2023 北京三十五中高二（下）期中

数　学

2023.04

试卷说明:试卷分值共 150 分，考试时间 120 分钟.包括 3 个大题，共 21 个小题.

一.选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分.每小题只有一个正确选项，请选择正确答案填在机读卡相应的题号处）

1. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$，则 z 在复平面内对应的点在（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，公差 $d=2$，则 a_8 等于（　）

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 16

3. 在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^4 的系数为

A. 5　　B. -5　　C. 10　　D. -10

4. （2017. 唐山市二模）已知甲在上班途中要经过两个路口，在第一个路口遇到红灯的概率为 0. 5，两个路口连续遇到红灯的概率为 0. 4，则甲在第一个路口遇到红灯的条件下，第二个路口遇到红灯的概率是

A. 0. 6　　B. 0. 7　　C. 0. 8　　D. 0. 9

5. 下列求导运算正确的是（　）

A. $(\sin x)'=-\cos x$　　B. $\left(\frac{1}{x}\right)'=\ln x$

C. $(a^x)'=xa^{x-1}$　　D. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

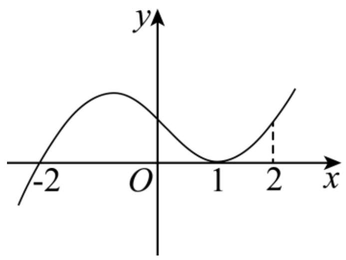
6. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，则 $a_{2023}=$（　）

A. -3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 2

7. 函数 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的最小值为（　）

A. $\frac{\pi}{4}-1$　　B. 0　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}$

8. 下图是函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象，给出下列命题:



①-2是函数$y=f\left(x\right)$的极值点；

②1是函数$y=f\left(x\right)$的极值点；

③$y=f\left(x\right)$在$x=0$处切线的斜率小于零；

④$y=f\left(x\right)$在区间$\left(-2,2\right)$上单调递增.

则正确的命题序号是（　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

9. 袋子中有四张卡片，分别写有“中、华、文、明”四个字，有放回地每次从中任取一张卡片，共取三次．将三次抽取后“中，华”两个字都取到记为事件A，用随机模拟的方法估计事件A发生的概率．利用电脑随机产生0，1，2，3四个随机数，分别代表“中、华、文、明”这四个字，以每三个随机数为一组，表示取卡片三次的结果，经随机模拟产生了以下18组随机数：

232	321	230	023	123	021	132	220	001
231	130	133	231	031	320	122	103	233

由此可以估计事件A发生的概率为（　）

A. $\frac{7}{18}$　　B. $\frac{5}{18}$　　C. $\frac{2}{9}$　　D. $\frac{1}{9}$

10. 已知$f(x)$是定义在R上的可导函数．若函数$F(x)=xf(x)$，满足$F'(x)>0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则下面四个结论中，所有正确结论的序号是

① $f(1)+f(-1)>0$；

② $f(x)\geq0$对$x\in\mathbf{R}$成立；

③ $f(x)$可能是奇函数；

④ $f(x)$一定没有极值点.

A. ①，②　　B. ①，③　　C. ①，②，③　　D. ②，③，④

二、填空题（共6个小题，每题5分，共30分.请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

11. 已知$f\left(x\right)=\ln\left(2x+1\right)$，则$f'(1)=$____________.

12. 在一段时间内，甲去博物馆的概率为0.8，乙去博物馆的概率为0.7，且甲乙两人各自行动.则在这段时间内，甲乙两人至少有一人去博物馆的概率是__________.

13. 函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$的单调增区间为____________，极值点是____________.

14. 已知在数列$\{a_n\}$前 n 项和$S_n=n^2-n$，则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$____________.

15. 已知函数 $f\quad x=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2x+3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，则实数a的取值范围是

________________.

16. 在新冠核酸检测中，常用的是单管检测法和“10 混 1”检测法.单管检测法，就是对每个被检测人取一管检测样本单独检测，直接能得到被检测人的检测结果是阴性或者阳性.优点是准确，交叉感染风险低，缺点是检测费用高.“10 混 1 检测法”，即将 10 个人的检测样本合并在一个试管中混合均匀后进行一次检测，若检测结果为阴性，则可以确定所有被检测人该次检测都是阴性；若检测结果为阳性，则还需要对本组每个被检测人再次做单管检测，以确定每位参与检测成员的最终检测结果.优点是在阳性人员较少时检测费用低，省时省力.缺点是阳性人员较多时交叉感染风险高，同管人员有阳性时需二次检测.假设每次检测结果准确.

