

2023 北京二中初三（上）期中

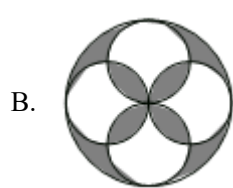
数 学

考查目标		
1. 知识：人教版九年级上册《一元二次方程》、《二次函数》、《旋转》、《概率》、《相似》、《锐角三角函数》的全部内容以及《圆》的部分内容。 2. 能力：数学运算能力，逻辑推理能力，阅读理解能力，应用能力，数形结合能力，分类讨论能力。		
A 卷面成绩 90% (满分 90 分)	B 过程性评价 (满分 10 分)	学业成绩总评= A+B (满分 100 分)
考生须知	1. 本试卷分为第 I 卷、第 II 卷和答题卡，共 16 页；其中第 I 卷 2 页，第 II 卷 6 页，答题卡 8 页。全卷共三大题，28 道小题。 2. 本试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟。 3. 在第 I 卷、第 II 卷指定位置和答题卡的密封线内准确填写班级、姓名、考号、座位号。 4. 考试结束，将答题卡交回。	

第 I 卷（选择题 共 16 分）

一、选择题（共 16 分，每题 2 分，以下每题只有一个正确的选项）

1. 下列所给图形是中心对称图形但不是轴对称图形的是（ ）



2. 抛物线 $y = x^2 - 1$ 的顶点坐标是（ ）

A. (0,1)

B. (0,-1)

C. (1,0)

D. (-1,0)

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$ ，则 $\tan B$ 值为（ ）

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

4. 已知 $x=2$ 是一元二次方程 $x^2 - 2mx + 4 = 0$ 的一个解，则 m 的值为（ ）

A. 2

B. 0

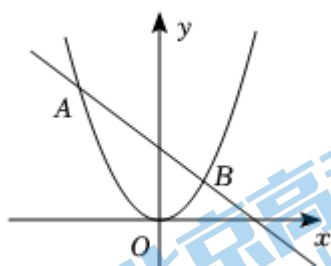
C. 0 或 2

D. 0 或 -2

5. 由抛物线 $y = -2x^2$ 平移而得到抛物线 $y = -2(x+1)^2 - 2$ ，下列平移正确的是（ ）

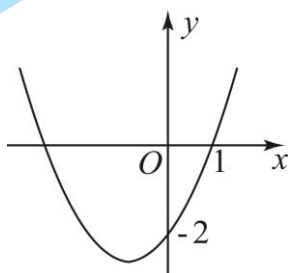
- A. 先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位
- B. 先向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位
- C. 先向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位
- D. 先向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位

6. 如图，抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = bx + c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$ ，则关于 x 的不等式 $ax^2 - bx - c \geq 0$ 的解集为（ ）



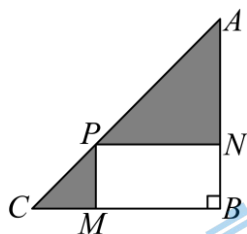
- A. $-2 \leq x \leq 1$
- B. $x \leq -2$ ，或 $x \geq 1$
- C. $1 \leq x \leq 4$
- D. $x \leq 1$ ，或 $x \geq 4$

7. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 过点 $(1, 0)$ 和点 $(0, -2)$ ，且顶点在第三象限，则下列判断错误的是（ ）



- A. $a + b = 2$
- B. $0 < b < 2$
- C. $-1 < a - b + c < 0$
- D. 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根

8. 某小区有一块绿地如图中等腰直角 $\triangle ABC$ 所示，计划在绿地上建造一个矩形的休闲书吧 $PMBN$ ，其中点 P , M , N 分别在边 AC , BC , AB 上，记 $PM = x$, $PN = y$ ，图中阴影部分的面积为 S ，当 x 在一定范围内变化时， y 和 S 都随 x 的变化而变化，则 y 与 x , S 与 x 满足的函数关系分别是（ ）



- A. 正比例函数关系，一次函数关系
- B. 一次函数关系，二次函数关系
- C. 一次函数关系，一次函数关系
- D. 正比例函数关系，二次函数关系

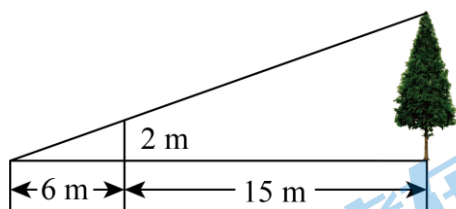
第 II 卷（非选择题 共 84 分）

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 已知二次函数满足条件：①图像象过原点；②当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，请你写出一个满足上述条件的二次函数的解析式：_____.

10. 若 $A(-2, y_1)$, $B(1, y_2)$ 在二次函数 $y = -x^2 - 2x + 1$ 的图象上，则 y_1 与 y_2 的大小关系为_____. (用 “>”、“<” 或 “=” 连接)

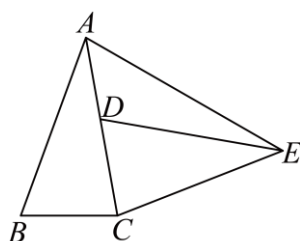
11. 如图，为了测量某棵树的高度，小明用长为 2m 的竹竿作测量工具，移动竹竿，使竹竿、树的顶端的影子恰好落在地面的同一点. 此时，竹竿与这一点距离相距 6m，与树相距 15m，则树的高度为_____m.



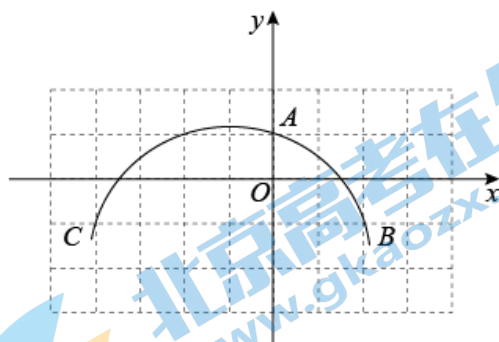
12. 如图，小明同学用一张长 10cm，宽 7cm 的矩形纸板制作一个底面积为 20cm^2 的无盖长方体纸盒，他将纸板的四个角各剪去一个同样大小的正方形，将四周向上折叠即可（损耗不计）. 设剪去的正方形边长为 $x\text{cm}$ ，则可列出关于 x 的方程为_____.



13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 70^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle EDC$ ，当点 B 的对应点 D 恰好落在 AC 边上时， $\angle CAE$ 的度数为_____.



14. 如图，方格纸上每个小正方形的边长均为 1 个单位长度，点 O , A , B , C 在格点（两条网格线的交点叫格点）上，以点 O 为原点建立直角坐标系，则过 A , B , C 三点的圆的圆心坐标为_____.



15. 某学习小组做抛掷一枚纪念币的实验，整理同学们获得的实验数据，如下表.

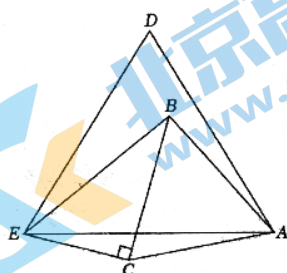
抛掷次数	50	100	200	500	1000	2000	3000	4000	5000
“正面向上”的次数	19	38	68	168	349	707	1069	1400	1747
“正面向上”的频率	0.3800	0.3800	0.3400	0.3360	0.3490	0.3535	0.3563	0.3500	0.3494

下面有三个推断：

- ①在用频率估计概率时，用实验 5000 次时的频率 0.3494 一定比用实验 4000 次时的频率 0.3500 更准确；
- ②如果再次做此实验，仍按上表抛掷的次数统计数据，那么在数据表中，“正面向上”的频率有更大的可能仍会在 0.35 附近摆动；
- ③通过上述实验的结果，可以推断这枚纪念币有很大的可能性不是质地均匀的。

其中正确的是__.

16. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，连接 CE ， BE .



- (1) 若 $AE = 4$ ，则 $\triangle ADE$ 面积为_____；
- (2) 若 $BC \perp CE$ ，且 $BE = 4$ ，则 $\triangle ADE$ 面积的最大值为_____.

三、解答题（共 68 分，其中第 17-21、23 题每题 5 分，第 22、24-26 题每题 6 分，第 27-28 题 7 分）

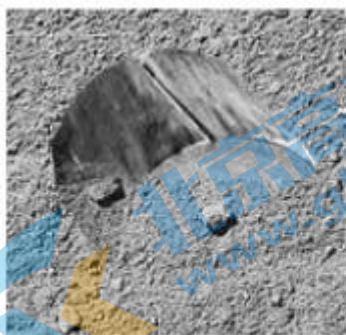
17. 解方程： $2x^2 - 6x + 1 = 0$.

18. 《九章算术》是中国传统数学重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架.《九章算术》中记载：

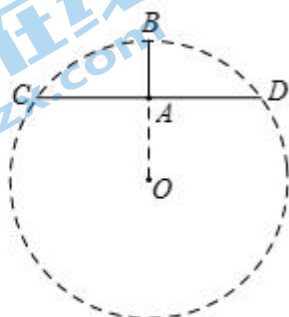
“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺，问径几何？”（如图①）

阅读完这段文字后，小智画出了一个圆柱截面示意图（如图②），其中 $BO \perp CD$ 于点 A ，求问径就是要求 $\odot O$ 的直径.

再次阅读后，发现 $AB = 1$ 寸， $CD = 10$ 寸（一尺等于十寸），通过运用有关知识即可解决这个问题. 请帮助小智求出 $\odot O$ 的直径.



图①



图②

19. 下面是小涵同学设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.

已知：直线 l 及直线 l 外一点 P ，求作：直线 PQ ，使得 $PQ \parallel l$.

小涵同学的作法如下：

- (1) 在直线 l 的下方取一点 O ；
- (2) 以点 O 为圆心， OP 长为半径画圆， $\odot O$ 交直线 l 于点 A 、 B （点 A 在左侧），连接 AP ；
- (3) 以点 B 为圆心， AP 长为半径画圆，交 $\odot O$ 于点 Q 、 R （点 Q 与点 P 位于直线 l 同侧）；
- (4) 作直线 PQ ，所以直线 PQ 即为所求.

P .

_____ l

请你依据小涵同学设计的尺规作图过程，完成下列问题：

- (1) 使用直尺和圆规，完成作图；（保留作图痕迹）
- (2) 完成下面的证明

证明：连接 BP ， BQ ，

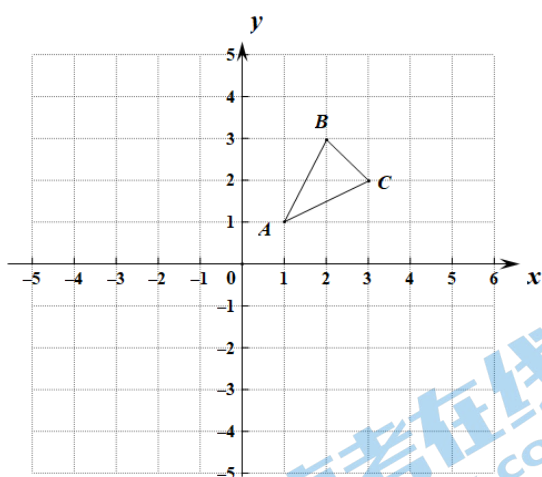
$$\because AP = BQ$$

$$\therefore AP = BQ \text{ () (填推理的依据)}$$

$$\therefore \angle PBA = \angle BPQ \text{ () (填推理的依据)}$$

$$\therefore PQ \parallel l.$$

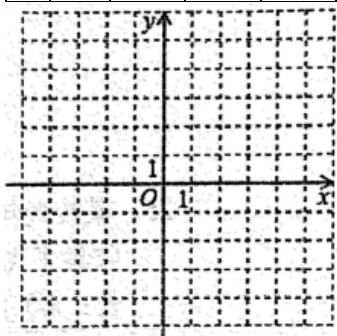
20. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $A(1,1)$ ， $B(2,3)$ ， $C(3,2)$.



- (1) 作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 成中心对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 以点 $(0,-1)$ 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，请画出 $\triangle A_2B_2C_2$ ，并写出点 B 的对应点 B_2 的坐标.

21. 一个二次函数图象上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表所示：

x	$\cdots$	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	-4	-3	0	5	$\cdots$

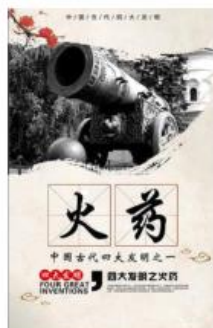


- (1) 求这个二次函数的表达式；
- (2) 在给定的平面直角坐标系中画出这个二次函数的图象；
- (3) 当 $-2 < x < 2$ 时，直接写出 y 的取值范围.

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 4 = 0$.

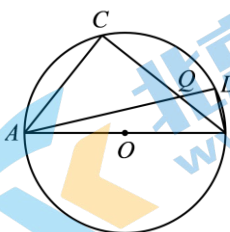
- (1) 当方程有两个实数根时，求 m 的取值范围；
- (2) 在 (1) 的条件下， m 取最小的整数时求方程的解.

23. “四大发明”是指中国古代对世界具有很大影响的四种发明，它是中国古代劳动人民的重要创造，具体指印刷术、造纸术、火药和指南针四项发明. 如图是小沈同学收集到的中国古代四大发明卡片，四张卡片除内容外其余完全相同，将这四张卡片背面朝上，洗匀放好.



- (1) 从这四张卡片中随机抽取一张恰好是“指南针”的概率为_____；
- (2) 从这四张卡片中随机抽取一张（不放回），再从中随机抽取一张. 请用列表或画树状图的方法，求抽到的两张卡片恰好是“印刷术”和“造纸术”的概率.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 是 $\odot O$ 上一点，点 C 是 AD 的中点，连接 AD 、 BD 、 AC 、 BC ， AD 与 BC 交于点 Q .



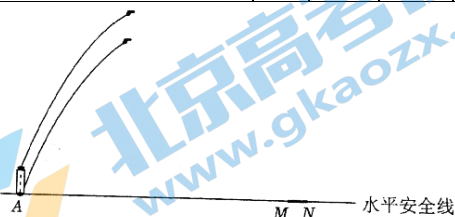
(1) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\angle CBD =$ _____ $^\circ$;

(2) 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 交 AD 于点 P . 求证: P 是线段 AQ 的中点;

(3) 若 $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, $BQ = 7$, 求 CQ 的长.

25. 某校九年级课外科技活动小组的同学们研制了一种航模飞机, 通过实验, 收集了飞机相对于出发点的飞行水平距离 x (单位: m)、飞行高度 y (单位: m) 随飞行时间 t (单位: s) 变化的数据如表.

飞行时间 t/s	0	2	4	6	8	...
飞行水平距离 x/m	0	10	20	30	40	...
飞行高度 y/m	0	18	32	42	48	...



【探究发现】

x 与 t , y 与 t 之间的数量关系可用我们学过的函数来描述.

