西 城 区 高 三 统 一 测 试

数　学(文科)

2017.4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至6页，共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,4\}$，那么$A\cap \complement_U B=$

(A) $\{3,5\}$　　(B) $\{2,4,6\}$

(C) $\{1,2,4,6\}$　　(D) $\{1,2,3,5,6\}$

2. 在复平面内，复数$\dfrac{1+i}{i}$的对应点位于

(A) 第一象限　　(B) 第二象限

(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 双曲线$y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$的焦点坐标是

(A) $(0,\sqrt{2})$，$(0,-\sqrt{2})$　　(B) $(\sqrt{2},0)$，$(-\sqrt{2},0)$

(C) $(0,2)$，$(0,-2)$　　(D) $(2,0)$，$(-2,0)$

4. 函数$f(x)=(\dfrac{1}{2})^x-\log_2 x$的零点个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上. 则“曲线 $y=f(x)$ 过原点”是“$f(x)$ 为奇函数”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

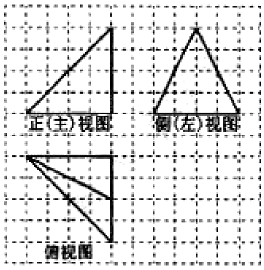
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

6. 在△ABC 中，点 D 满足 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，则

(A) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　(B) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(D) $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

7. 在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示. 如果小正方形网格的边长为 1，那么该四面体最长棱的棱长为



(A) $4\sqrt{3}$　　(B) 6

(C) $4\sqrt{2}$　　(D) $2\sqrt{5}$

8. 函数 $f(x)$ 的图象上任意一点 $A(x,y)$ 的坐标满足条件 $|x|\geqslant|y|$，称函数 $f(x)$ 具有性质 P. 下列函数中，具有性质 P 的是

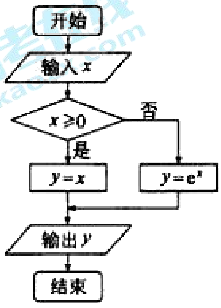
(A) $f(x)=x^2$　　(B) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

(C) $f(x)=\sin x$　　(D) $f(x)=\ln(x+1)$

第Ⅱ卷(非选择题　共110分)

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 的定义域为____.



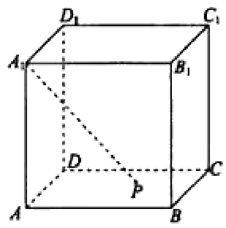
10. 执行如图所示的程序框图. 当输入 $x=\ln\dfrac{1}{2}$ 时，输出的 y 值为____.

11. 圆 C：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的圆心坐标是____；直线 l：$x-y=0$ 与圆 C 相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$____.

12. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{1+\cos 4x}$ 的最小正周期是____.

13. 实数 x，y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 1,\\ y\leqslant 2,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的最大值是____；最小值是____.

14. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，点 P 在正方形 $ABCD$ 的边界及其内部运动. 平面区域 W 由所有满足 $A_1P\geqslant\sqrt{5}$ 的点 P 组成，则 W 的面积是____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_1=3$，$a_4=24$．数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_4=-8$，且 $\{a_n+b_n\}$ 是等差数列．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

16．（本小题满分 13 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\tan C=2c\sin A$．

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）求 $\sin A+\sin B$ 的最大值．

17．（本小题满分 13 分）

在测试中，客观题难度的计算公式为 $P_i=\dfrac{R_i}{N}$，其中 P_i 为第 i 题的难度，R_i 为答对该题的人数，N 为参加测试的总人数．

现对某校高三年级 120 名学生进行一次测试，共 5 道客观题．测试前根据对学生的了解，预估了每道题的难度，如下表所示：

题号	1	2	3	4	5
考前预估难度 P_i	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4

测试后，从中随机抽取了 10 名学生，将他们编号后统计各题的作答情况，如下表所示（“√”表示答对，“×”表示答错）：

学生编号＼题号	1	2	3	4	5
1	×	√	√	√	√
2	√	√	√	√	×
3	√	√	√	√	×
4	√	√	√	×	×
5	√	√	√	√	√
6	√	×	×	√	×
7	×	√	√	√	×
8	√	×	×	×	×
9	√	√	×	×	×
10	√	√	√	√	×