（1）现对 20 人进行核酸检测，将他们随机分成甲乙两组，每组 10 人，且对每组都分别采用“10 混 1”检测法进行检测.假设20人中只有2人感染新冠病毒，则感染新冠病毒的2人分在同一组的概率为____________.

（2）现准备对 10 人进行核酸检测，已知每人核酸阳性的概率为 0.1，且检测结果互不影响.若采用“10 混 1”检测法检测，检测次数的平均值为 m；若采用单管检测法，检测次数为 n，则 m________n（填>，=，<）

（可能会用到的数据 $0.9^{10}\approx 0.35$）

三、解答题（共 6 个小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

17. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=2$，$S_5=30$.等比数列$\{b_n\}$满足$a_3+b_3=8$，且公比为$q=2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求b_5的值；

（3）求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

18. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

（1）求 $f(x)$的单调区间；

（2）求 $f(x)$在区间$[-3,3]$上的最大值和最小值.

（3）若方程 $f(x)=k$ 有三个根，写出 k 的取值范围（无需解答过程）.

19. 流行性感冒多由病毒引起，据调查，空气月平均相对湿度过大或过小时，都有利于一些病毒繁殖和传播.科学测定，当空气月平均相对湿度大于 65%或小于 40%时，有利于病毒繁殖和传播下表记录了某年甲、乙两个城市 12 个月的空气月平均相对湿度..

	第一季度			第二季度			第三季度			第四季度		
	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11	12 月

											月	
甲地	54%	39%	46%	54%	56%	67%	64%	66%	78%	72%	72%	59%
乙地	38%	34%	31%	42%	54%	66%	69%	65%	62%	70%	a%	b%

（I）从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，求该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率；

（II）从上表第一季度和第二季度的 6 个月中随机取出 2 个月，记这 2 个月中甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份的个数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（III）若 $a+b=108$，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为 M，求 M 的最大值和最小值.（只需写出结论）

20. 已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in R)$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 的在点 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（III）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

（I）求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

（II）求证：当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)>-\dfrac{1}{2}x^2+1$；

（III）当 $x>0$ 时，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在曲线 $y=ax^2+1$ 的上方，求实数 a 的取值范围.

22. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足以下两个条件，则称该数列为 τ 数列.

①$a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$|a_n-2|=|a_{n-1}+2|$；

②若存在某一项 $a_m\leq -5$，则存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，使得 $a_k=a_m+4$（$m\geq 2$ 且 $m\in\mathbf{N}^*$）.

（1）若 $a_2<0$，写出所有 τ 数列的前四项；

（2）若 $a_2>0$，判断 τ 数列是否为等差数列，请说明理由；

（3）在所有的 τ 数列中，求满足 $a_m=-2021$ 的 m 的最小值.

参考答案

一.选择题（共 10 个小题，每题 4 分，共 40 分.每小题只有一个正确选项，请选择正确答案填在机读卡相应的题号处）

1.【答案】A

【解析】

【分析】根据除法计算复数 z，再根据几何意义判断选项.

【详解】$z=\dfrac{2+i}{1-i}=\dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+3i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$，

复数 z 在复平面内对应的点是 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，在第一象限.

故选：A

2.【答案】C

【解析】

【分析】

利用等差数列的通项公式计算即可.

【详解】$a_8=a_1+7d=1+7\times 2=15$，

故选：C.

【点睛】本题考查等差数列的通项公式，属容易题，等差数列的通项公式是：$a_n=a_1+(n-1)d$.

3.【答案】D

【解析】

【分析】

根据二项式定理计算即可.

【详解】解：在 $(x-2)^5$ 的展开式中 x^4 的项为 $C_5^1\cdot x^4\times(-2)^1=-10x^4$，$x^4$ 的系数为-10，

故选：D.

4.【答案】C

【解析】

【分析】由题意可知 P（A）=0.5，P（AB）=0.4，利用条件概率公式可求得 P（B ∣ A）的值.

【详解】设第一个路口遇到红灯的事件为 A，第二个路口遇到红灯的事件为 B，

则 P（A）=0.5，P（AB）=0.4，

则 P（B ∣ A）$=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$=0.8，

故选 C.

【点睛】本题考查的是条件概率. 条件概率一般有两种求解方法：(1) 定义法：先求 $P(A)$ 和 $P(AB)$，再由

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，求 $P(B|A)$．(2)基本事件法：借助古典概型概率公式，先求事件 A 包含的基本事件数 $n(A)$，再求事件 AB 所包含的基本事件数 $n(AB)$，得 $P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}$．

5.【答案】D

【解析】

【分析】利用常见函数的导数对选项分别求导即可.