(1) 直接写出 x 关于 t 的函数解析式和 y 关于 t 的函数解析式 (不要求写出自变量的取值范围).

【问题解决】

如图, 活动小组在水平安全线上 A 处设置一个高度可以变化的发射平台试飞该航模飞机. 根据上面的探究发现解决下列问题.

(2) 若发射平台相对于安全线的高度为 $0m$, 求飞机落到安全线时飞行的水平距离;

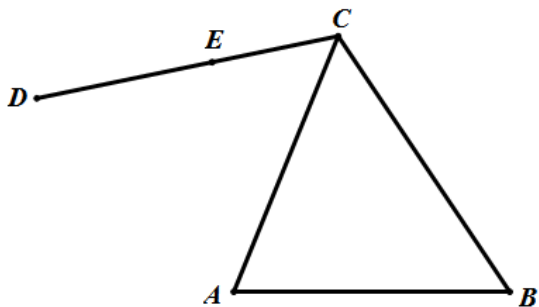
(3) 在安全线上设置回收区域 MN , $AM = 105m$, $MN = 5m$. 若飞机落到 MN 内 (不包括端点 M , N), 求发射平台相对于安全线的高度的变化范围.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $(-2m+1, p)$, (b, q) 是抛物线 $y = mx^2 + 2m^2x + n (m \neq 0)$ 上的点.

(1) 当 $m = 2$ 时, 求抛物线的对称轴, 并直接写出 p 与 n 的大小关系;

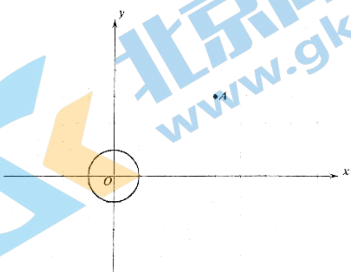
(2) 若对于任意的 $2 \leq b \leq 3$, 都有 $q > n > p$, 求 m 的取值范围.

27. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$. 作点 B 关于直线 AC 的对称点 D , 连接 CD . 在线段 CD 上取一点 E , 连接 EA , 将线段 EA 绕点 E 顺时针旋转 α 度得到线段 EF , 连接 BF 交 AC 于点 M .



- (1) 请你依据题意，补全图形；
- (2) 求 $\angle ACE$ 的度数；(用含有 α 的代数式表示)
- (3) 试判断 BM 和 MF 之间的数量关系，并证明.

28. 对于平面直角坐标系 xOy 内的点 P 和点 Q ，给出如下定义：若满足点 Q 绕点 P 旋转 α 度 ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 后落在半径为 1 的圆 O 上，则称点 Q 是点 P 的关联点. 已知点 A 的坐标为 $(4, 3)$.



- (1) 点 $B_1(4, 0)$ 、 $B_2(-2, 3)$ 、 $B_3(6, -1)$ 中是点 A 的关联点的是_____；
- (2) 点 $(m, 0)$ 是点 A 的关联点，求 m 的取值范围；
- (3) 已知直线 $y = -x + b$ 交坐标轴于 M 、 N 两点，若线段 MN 上的所有点都是点 A 的关联点，直接写出 b 的取值范围.

参考答案

第 I 卷 (选择题 共 16 分)

一、选择题 (共 16 分, 每题 2 分, 以下每题只有一个正确的选项)

1. 【答案】D

【详解】A. 此图形不是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故 A 选项错误, 不符合题意;
B. 此图形是中心对称图形, 也是轴对称图形, 故 B 选项错误, 不符合题意;
C. 此图形不是中心对称图形, 是轴对称图形, 故 C 选项错误, 不符合题意.
D. 此图形是中心对称图形, 不是轴对称图形, 故 D 选项正确, 符合题意;
故选 D.

2. 【答案】B

【分析】直接根据抛物线的顶点坐标式进行解答.

【详解】解: 由抛物线的顶点坐标可知, 抛物线 $y=x^2-1$ 的顶点坐标是 $(0, -1)$.
故选: B.

【点睛】本题考查抛物线的顶点坐标, 即抛物线 $y=(x-k)^2+h$ 中, 其顶点坐标为 (k, h) .

3. 【答案】A

【分析】先利用同角三角恒等式计算出 $\cos B = \frac{3}{5}$, 然后根据 $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$ 求解.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore \sin^2 B + \cos^2 B = 1$,

$$\therefore \cos B = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

故选: A.

【点睛】本题考查了同角三角函数的关系: 熟练掌握同角三角函数之间的关系.

4. 【答案】A

【详解】 $\because x=2$ 是一元二次方程 $x^2 - 2mx + 4 = 0$ 的一个解,
 $\therefore 4 - 4m + 4 = 0$,

$$\therefore m = 2.$$

故选 A.

5. 【答案】D

【分析】根据抛物线的平移规律: 左加右减, 上加下减, 进行判断即可.

【详解】解: 抛物线 $y = -2x^2$ 先向左平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位, 即可得到:

$$y = -2(x+1)^2 - 2;$$

故选 D.

【点睛】本题考查抛物线的平移. 熟练掌握二次函数平移规律是解题的关键.

6. 【答案】B

【分析】将关于 x 的不等式 $ax^2 - bx - c \geq 0$ 变形为 $ax^2 \geq bx + c$, 根据抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = bx + c$ 的两个交点情况可知不等式 $ax^2 \geq bx + c$ 的解集为抛物线的图象在直线图象的上方对应的自变量 x 的取值范围, 即可求解.

【详解】解: 关于 x 的不等式 $ax^2 - bx - c \geq 0$ 变形为 $ax^2 \geq bx + c$,

$\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = bx + c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $ax^2 \geq bx + c$ 的解集为 $x \geq 1$ 或 $x \leq -2$,

即关于 x 的不等式 $ax^2 - bx - c \geq 0$ 的解集为 $x \leq -2$ 或 $x \geq 1$.

故选: B

【点睛】本题主要考查了二次函数与不等式的关系. 借助图象, 利用数形结合思想理解函数与不等式的关系是解题关键.

7. 【答案】C

【分析】本题考查了二次函数图象与系数的关系, 熟知二次函数的图象和系数的关系是解题的关键. 把点 $(1, 0)$ 和点 $(0, -2)$, 分别代入抛物线的解析式即可判断选项 A、C; 利用抛物线的对称轴变形换算即可判断选项 B, 利用一元二次方程根的判别式即可判断选项 D.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 过点 $(1, 0)$ 和点 $(0, -2)$,

$$\therefore a + b + c = 0, \quad c = -2,$$

$$\therefore a + b - 2 = 0, \text{ 即 } a + b = 2, \text{ 故选项 A 正确, 不符合题意;}$$

$\because$ 抛物线的顶点在第三象限,

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore a + b = 2, \text{ 即 } b = 2 - a, \quad a = 2 - b,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{2-a}{2a} < 0,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore 2 - a > 0, \text{ 即 } a < 2,$$

$$\therefore 0 < a < 2,$$

$$\therefore 0 < 2 - b < 2, \text{ 即 } 0 < b < 2, \text{ 故选项 B 正确, 不符合题意;}$$

$$\therefore a - b + c = a - (2 - a) + (-2) = 2a - 4,$$

$$\therefore -4 < 2a - 4 < 0, \text{ 即 } -4 < a - b + c < 0, \text{ 故选项 C 错误, 符合题意;}$$

由函数图象知: $b^2 - 4ac > 0$,

方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$, 中 $\Delta = b^2 - 4a \cdot (c - 3) = b^2 - 4ac + 12a$,

$\therefore a > 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4a \cdot (c - 3) = b^2 - 4ac + 12a > 0$,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 故选项 D 正确, 不符合题意;

故选: C.