（Ⅰ）根据题中数据，将抽样的 10 名学生每道题实测的答对人数及相应的实测难度填入下表，并估计这 120 名学生中第 5 题的实测答对人数；

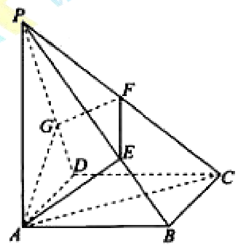
题号	1	2	3	4	5
实测答对人数					
实测难度					

（Ⅱ）从编号为 1 到 5 的 5 人中随机抽取 2 人，求恰好有 1 人答对第 5 题的概率；

（Ⅲ）定义统计量 $S=\frac{1}{n}[(P_1'-P_1)^2+(P_2'-P_2)^2+\cdots+(P_n'-P_n)^2]$，其中 P_i' 为第 i 题的实测难度，P_i 为第 i 题的预估难度（$i=1, 2, \cdots, n$）．规定：若 $S<0.05$，则称该次测试的难度预估合理，否则为不合理．判断本次测试的难度预估是否合理．

18．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC$．过点 A 的平面与棱 PB，PC，PD 分别交于点 E，F，G（E，F，G 三点均不在棱的端点处）．



（Ⅰ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PBC；

（Ⅱ）若 $PC\perp$ 平面 $AEFG$，求 $\frac{PF}{PC}$ 的值；

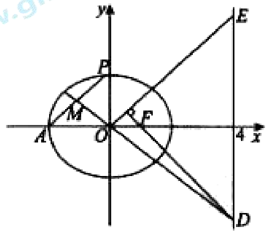
（Ⅲ）直线 AE 是否可能与平面 PCD 平行？证明你的结论．

19.（本小题满分 14 分）

如图，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，F 为椭圆 C 的右焦点．$A(-a,0)$，$|AF|=3$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，P 为椭圆上一点，AP 的中点为 M．直线 OM 与直线 $x=4$ 交于点 D，过 O 作 $OE\perp DF$，交直线 $x=4$ 于点 E．求证：$OE/\!/AP$．



20.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$．设 l 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线，其中 $x_0\in[-1,1]$．

（Ⅰ）求直线 l 的方程（用 x_0 表示）；

（Ⅱ）求直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围；

（Ⅲ）设直线 $y=a$ 分别与曲线 $y=f(x)$ 和射线 $y=x-1(x\in[0,+\infty))$ 交于 M，N 两点，求 $|MN|$ 的最小值及此时 a 的值．

西城区高三统一测试

数学（文科）参考答案及评分标准

2017.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A	2. D	3. C	4. B
5. B	6. C	7. B	8. C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\{x\mid x\geqslant 0$，且 $x\neq 1\}$	10. $\frac{1}{2}$	11. $(1,1)$；2
12. $\frac{\pi}{2}$	13. 5；$\frac{4}{5}$	14. $4-\frac{\pi}{4}$

注：第 11，13 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意得

$q^3=\frac{a_4}{a_1}=8$，解得 $q=2$. [2 分]

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$. [4 分]

设等差数列$\{a_n+b_n\}$的公差为d，由题意得

$d=\frac{(a_4+b_4)-(a_1+b_1)}{4-1}=\frac{16-4}{3}=4$. [6 分]

所以 $a_n+b_n=(a_1+b_1)+(n-1)d=4n$. [8 分]

从而 $b_n=4n-3\cdot 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$. [9 分]

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$b_n=4n-3\cdot 2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

数列$\{4n\}$的前n项和为$2n(n+1)$；数列$\{3\cdot 2^{n-1}\}$的前n项和为$3\cdot(2^n-1)$. [12 分]

所以，数列$\{b_n\}$的前n项和为 $2n^2+2n-3\cdot 2^n+3$. [13 分]