【详解】对于 A 选项，$(\sin x)'=\cos x$，A 选项错误；

对于 B 选项，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$，B 选项错误；

对于 C 选项，$(a^x)'=a^x\ln a$，C 选项错误；

对于 D 选项，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，D 选项正确.

故选：D

6.【答案】C

【解析】

【分析】根据数列的递推关系式，推断出数列$\{a_n\}$是周期为 4 的数列，从而可得 a_{2023} 的值.

【详解】数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，所以 $a_2=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}=\dfrac{1+2}{1-2}=-3$，$a_3=\dfrac{1+a_2}{1-a_2}=\dfrac{1-3}{1+3}=-\dfrac{1}{2}$，

$$a_4=\frac{1+a_3}{1-a_3}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$a_5=\frac{1+a_4}{1-a_4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2=a_1,\quad a_6=\frac{1+a_5}{1-a_5}=\frac{1+2}{1-2}=-3=a_2,\ \ldots\ldots$$

所以数列$\{a_n\}$是周期为 4 的数列，则 $a_{2023}=a_{505\times4+3}=a_3=-\dfrac{1}{2}$.

故选：C

7.【答案】A

【解析】

【分析】利用导数求函数的最小值即可.

【详解】$\because f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$，$x\in[0,\pi]$，

$\therefore f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{\pi}{4}$，

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)<0$，当 $\frac{\pi}{4}<x<\pi$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上单调递减，在 $[\frac{\pi}{4},\pi]$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)_{\min}=f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-1$.

故选：A

8.【答案】C

【解析】

【分析】利用函数极值点的定义可判断命题①②的正误；利用导数的几何意义可判断命题③的正误；利用函数的单调性与导数的关系可判断命题④的正误.

【详解】根据导函数图象可知当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)<0$，在 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$f'(x)\geq 0$，

则函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $y=f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 上单调递增，即④正确；

而在 $x=-2$ 处 $f'(-2)=0$，左侧单调递减，右侧单调递增，则 -2 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点，故①正确；

$\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore 1$ 不是函数 $y=f(x)$ 极值点，故②不正确；

$\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数大于 0，$\therefore y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线的斜率大于零，故③不正确.

故选：C

9.【答案】B

【解析】

【分析】找出 18 组随机数中 0，1 都抽到的个数，利用概率公式即可求解.

【详解】由题意可得：18 组随机数中，表示事件 A 发生即 0，1 取到的有 021、001、130、031、103 共 5 个，所以事件 A 发生的概率为 $\frac{5}{18}$，

故选：B.

10.【答案】A

【解析】

【分析】由单调性可判断①②，由奇偶函数的性质可判断③，取 $f(x)=x^2$，可判断④

【详解】$F'(x)>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以函数 $F(x)=xf(x)$ 为增函数

$\therefore F(1)>F(-1)\therefore f(1)>-f(-1)\therefore f(1)+f(-1)>0$，①正确；

当 $x<0$ 时，$F(x)<F(0)=0$，则 $f(x)>0$，

当 $x>0$ 时，$F(x)>F(0)=0$，则 $f(x)>0$，所以 $f(x)\geq 0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 成立，②正确；

③ $f(x)$ 是奇函数时 $F(x)=xf(x)$ 是偶函数，不可能始终为增函数，因此③错误；

若 $f(x)=x^2$，符合题意，但函数有极值点，故④错误；

故选：A

二、填空题（共 6 个小题，每题 5 分，共 30 分.请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

11.【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】求出 $f(x)$ 的导函数，把 $x=1$ 带入即可.

【详解】$f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$，所以 $f'(1)=\dfrac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$

【点睛】要注意复合函数求导法则.

12.【答案】0.94

【解析】

【分析】利用相互独立事件同时发生的概率乘法运算求解.

【详解】甲乙两人都不去博物馆的概率是 $(1-0.8)(1-0.7)=0.06$，

所以甲乙两人至少有一人去博物馆的概率是 $1-0.06=0.94$，

故答案为: 0.94.

13.【答案】 ①. $(0,1)$ ②. 1

【解析】

【分析】先求解出 $f'(x)$，求出函数的单调区间，得出函数的极值点.

【详解】因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-x=\dfrac{1-x^2}{x}(x>0)$，令 $f'\ x\ >0$，解得 $0<x<1$，

所以单调递增区间为 $(0,1)$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，即函数的单调递减区间为 $(1,+\infty)$，

所以 $x=1$ 是函数的极大值点.

故答案为：$(0,1)$；1

14.【答案】$2n-2$

【解析】

【分析】利用 $a_n=\begin{cases}a_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2\end{cases}$，即可求解.