8. 【答案】B

【分析】本题主要考查了矩形的性质, 等腰直角三角形的性质与判定, 列函数关系式, 二次函数的定义等等, 先求出 $\angle A = \angle C = 45^\circ$, 再证明 $\triangle PCM$ 是等腰直角三角形, 由此即可得到 y 与 x 成一次函数关系, 再利用 $S = S_{\triangle ABC} - S_{\text{矩形}PMBN}$ 即可得到 S 与 x 成二次函数关系. 正确求出对应的函数关系式是解题的关键.

【详解】解: 设 $AB = m$ (m 为常数),

在 $\triangle PCM$ 中, $\angle C = 45^\circ$, $CM \perp PM$,

$\therefore \triangle PCM$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CM = PM$,

$\therefore$ 四边形 $PMBN$ 是矩形,

$\therefore PN = BM$,

$\therefore x + y = PM + PN = AM + BM = AB = m$, 即 $y = -x + m$,

$\therefore y$ 与 x 成一次函数关系,

$\therefore S = S_{\triangle ABC} - S_{\text{矩形}PMBN} = \frac{1}{2}m^2 - xy = \frac{1}{2}m^2 - x(-x + m) = x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2$,

$\therefore S$ 与 x 成二次函数关系.

故选 B.

第 II 卷 (非选择题 共 84 分)

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 【答案】 $y = x^2 - 2x$ (答案不唯一)

【分析】根据二次函数的图像与性质可以得出各系数的取值范围, 举一例即可.

【详解】解: 图像过原点,

$\therefore$ 可以设解析式为: $y = ax(x - x_1)$,

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore a > 0$, 开口向上, 且对称轴 $x = \frac{x_1}{2} \leq 1$,

即 $x_1 \leq 2$,

$\therefore$ 可以设二次函数为

$y = ax(x - x_1)$, 满足 $a > 0$, $x_1 \leq 2$ 均可.

故答案不唯一，如： $y = x^2 - 2x$.

【点睛】本题考查二次函数的图像与性质，掌握二次函数的图像与各系数间的关系是解题的关键.

10. 【答案】 $y_1 > y_2$

【分析】本题考查了二次函数的性质，根据抛物线开口向下，离对称轴越近， y 值越大，解答即可.

【详解】解：由题意得：对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$,

$\because$ 抛物线开口向下，

$\therefore$ 离对称轴越近， y 值越大，

$\therefore y_1 > y_2$,

故答案为： $y_1 > y_2$.

11. 【答案】7

【详解】设树的高度为 x m，由相似可得 $\frac{x}{2} = \frac{6+15}{6} = \frac{7}{2}$ ，解得 $x = 7$ ，所以树的高度为 7m

12. 【答案】 $(10-2x)(7-2x) = 20$

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，明确题意，准确得到等量关系列出方程，即可求解.

【详解】解：根据题意得： $(10-2x)(7-2x) = 20$,

故答案为： $(10-2x)(7-2x) = 20$.

13. 【答案】 50°

【分析】由旋转可得 $\angle CDE = \angle B = 70^\circ$ ， $\angle CED = \angle BAC = 30^\circ$ ， $CA = CE$ ，则 $\angle CAE = \angle CEA$ ，再由三角形的外角性质可得 $\angle CDE = \angle CAE + \angle AED$ 可求出 $\angle CAE$ 的度数.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle EDC$

$\therefore \angle CDE = \angle B = 70^\circ$ ， $\angle CED = \angle BAC = 30^\circ$ ， $CA = CE$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle CEA$ ，

则 $\angle AED = \angle CEA - 30^\circ$

又 $\because \angle CDE = \angle CAE + \angle AED$

即 $\angle CAE + \angle CAE - 30^\circ = 70^\circ$

解得 $\angle CAE = 50^\circ$

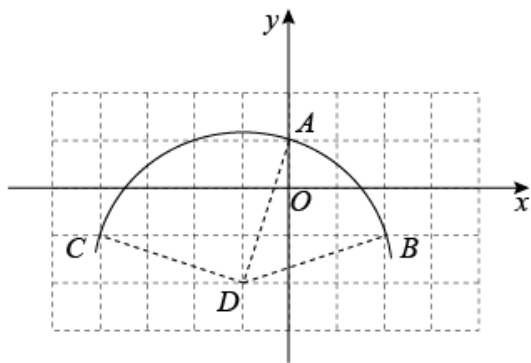
故答案为： 50° .

【点睛】本题考查三角形中的角度计算，解题的关键是利用旋转的性质得到旋转后的角度，并利用三角形的外角性质建立等量关系.

14. 【答案】 $(-1, -2)$

【分析】连接 CB ，作 CB 的垂直平分线，根据勾股定理和半径相等得出点 O 的坐标即可.

【详解】连接 CB ，作 CB 的垂直平分线，如图所示：



在 CB 的垂直平分线上找到一点 D ,

$$CD=DB=DA=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},$$

所以 D 是过 A, B, C 三点的圆的圆心,

即 D 的坐标为 $(-1, -2)$,

故答案为 $(-1, -2)$,

【点睛】本题考查了垂径定理, 关键是根据垂径定理得出圆心位置.

15. 【答案】②③

【分析】随着试验次数的增加, “正面向上”的频率总在 0.35 附近摆动, 显示出一定的稳定性, 可以估计“正面向上”的概率是 0.35, 据此进行判断即可.

【详解】解: ①在用频率估计概率时, 用实验 5000 次时的频率 0.3494 一定比用实验 4000 次时的频率 0.3500 更准确, 错误;

②如果再次做此实验, 仍按上表抛掷的次数统计数据, 那么在数据表中, “正面向上”的频率有更大的可能仍会在 0.35 附近摆动, 正确;

③通过上述实验的结果, 可以推断这枚纪念币有很大的可能性不是质地均匀的, 正确,
故答案为②③.

【点睛】本题考查利用频率估计概率, 解答本题的关键是明确概率的定义, 利用数形结合的思想解答.

16. 【答案】①. $4\sqrt{3}$; ②. $6+4\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}+6$.

【分析】(1) 求出 $\triangle ADE$ 的 AE 边上的高即可求解;

(2) 如图, 连接 BD , 在 AD 的右侧作等边三角形 AMD , 连接 EM 交 AD 于点 O , 连接 BM , 证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), 得 $\angle ABD = \angle ACE = 150^\circ$, 证四边形 $ABDM$ 是菱形, 得 $\angle ABD +$

$\frac{1}{2} \angle AMD = 150^\circ + 30^\circ = 150^\circ$, 从而证 $BM = DM$, 进而利用两点之间, 线段最短即可得

$\sqrt{3}AD \leq 4 + AD$, 当点 E, B, M 三点共线时, 等号成立, 求得当 AD 的最大值为 $2\sqrt{3} + 2$, 即此时 $\triangle ADE$ 的面积最大, 从而即可得解.

