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e}{2}$.

-----11 分

综上: $a \in \left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$.

-----12 分

(III) 2 个

-----14 分

20. (本题 14 分)

(I) 由题意得
$$\begin{cases} 2c = 2 \\ a = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{解得 } a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$$

-----3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

-----5 分

(II) $F(1,0)$, $A(-2,0)$, 直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$.

-----6 分

由 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$.

直线 l 过椭圆 C 的焦点, 显然直线 l 与椭圆 C 相交.

设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$

-----8 分

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 4$, 得 $y_M = \frac{6y_1}{x_1 + 2}$; 即 $M(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2})$

同理: $N(4, \frac{6y_2}{x_2 + 2})$

-----10 分

$\therefore \overrightarrow{FM} = (3, \frac{6y_1}{x_1 + 2})$, $\overrightarrow{FN} = (3, \frac{6y_2}{x_2 + 2})$

又 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 9 + \frac{36y_1y_2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$

-----11 分

$= 9 + \frac{36k(x_1 - 1) \cdot k(x_2 - 1)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = 9 + \frac{36k^2[x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1]}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}$

$= 9 + \frac{36k^2(\frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2}{3 + 4k^2} + 1)}{\frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} + \frac{16k^2}{3 + 4k^2} + 4}$

$= 9 + \frac{36k^2 \cdot \frac{-9}{3 + 4k^2}}{\frac{36k^2}{3 + 4k^2}}$

$= 9 - 9 = 0$

$\therefore$ 以 MN 为直径的圆恒过点 F .

-----14 分

21. (本题 14 分)

解: (I) $d_1 = 4$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$.

-----3 分

(II) 因为 $a_1 > 0$, 公比 $0 < q < 1$, 所以 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是递减数列.

因此, 对 $i = 1, 2, \dots, n-1$, $A_i = a_i$, $B_i = a_{i+1}$.

-----5 分

于是对 $i = 1, 2, \dots, n-1$,

$$d_i = B_i - A_i = a_{i+1} - a_i = a_1(q-1)q^{i-1}.$$

-----7 分

因此 $d_i \neq 0$ 且 $\frac{d_{i+1}}{d_i} = q$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$),

即 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 是等比数列.

-----9 分

(III) 设 d 为 $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ 的公差, 则 $d > 0$

对 $1 \leq i \leq n-2$, 因为 $B_i \geq B_{i+1}$,

所以 $A_{i+1} = B_{i+1} - d_{i+1} \leq B_i - d_{i+1} = B_i - d_i - d < B_i - d_i = A_i$, 即 $A_{i+1} < A_i$ -----11 分

又因为 $A_{i+1} = \min\{A_i, a_{i+1}\}$, 所以 $a_{i+1} = A_{i+1} < A_i \leq a_i$.

从而 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 是递减数列. 因此 $A_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). -----12 分

又因为 $B_1 = A_1 + d_1 = a_1 + d_1 > a_1$, 所以 $B_1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1}$.

因此 $a_n = B_1$.

所以 $B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = a_n$. $a_i = A_i = B_i - d_i = a_n - d_i$.

因此对 $i = 1, 2, \dots, n-2$ 都有 $a_{i+1} - a_i = d_i - d_{i+1} = -d$,

即 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 是等差数列.

-----14 分