16.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a\tan C = 2c\sin A$，

得 $\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C} = 2\sin A$． [1 分]

由正弦定理得 $\dfrac{\sin A}{\sin C}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C} = 2\sin A$． [3 分]

所以 $\cos C = \dfrac{1}{2}$． [4 分]

因为 $C\in(0,\pi)$， [5 分]

所以 $C = \dfrac{\pi}{3}$． [6 分]

（Ⅱ）$\sin A + \sin B = \sin A + \sin(\dfrac{2\pi}{3} - A)$ [7 分]

$= \dfrac{3}{2}\sin A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ [9 分]

$= \sqrt{3}\sin(A + \dfrac{\pi}{6})$． [11 分]

因为 $C = \dfrac{\pi}{3}$，所以 $0 < A < \dfrac{2\pi}{3}$， [12 分]

所以 当 $A = \dfrac{\pi}{3}$ 时，$\sin A + \sin B$ 取得最大值 $\sqrt{3}$． [13 分]

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）每道题实测的答对人数及相应的实测难度如下表：

题号	1	2	3	4	5
实测答对人数	8	8	7	7	2
实测难度	0.8	0.8	0.7	0.7	0.2

[4 分]

所以，估计 120 人中有 $120\times0.2 = 24$ 人答对第 5 题． [5 分]

（Ⅱ）记编号为 i 的学生为 A_i $(i = 1,2,3,4,5)$，

从这 5 人中随机抽取 2 人，不同的抽取方法有 10 种．

其中恰好有 1 人答对第 5 题的抽取方法为 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_2,A_5)，

(A_3,A_5)，(A_4,A_5)，共 6 种． [9 分]

所以，从抽样的 10 名学生中随机抽取 2 名答对至少 4 道题的学生，恰好有 1 人答对第 5 题的概率为 $P = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$． [10 分]

（III）P_i' 为抽样的 10 名学生中第 i 题的实测难度，用 P_i' 作为这 120 名学生第 i 题的实测难度.

$$S=\frac{1}{5}[(0.8-0.9)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2+(0.7-0.6)^2+(0.2-0.4)^2]$$

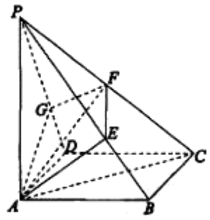
$=0.012$. [12 分]

因为 $S=0.012<0.05$，

所以，该次测试的难度预估是合理的. [13 分]

18.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，



所以 $PA\perp BC$. [1 分]

因为 $ABCD$ 为正方形，

所以 $AB\perp BC$， [2 分]

所以 $BC\perp$ 平面 PAB . [3 分]

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC . [4 分]

（Ⅱ）连接 AF . [5 分]

因为 $PC\perp$ 平面 $AEFG$，

所以 $PC\perp AF$. [7 分]

又因为 $PA=AC$，

所以 F 是 PC 的中点. [8 分]

所以 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{2}$. [9 分]

（III）AE 与平面 PCD 不可能平行. [10 分]

证明如下：

假设 $AE//$ 平面 PCD，

因为 $AB//CD$，$AB\not\subset$ 平面 PCD.

所以 $AB//$ 平面 PCD. [12 分]

而 AE，$AB\subset$ 平面 PAB，

所以 平面 $PAB//$ 平面 PCD，这显然矛盾！ [13 分]

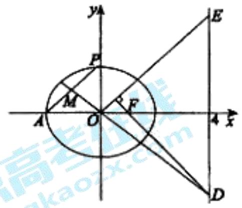
所以假设不成立，

即 AE 与平面 PCD 不可能平行. [14 分]

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c．依题意，得

$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$．　　[2 分]



解得 $a=2$，$c=1$．

所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．　　[5 分]

（Ⅱ）解法一：由（Ⅰ）得 $A(-2,0)$．设 AP 的中点 $M(x_0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$．

设直线 AP 的方程为：$y=k(x+2)\ (k\neq 0)$，将其代入椭圆方程，整理得

$(4k^2+3)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，　　[7 分]