【详解】解: (1) 如下图, 过点 D 作 $DH \perp AE$ 于点 H ,

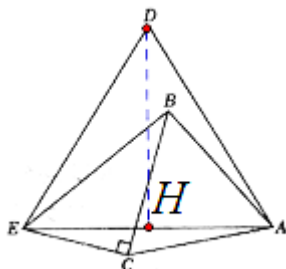
$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore DE = AE = AD = 4, EH = AH = 2,$

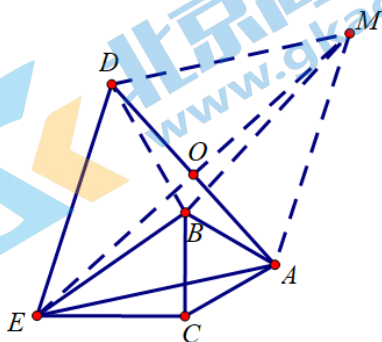
$$\therefore DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

故答案为 $4\sqrt{3}$;



(2) 如图, 连接 BD , 在 AD 的右侧作等边三角形 AMD , 连接 EM 交 AD 于点 O , 连接 BM ,



$\because \triangle ADE$, $\triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AD = AE$, $\angle DAE = \angle DEA = \angle ADE = 60^\circ$, $AB = AC = BC$, $\angle ACB = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle BAE = \angle DAE = 60^\circ$, $\angle CAE + \angle BAE = \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS),

$\therefore DB = CE$, $\angle ABD = \angle ACE$,

$\therefore BC \perp CE$,

$\therefore \angle BCE = 90^\circ$

$\therefore \angle ABD = \angle ACE = \angle BCE + \angle ACB = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$,

$\therefore \triangle ADM$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形,

$\therefore AD = AM = AE = DE = DM$, $\angle AMD = 60^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABDM$ 是菱形, $\angle ABD + \frac{1}{2} \angle AMD = 150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$,

∴点 M 在以点 O 为圆心, DM 为半径的圆上,

∴ $BM = DM$,

∴ 四边形 $ABDM$ 是菱形,

∴ $AD \perp EM$, $\angle OMD = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$, $OE = OM$

∴ $OD = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} DM$,

∴ $OE = OM = \frac{\sqrt{3}}{2} DM = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$,

∴ $AM = 2OM = \sqrt{3}AD$,

∴ 两点之间, 线段最短,

∴ $AM \leq AB + BM$, 即 $\sqrt{3}AD \leq 4 + AD$, 当点 E 、 B 、 M 三点共线时, 等号成立,

∴ $AD \leq 2\sqrt{3} + 2$,

∴ 当 AD 的最大值为 $2\sqrt{3} + 2$, 即此时 $\triangle ADE$ 的面积最大,

∴ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} OE \cdot AD = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (2\sqrt{3} + 2) \times (2\sqrt{3} + 2) = 6 + 4\sqrt{3}$,

∴ $\triangle ADE$ 面积的最大值为 $6 + 4\sqrt{3}$,

故答案为: $6 + 4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 菱形的判定及性质, 熟练掌握等边三角形的性质, 全等三角形的判定与性质, 菱形的性质, 灵活运用角度的计算, 并找到 $\triangle ADE$ 边长最长的情形是解题关键.

三、解答题 (共 68 分, 其中第 17-21、23 题每题 5 分, 第 22、24-26 题每题 6 分, 第 27-28 题 7 分)

17. 【答案】 $x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

【分析】根据公式法即可解出一元二次方程.

【详解】解: 因为 $a = 2$, $b = -6$, $c = 1$,

所以 $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 28$

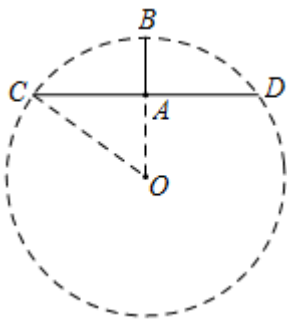
代入公式, 得 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2 \times 2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

所以原方程的根为 $x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$.

18. 【答案】 $\odot O$ 的直径为 26 寸

【分析】连接 OC , 在 $Rt\triangle COA$ 中, 解直角三角形即可解决问题.

【详解】解：连接 OC ，



$\because OB \perp CD$ 垂足为 A ，

$$\therefore CA = \frac{1}{2} CD = 5,$$

设 $CO = x$ ，则 $AO = x - 1$ ，

在 $Rt\triangle AOC$ 中， $\angle CAO = 90^\circ$ ，

$$\therefore OA^2 + CA^2 = OC^2,$$

$$\therefore (x - 1)^2 + 5^2 = x^2,$$

解得 $x = 13$ ，

$\therefore \odot O$ 的直径为 26 寸。

【点睛】本题考查垂径定理、勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，属于中考常考题型。

19. 【答案】(1) 见解析 (2) 在同圆中，等弦所对的弧相等；在同圆中，等弧所对的圆周角相等

【分析】本题主要考查作图复杂作图，圆心角，弧，弦之间的关系等知识。

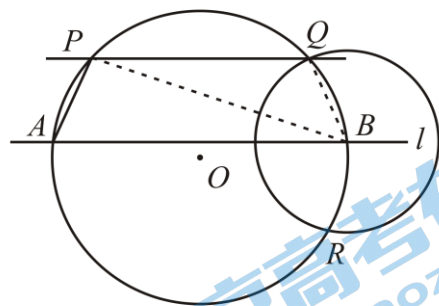
(1) 根据要求作出图形即可；

(2) 由圆心角，弧，弦之间的关系可得 $\angle PBA = \angle BPQ$ ，再利用平行线的判定求解即可。

解题的关键是掌握圆的有关性质和平行线的判定。

【小问 1 详解】

解：如图所示，



【小问 2 详解】

证明：连接 BP ， BQ ，

$$\because AP = BQ,$$

$\therefore AP = BQ$ (在同圆中，等弦所对的弧相等)，

$\therefore \angle PBA = \angle BPQ$ (在同圆中, 等弧所对的圆周角相等),

$\therefore PQ \parallel l$.

故答案为: 在同圆中, 等弦所对的弧相等; 在同圆中, 等弧所对的圆周角相等.

20. 【答案】(1) 作图见解析;

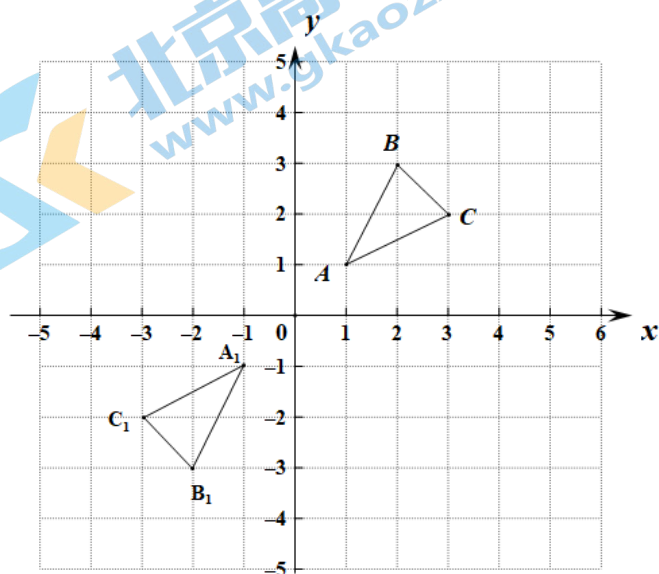
(2) 作图见解析, $B_2(-4, 1)$.

【分析】(1) 根据关于原点对称的点的坐标标出 A_1 、 B_1 、 C_1 , 然后顺次连接即可;

(2) 利用网格特点和旋转的性质画出 A_2 、 B_2 、 C_2 , 并顺次连接即可; 解题的关键是根据图形找到对应点.

