

鄂南高中 黄冈中学 黄石二中 荆州中学 龙泉中学
武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学
2024届高三湖北十一校第一次联考

数学试题

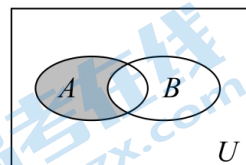
命题学校：龙泉中学 命题人：张建军 审题人：郑胜

一、选择题：本大题共8小题，每一小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合 $A = \{x \in N | x < 5\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ ，

则图中阴影部分所表示的集合为

- A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{0, 4\}$ D. $\{2, 4, 6\}$



第1题图

2. 已知复数 z 在复平面内的对应点为 $(1, 1)$ ，则 $z + \frac{1}{z}$ 的虚部为

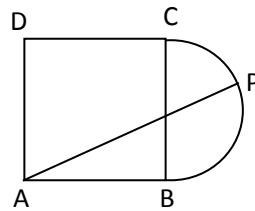
- A. $\frac{1}{2}i$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}i$

3. 已知 $x \in R$ ，则“ $x^3 > 8$ ”是“ $|x| > 2$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 某地投资 a 亿元进行基础建设， t 年后产生的社会经济效益为 $f(t) = ae^{kt}$ 亿元，若该地投资基础建设4年后产生的社会经济效益是投资额的2倍，且再过 t_1 年，该项投资产生的社会经济效益是投资额的8倍，则 $t_1 =$

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 16



第5题图

5. 如图，ABCD 是边长 2 的正方形，P 为半圆弧 BC 上的动点（含端点）则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的取值范围为

- A. $[2, 6]$ B. $[2, 3]$ C. $[4, 6]$ D. $[4, 8]$

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - e^x + e^{-x}$ ，则关于 x 的不等式 $f(x^2 - 4) + f(3x) < 0$ 的解集为

- A. $(-4, 1)$ B. $(-1, 4)$ C. $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ D. $[-1, 4]$

7. 从集合 $S = \{x \in N | 1 \leq x \leq 10\}$ 中任取 3 个不同的数，它们的和能被 3 整除的概率为

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{41}{120}$ D. $\frac{7}{20}$

8. $f(x) = 2e^x - 5x^2$ 的零点的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 国际跳水比赛一共有八个评委现场打分，若八位评委给某个选手的打分分别为 $x_1, x_2, \dots, x_8$ ，记这组数据的平均分，中位数，方差，极差分别为 $\bar{x}, z, s^2, j$ ，去掉这组数据的一个最高分和一个最低分后，其平均数，中位数，方差，极差分别为 $\bar{x}', z', (s')^2, j'$ ，则下列判断中一定正确的是

- A. $\bar{x} \leq \bar{x}'$ B. $z = z'$ C. $(s')^2 \leq s^2$ D. $j' \leq j$

10. 在平面直角坐标系中，已知角 α 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $(-\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3})$ ， $f(x) = \cos \alpha \sin 2x - \sin \alpha \cos 2x$ 则下列结论正确的是

A. $1 - \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$

B. $x = \frac{2\pi}{3}$ 是 $y = f(x)$ 的一条对称轴

C. 将函数 $y = f(x)$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度，所得到的函数解析式为 $y = \sin 2x$

D. $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{4\pi}{3})$ 内恰有 3 个零点

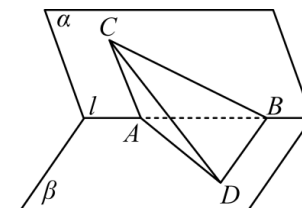
11. 如图，已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上有 A, B 两点， $C \in \alpha$ ， $AC \perp l$ ， $D \in \beta$ ， $BD \perp l$ ，且 $AC = AB = BD = 1$ ，则下列说法正确的是

A. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$

B. 当二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 60° 时， CD 与平面 β 所成的角为 30°

C. 若 $CD = \sqrt{3}$ ，则四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{12}$

D. 若 $CD = \sqrt{2}$ ，则二面角 $C - BD - A$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$



第11题图

12. 如图，双曲线 $C: x^2 - y^2 = a^2$ 的左右顶点为 A, B ， P 为 C 右支上一点（不包含顶点），

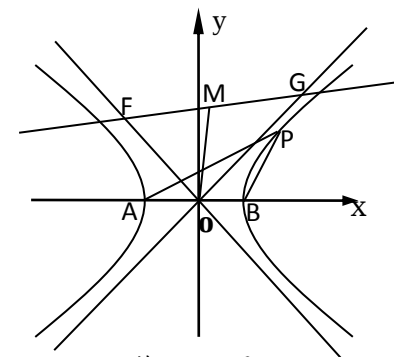
$\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta, \angle APB = \gamma$ ，直线 l 与 C 的渐近线交于 F, G ， M 为线段 FG 的中点，则

A. 双曲线 C 的离心率为 $e = \sqrt{2}$

B. P 到两条渐近线的距离之积为 a^2

C. $\tan \alpha + \tan \beta + 2 \tan \gamma = 0$

D. 若直线 l 与 OM 的斜率分别为 k_1, k_2 ，则 $k_1 k_2 = 1$



第12题图

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. $(2x-1)^5$ 展开式中 x^2 项的系数是_____.

14. 已知 $x, y > 0, x+4y-xy+5=0$ ，则 xy 的最小值为_____.

15. 已知 F 是抛物线 C: $y^2 = 8x$ 的焦点，过抛物线 C 上一点 M 作其准线的垂线，垂足为 N, 若 $\angle NFM = \frac{\pi}{3}$ ，
则 M 点的横坐标为_____.

16. 对 $\forall x_1, x_2$ ，当 $1 < x_1 < x_2 < e$ 时 $(\frac{x_2}{x_1})^{x_1 x_2} - \frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}} < 0$ ，则 a 的范围为_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 a, b, c 分别是三角形三个内角 A, B, C 的对边，已知 $a = 5, \sin A = \frac{3}{5}, B - A = \frac{\pi}{2}$ ，

- (I) 求 $\cos C$ 的值；
(II) 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分)

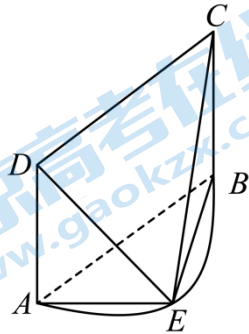
已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差 $d \neq 0$ ， $\{a_n\}$ 中的部分项 $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}$ 恰为等比数列，且公比为 q ，
若 $k_1 = 1, k_2 = 6, k_3 = 16$

- (I) 求 q ； (II) 求数列 $\{k_n\}$ 的通项公式及其前 n 项之和.

19. (12 分)

如图，平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE ，点 E 为半圆弧 AB 上异于 A, B 的点，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4BC$ ，
设平面 ABE 与平面 CDE 的交线为 l .

- (I) 证明： $l \parallel$ 平面 $ABCD$ ；
(II) 当 l 与半圆弧 AB 相切时，求平面 ADE 与平面 CDE 的夹角的余弦值.



20. (12 分)

如图，某人设计了一个类似于高尔顿板的实验：将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的中间入口处，小球将自由下落，小球在下落的过程中，将 3 次遇到黑色障碍物，已知小球每次遇到黑色障碍物时，向左、右两边下落的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，最后落入 A 袋或 B 袋中. 一次游戏中小球落入 A 袋记 1 分，落入 B 袋记 2 分，游戏可以重复进行. 游戏过程中累计得 n 分的概率为 P_n .

- (I) 求 P_1, P_2, P_3 .
(II) 写出 P_n 与 P_{n-1} 之间的递推关系，并求出 P_n 的通项公式.



21. (12 分) 设动圆 M 与圆 $F_1: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 外切，与圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = \frac{49}{4}$ 内切.

- (I) 求点 M 的轨迹 C 的方程；
(II) 过点 F_2 且不与 x 轴垂直的直线 l 交轨迹 C 于 A, B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 A' ，Q 为 $\triangle AA'B$ 的外心，试探究 $\frac{|QF_2|}{|AB|}$ 是否为定值，若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(mx)$ ， m 是大于 0 的常数. 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l ，
 l 在 x 轴上的截距为 x_2 ， $x_2 > 0$

- (I) 当 $x_1 = \frac{1}{e}, m = 1$ 时求切线 l 的方程；
(II) 证明： $\left|x_1 - \frac{1}{m}\right| \geq \left|x_2 - \frac{1}{m}\right|$.