所以 $-2+x_1=\frac{-16k^2}{4k^2+3}$．　　[8 分]

所以 $x_0=\frac{-8k^2}{4k^2+3}$，$y_0=k(x_0+2)=\frac{6k}{4k^2+3}$，

即 $M(\frac{-8k^2}{4k^2+3},\frac{6k}{4k^2+3})$．　　[9 分]

所以直线 OM 的斜率是 $\dfrac{\frac{6k}{4k^2+3}}{\frac{-8k^2}{4k^2+3}}=-\frac{3}{4k}$，　　[10 分]

所以直线 OM 的方程是 $y=-\frac{3}{4k}x$．令 $x=4$，得 $D(4,-\frac{3}{k})$．　　[11 分]

由 $F(1,0)$，得直线 DF 的斜率是 $\dfrac{-\frac{3}{k}}{4-1}=-\frac{1}{k}$，　　[12 分]

因为 $OE\perp DF$，所以直线 OE 的斜率为 k，　　[13 分]

所以直线 $OE//AP$．　　[14 分]

解法二：由（Ⅰ）得 $A(-2,0)$．设 $P(x_1,y_1)\ (x_1\neq\pm 2)$，其中 $3x_1^2+4y_1^2-12=0$．

因为 AP 的中点为 M，所以 $M(\frac{x_1-2}{2},\frac{y_1}{2})$．　　[6 分]

所以直线 OM 的斜率是 $k_{OM}=\frac{y_1}{x_1-2}$，　　[7 分]

所以直线 OM 的方程是 $y=\frac{y_1}{x_1-2}x$．令 $x=4$，得 $D(4,\frac{4y_1}{x_1-2})$．　　[8 分]

由 $F(1,0)$，得直线 DF 的斜率是 $k_{DF}=\dfrac{4y_1}{3(x_1-2)}$． [9 分]

因为直线 AP 的斜率是 $k_{AP}=\dfrac{y_1}{2+x_1}$， [10 分]

所以 $k_{DF}\cdot k_{AP}=\dfrac{4y_1^2}{3(x_1^2-4)}=-1$， [12 分]

所以 $AP\perp DF$． [13 分]

因为 $OE\perp DF$，

所以 $OE//AP$． [14 分]

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）对 $f(x)$ 求导数，得 $f'(x)=e^x-x$， [1 分]

所以切线 l 的斜率为 $f'(x_0)=e^{x_0}-x_0$， [2 分]

由此得切线 l 的方程为：$y-(e^{x_0}-\frac{1}{2}x_0^2)=(e^{x_0}-x_0)(x-x_0)$，

即 $y=(e^{x_0}-x_0)x+(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$． [3 分]

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，直线 l 在 y 轴上的截距为 $(1-x_0)e^{x_0}+\frac{1}{2}x_0^2$． [4 分]

设 $g(x)=(1-x)e^x+\frac{1}{2}x^2$，$x\in[-1,1]$．

所以 $g'(x)=x(1-e^x)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=0$．

$g(x)$，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$	↘	1	↘	$\frac{1}{2}$

所以函数 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减， [6 分]

所以 $[g(x)]_{\max}=g(-1)=\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$，$[g(x)]_{\min}=g(1)=\frac{1}{2}$，

所以直线 l 在 y 轴上的截距的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{2}{e}+\frac{1}{2}]$． [8 分]

（III）过 M 作 x 轴的垂线，与射线 $y=x-1$ 交于点 Q，

所以△ MNQ 是等腰直角三角形． [9 分]

所以 $|MN|=|MQ|=|f(x)-g(x)|=|e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1|$． [10 分]

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x+1$，$x\in[0,+\infty)$，

所以 $h'(x)=e^x-x-1$．

令 $k(x)=e^x-x-1$，则 $k'(x)=e^x-1>0$ $(x>0)$，

所以 $k(x)=h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，

从而 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增， [12 分]

所以 $[h(x)]_{\min}=h(0)=2$，此时 $M(0,1)$，$N(2,1)$．

所以 $|MN|$ 的最小值为 2，此时 $a=1$． [13 分]