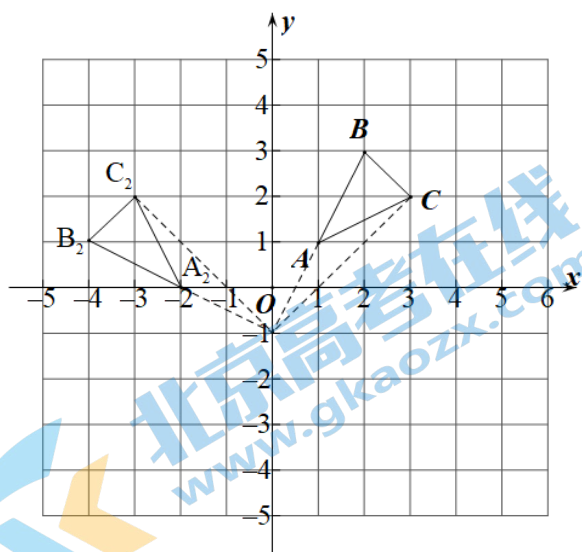
【小问 1 详解】

如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 为所作图形;



【小问 2 详解】

如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 为所作图形, $B_2(-4, 1)$.



21. 【答案】(1) $y = (x-1)^2 - 4$

(2) 见解析 (3) $-3 < y < 5$

【分析】本题考查了用待定系数法求二次函数的解析式以及二次函数的取值范围.

(1) 利用表中数据和抛物线的对称性可得到二次函数的顶点坐标为 $(1, -4)$, 则可设顶点式 $y = a(x-1)^2 - 4$, 然后把点 $(2, -3)$ 代入求出 a 即可;

(2) 利用描点法画二次函数图象;

(3) 根据二次函数的性质, 当 $-2 < x < 2$ 时, 即可写出 y 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 由表中数据和抛物线的对称性可得到二次函数的顶点坐标为 $(1, -4)$, 则可设顶点式

$$y = a(x-1)^2 - 4,$$

把点 $(2, -3)$ 代入, 即 $-3 = a(2-1)^2 - 4$,

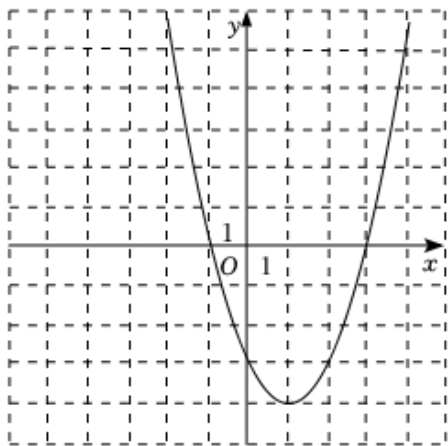
解得: $a = 1$,

故二次函数的表达式为: $y = (x-1)^2 - 4$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 函数图象经过 $(-1, 0), (3, 0)$, 顶点坐标为 $(1, -4)$,

函数图象如图所示,



【小问 3 详解】

解: $\because y = (x-1)^2 - 4, -2 < x < 2$,

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, y 由最大值为: $[(-2)-1]^2 - 4 = 5$,

当 $x = 2$ 时, y 由最小值为: $(2-1)^2 - 4 = -3$,

$\therefore y$ 的取值范围为: $-3 < y < 5$.

22. 【答案】(1) $m \neq 0$ 且 $m \geq -\frac{1}{4}$;

$$(2) x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根。

(1) 根据 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 和 $m \neq 0$ 即可求解；

(2) 把最小的整数 1 代入求解即可。

【小问 1 详解】

解：由题意得： $m \neq 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m \times (-4) = 4 + 16m \geq 0$ ，解得： $m \geq -\frac{1}{4}$ ，

$\therefore m$ 的取值范围是 $m \neq 0$ 且 $m \geq -\frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得： m 的取值范围是 $m \neq 0$ 且 $m \geq -\frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 最小的整数是 1，

$\therefore$ 方程为 $x^2 - 2x - 4 = 0$ ，

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20，$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 1} = 1 \pm \sqrt{5}，$$

解得： $x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$ 。

23. 【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{6}$

【分析】(1) 根据概率公式直接得出答案；

(2) 先列出所有等可能的结果数，两张卡片恰好是“印刷术”和“造纸术”的结果数为 2 种，再根据概率公式求解可得。

【小问 1 详解】

从这四张卡片中随机抽取一张恰好是“指南针”的概率为 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$

【小问 2 详解】

将标有“印刷术、造纸术、火药和指南针”四大发明的四张卡片依次记为 A，B，C，D，列表如下：

	A	B	C	D
A		(A,B)	(A,C)	(A,D)
B	(B,A)		(B,C)	(B,D)
C	(C,A)	(C,B)		(C,D)
D	(D,A)	(D,B)	(D,C)	

由列表可知，共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到 A，B 两张卡片的结果有 2 种.

$$\therefore P(\text{抽到的两张卡片恰好是“印刷术”和“造纸术”}) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

【点睛】此题考查了用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

24. 【答案】(1) 30 (2) 见解析

(3) $CQ = 9$

【分析】(1) 由“直径所对的圆周角为直角”可得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，进而可得 $\angle ABC = 30^\circ$ ，由题意可得 $AC = CD$ ，由“在同圆中，等弧所对的圆周角相等”可得 $\angle ABC = \angle CBD = 30^\circ$ ，即可求解；

(2) 由“在同圆中，等弧所对的圆周角相等”可得 $\angle ABC = \angle CBD = \angle CAD$ ，再利用角直角的互余 $\angle ACH = \angle CBA = \angle CAD$ ， $\angle CQA = \angle BCH = \angle CAB$ ，进而可得 $PA = PC = PQ$ ，即可证得结论；

(3) 由 (2) 可得： $\angle CQA = \angle BCH = \angle CAB$ ，由 $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ ，可知 $\cos \angle CQA = \frac{3}{5}$ ，设 $CQ = x$ ，则 $BC = CQ + BQ = x + 7$ ，解直角三角形得 $AQ = \frac{5}{3}x$ ， $AC = \frac{4}{3}x$ ，根据 $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ ，得

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \text{ 则 } \frac{x+7}{\frac{4}{3}x} = \frac{4}{3}, \text{ 求出 } x \text{ 即可.}$$

【小问 1 详解】

解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$\because$ 点 C 是 AD 的中点，

$$\therefore AC = CD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CBD = 30^\circ,$$

故答案为：30；

【小问2详解】

证明：∵点C是AD的中点，

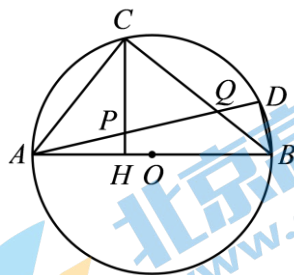
$$\therefore AC = CD, CD = CD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CBD, \angle CBD = \angle CAD,$$

$$\text{即：} \angle ABC = \angle CBD = \angle CAD,$$

∵AB是⊙O的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \text{则 } \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ, \angle CAD + \angle CQA = 90^\circ,$$



$$\therefore CH \perp AB,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ACH = 90^\circ, \angle ABC + \angle BCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle CBA = \angle CAD, \angle CQA = \angle BCH = \angle CAB,$$

$$\therefore PA = PC, PC = PQ,$$

$$\therefore PA = PQ,$$

∴P是线段AQ的中点；

【小问3详解】

由(2)可得： $\angle CQA = \angle BCH = \angle CAB$,

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{3}{5}, BQ = 7,$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \cos \angle CQA = \frac{3}{5},$$

$$\text{设 } CQ = x, \text{ 则 } BC = CQ + BQ = x + 7, AQ = \frac{CQ}{\cos \angle CQA} = \frac{5}{3}x,$$

$$\text{由勾股定理可得：} AC = \sqrt{AQ^2 - CQ^2} = \frac{4}{3}x,$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{3}{5} = \frac{AC}{AB}, \text{ 令 } AC = 3a, AB = 5a, \text{ 则 } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4a,$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3},$$

$$\text{则 } \frac{x+7}{\frac{4}{3}x} = \frac{4}{3}, \text{ 解得：} x = 9,$$

$$\therefore CQ = 9.$$

【点睛】本题考查了勾股定理，圆心角，弧，弦之间的关系，圆周角定理，等腰三角形的性质和判定的应用，解直角三角形，由圆心角，弧，弦之间的关系、圆周角定理及直角三角形两锐角互余得 $\angle ACH = \angle CBA = \angle CAD$ ， $\angle CQA = \angle BCH = \angle CAB$ ，是解决问题的关键。

25. 【答案】(1) $x = 5t$, $y = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$; (2) 飞机落到安全线时飞行的水平距离为100m; (3) 发射平台相对于安全线的高度的变化范围是大于10.5m且小于22m.

【分析】(1) 根据待定系数法求解即可;

(2) 令二次函数 $y = 0$ 代入函数解析式即可求解;

(3) 设发射平台相对于安全线的高度为 nm , 则飞机相对于安全线的飞行高度 $y' = -\frac{1}{2}t^2 + 12t + n$. 结合 $25 < t < 26$, 即可求解;

【详解】解: (1) 探究发现: x 与 t 是正比例函数关系, y 与 t 是二次函数关系,

设 $x = kt$,

$$\text{由题意得: } 10 = 2k, \begin{cases} 4a + 2b = 18 \\ 16a + 4b = 32 \end{cases},$$

$$\text{解得: } k = 5, a = -\frac{1}{2}, b = 10,$$

$$\therefore x = 5t, y = -\frac{1}{2}t^2 + 10t.$$

$$(2) \text{ 由 } y = -\frac{1}{2}t^2 + 10t, \text{ 令 } y = 0 \text{ 得 } -\frac{1}{2}t^2 + 10t = 0.$$

$$\text{解得, } t_1 = 0 \text{ (舍)}, t_2 = 20,$$

$$\text{当 } t = 20 \text{ 时, } x = 100.$$

答: 飞机落到安全线时飞行的水平距离为100m.

$$(3) \text{ 设发射平台相对于安全线的高度为 } nm, \text{ 飞机相对于安全线的飞行高度 } y' = -\frac{1}{2}t^2 + 10t + n.$$

$$\because AM = 105m, MN = 5m$$

$$\therefore 105 < x < 110,$$

$$\therefore 105 < 5t < 110,$$

$$\therefore 21 < t < 22,$$

$$\text{在 } y' = -\frac{1}{2}t^2 + 10t + n \text{ 中,}$$

$$\text{当 } t = 21 \text{ 时, 令 } y' = -\frac{1}{2} \times 21^2 + 10 \times 21 + n = 0, \text{ 解得 } n = 10.5;$$

当 $t = 22$ 时, 令 $y' = -\frac{1}{2} \times 22^2 + 10 \times 22 + n = 0$, 解得 $n = 22$.

$\therefore 10.5 < n < 22$.

答: 发射平台相对于安全线的高度的变化范围是大于 10.5m 且小于 22m .

【点睛】本题考查了一次函数与二次函数的应用, 利用待定系数法求函数的解析式以及不等式的应用, 关键是把实际问题分析转变成数学模型.

26. 【答案】(1) $p < n$

(2) m 的取值范围是 $m > \frac{1}{2}$ 或 $m \leq -\frac{3}{2}$;

【分析】(1) 根据题意先求出对称轴, 再根据抛物线开口向上, 离对称轴越近, y 值越小, 即可判断;

(2) 分两种情况讨论: 当 $m > 0$ 时, 当 $m < 0$ 时, 画出图形根据对于任意的 $2 \leq b \leq 3$, 都有 $q > n > p$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 当 $m = 2$ 时, $y = 2x^2 + 8x + n$,

$\therefore (-2m+1, p)$ 为 $(-3, p)$, 对称轴为 $x = -\frac{8}{4} = -2$,

当 $x = 0$ 时, $y = n$,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore$ 离对称轴越近, y 值越小,

$\therefore p < n$;

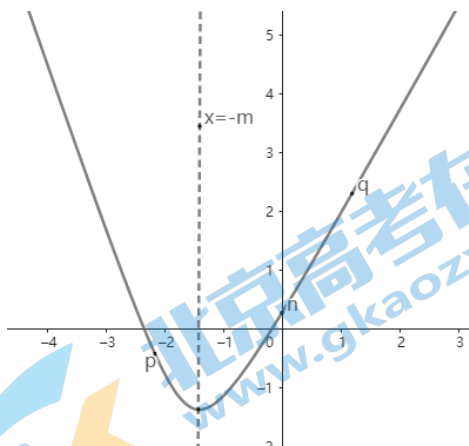
【小问 2 详解】

解: 由题意得: 对称轴 $x = -\frac{2m^2}{2m} = -m$,

当 $x = 0$ 时, $y = n$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点为 $(0, n)$,

当 $m > 0$ 时, 如图,

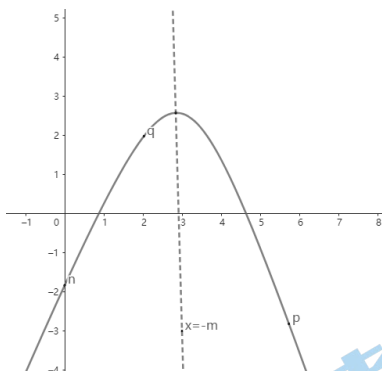


$\therefore (0, n)$ 关于对称轴 $x = -m$ 的对称点是 $(-2m, n)$,

若对于任意的 $2 \leq b \leq 3$ ，都有 $q > n > p$ ，

则 $-2m < -2m + 1 < 0$ ，解得： $m > \frac{1}{2}$ ；

当 $m < 0$ 时，如图，



$\because (0, n)$ 关于对称轴 $x = -m$ 的对称点是 $(-2m, n)$ ，

若对于任意的 $2 \leq b \leq 3$ ，都有 $q > n > p$ ，

则 $-2m \geq 3$ ，解得： $m \leq -\frac{3}{2}$ ，

综上， m 的取值范围是 $m > \frac{1}{2}$ 或 $m \leq -\frac{3}{2}$ ；

【点睛】本题考查二次函数的图象和性质，掌握数形结合是关键。

27. 【答案】(1) 作图见详解

(2) $\angle ACE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

(3) $BM = MF$ ，证明见详解

【分析】(1) 根据题意作图即可；

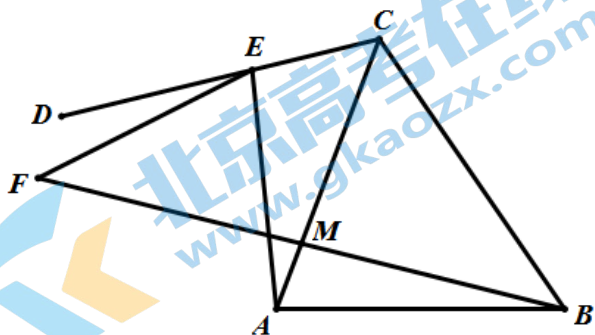
(2) 根据作对称图形可得 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，再根据等腰三角形的性质即可求解；

(3) 根据作图可得等腰三角形，由等腰三角形的性质即可求解；

本题主要考查轴对称的性质，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，掌握以上知识是解题的关键。

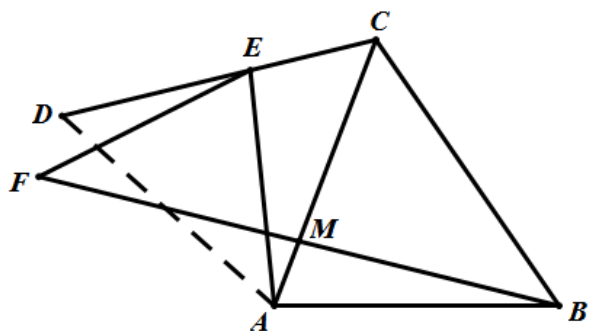
【小问 1 详解】

解：根据题意作图如下，



【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 AD ，



$\because$ 点 B 关于直线 AC 的对称点 D ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle ACD$ ，

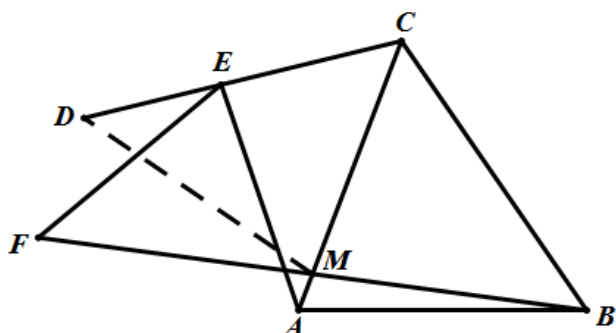
在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，

$\therefore \angle ACD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，即 $\angle ACE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ 。

【小问 3 详解】

解：如图所示，连接 DM ，



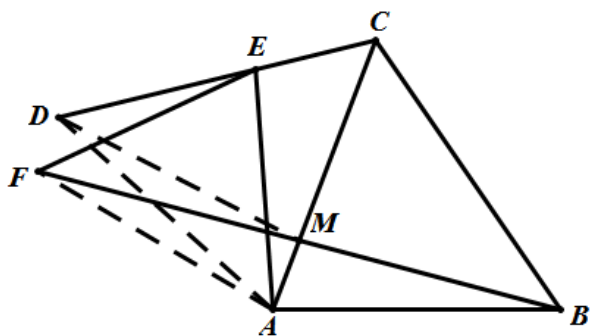
在 $\triangle CBM, \triangle CDM$ 中，

$$\begin{cases} CD = CB \\ \angle DCM = \angle BCM, \\ CM = CM \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBM \cong \triangle CDM$ (SAS)，

$\therefore BM = DM$ ，

如图所示，连接 AD, AF ，



∵ 线段 EA 绕点 E 顺时针旋转 α 度得到线段 EF ,

∴ $EF = EA, \angle AEF = \alpha$, 即 $\triangle AEF$ 是等腰三角形, 且 $\triangle ACD$ 是等腰三角形,

∴ $DM = FM$,

∴ $BM = MF$.

28. 【答案】(1) B_2, B_3 是点 A 的关联点;

(2) $4 - \sqrt{7} \leq m \leq 4 + \sqrt{7}$;

(3) 见解析

【分析】(1) 点 $B_1(4,0)$ 、 $B_2(-2,3)$ 、 $B_3(6,-1)$ 旋转 α 度 ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 后落在半径为 1 的圆 O 上, 称为点 A 的关联点, 则要求这三个点到 A 的距离 $\geq$ 点 A 到圆 O 的距离即可;

(2) 根据 $(m,0)$ 到 A 的距离 $\geq$ 点 A 到圆 O 的距离列式求解即可;

(3) 先根据题意画出图形, 求出点 A 到直线 $y = -x + b$ 的距离, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: 点 $B_1(4,0)$ 、 $B_2(-2,3)$ 、 $B_3(6,-1)$ 旋转 α 度 ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) 后落在半径为 1 的圆 O 上, 称为点 A 的关联点, 则 $OA+1 \geq$ 这三个点到 A 的距离 $\geq OA-1$,

∴ $A(4,3)$,

∴ $AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

∴ $OA-1=4$, $OA+1=6$, 即 $4 \leq$ 这三个点到 A 的距离 ≤ 6 ,

∴ $AB_1=3$, $AB_2=6$, $AB_3 = \sqrt{(4-6)^2 + [3-(-1)]^2} = 2\sqrt{5}$,

∴ B_2, B_3 是点 A 的关联点;

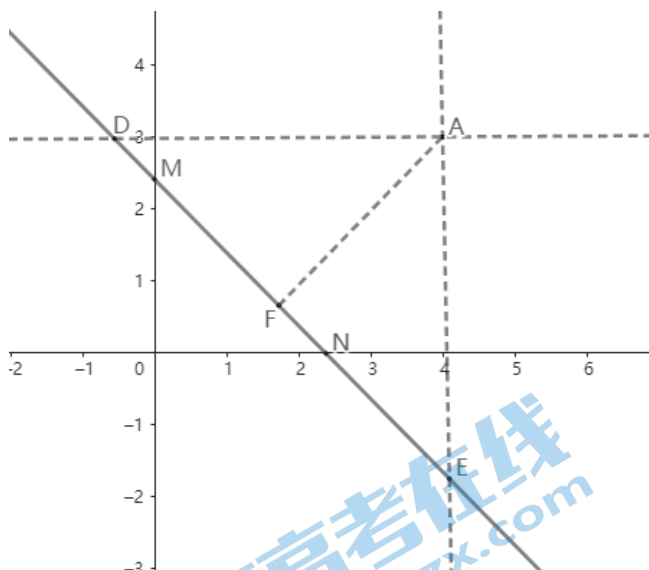
【小问 2 详解】

解: ∵ 点 $(m,0)$ 是点 A 的关联点, $A(4,3)$,

∴ $\begin{cases} \sqrt{(4-m)^2 + (3-0)^2} \geq 4 \\ \sqrt{(4-m)^2 + (3-0)^2} \leq 6 \end{cases}$, 解得: $4 - \sqrt{7} \leq m \leq 4 + \sqrt{7}$;

【小问 3 详解】

解：过点 A 向 y 轴垂线，与 $y = -x + b$ 相交于点 D ，过点 A 向 x 轴垂线，与 $y = -x + b$ 相交于点 E ，如图，



$$\therefore A(4, 3),$$

当 $x = 4$ 时， $y = -4 + b$ ，当 $y = 3$ 时， $x = b - 3$ ，

$$\therefore D(b-3, 3), E(4, -4+b),$$

$$\therefore AD = |4 - (b-3)| = |7-b|, AE = |3 - (-4+b)| = |7-b|,$$

$$DE = \sqrt{(b-3-4)^2 + [3 - (-4+b)]^2} = \sqrt{2}|7-b|,$$

$$\therefore AD \times AE = DE \times AF,$$

$$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2}|7-b|,$$

$\therefore$ 线段 MN 上的所有点都是点 A 的关联点，

$\therefore$ 线段 MN 上的所有点到 A 的距离 $\geq$ 点 A 到圆 O 的距离，

$$\therefore 4 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|7-b| \leq 6,$$

当 $b \geq 7$ 时，解得： $4\sqrt{2} + 7 \leq b \leq 7 + 6\sqrt{2}$ ，

当 $b < 7$ 时，解得： $7 - 6\sqrt{2} < b < 7 - 4\sqrt{2}$ ；

【点睛】本题考查一次函数综合应用，解题关键是理解题意，数形结合通过构造线段长度作差求解。

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题 &答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