【详解】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=0$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2-n+n-1=2n-2$，

经检验 $a_1=0$ 满足 $a_n=2n-2$，

所以 $a_n=2n-2$，

故答案为：$2n-2$

15.【答案】$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

【解析】

【分析】函数单调递增，等价为 f'（x）≥0 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒成立，利用二次函数的图象和性质即可得到结论.

【详解】解：因为函数 f（x）$=\frac{1}{3}x^3-ax^2+2x+3$ 在（－∞，+∞）上单调递增，

所以 f'（x）≥0 在 $(-\infty,+\infty)$ 恒成立，

f'（x）$=x^2-2ax+2$，二次函数开口向上，只需判别式△$=4a^2-4\times 2\leq 0$，

即 $a^2\leq 2$，$-\sqrt{2}\leq a\leq\sqrt{2}$，

故实数 a 的取值范围是 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

故答案为 $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

【点睛】本题主要考查函数单调性和导数之间的关系，将函数单调递增转化为 f'（x）≥0 恒成立是解决本题的关键.

16.【答案】 ①. $\frac{1}{2}$##0.5； ②. <.

【解析】

【分析】（1）列出基本事件总个数，根据古典概型即可求解；（2）求出“10 混 1”检测法检测次数的期望值即可进行比较.

【详解】（1）设感染新冠病毒的两人分别为 A, B.

则有 A, B 在甲组；A 在甲组，B 在乙组；A 在乙组，B 在甲组；A, B 在乙组，共 4 种情况，满足条件的为 2 种.

所以概率为 $\frac{1}{2}$.

（2）若采用单管检测法，检测次数为 n，则 $n=10$.

若采用“10 混 1”检测法检测，全部为阴性，则检测一次的概率为 $(1-0.1)^{10}=0.9^{10}\approx 0.35$.

若有阳性存在，则需要检测 11 次，概率为 $1-(1-0.1)^{10}=1-0.9^{10}\approx 0.65$. $m=0.35\times 1+0.65\times 11=7.5$.

所以 $m<n$.

故答案为：$\frac{1}{2}$，$<$

三、解答题（共 6 个小题，共 80 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请将正确答案填在答题纸相应的题号处）

17.【答案】（1）$a_n=2n$

（2）8　（3）$T_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据等差数列的求和公式得出公差，即可求出通项公式；

（2）根据等比数列的通项公式求解；

（3）求出首项，直接由等比数列求和公式得解.

【小问 1 详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $S_5=5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}\times d=30$，解得 $d=2$，

$\therefore a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

【小问 2 详解】

$\because$ 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_3+b_3=8$，

$\therefore 6+b_3=8$，即 $b_3=2$，

$\therefore b_5=b_3q^2=2\times 4=8$.

【小问 3 详解】

由（2）可知，$b_3=b_1q^2=4b_1$，

$\therefore b_1=\dfrac{1}{2}$，

$$\therefore T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}.$$

18.【答案】（1）增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$，减区间为 $(-1,3)$

（2）$\dfrac{5}{3}$，-9

（3）$-9<k<\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】（1）利用导数求出函数单调区间；

（2）根据函数的增减性确定函数的最值；

（3）由函数图象的变化情况，结合函数的极值得出结论.

【小问 1 详解】

$f'(x)=x^2-2x-3$

令 $f'(x)>0$ 可得 $x<-1$ 或 $x>3$，

令 $f'(x)<0$ 可得 $-1<x<3$，

故函数的增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$，减区间为 $(-1,3)$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$[-3,-1]$ 上递增，在 $[-1,3]$ 递减，

故当 $x=-1$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=\frac{5}{3}$，

又 $f(-3)=-9, f(3)=-9$，故 $f(x)_{\min}=-9$.

【小问 3 详解】

由（1）（2）知函数在 $(-\infty,-1)$ 上递增，在 $(-1,3)$ 上递减，在 $(3,+\infty)$ 上递增，且极大值为 $\frac{5}{3}$，极小值为 -9，

若方程 $f(x)=k$ 有三个根，即 $y=f(x)$ 与 $y=k$ 图象有 3 个交点，

故 k 的取值范围为 $-9<k<\frac{5}{3}$.

19.【答案】(I) $\frac{1}{2}$；(II) 分布列见解析，$E(X)=\frac{2}{3}$；(III) 最大值为 58%，最小值为 54%.

【解析】

【分析】(Ⅰ) 设事件 A：从上表 12 个月中，随机取出 1 个月，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播．用 A_i 表示事件抽取的月份为第 i 月，利用列举法能求出该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率.

(Ⅱ) 在第一季度和第二季度的 6 个月中，甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份只有 2 月和 6 月，X 所有可能的取值为 0，1，2．分别求出相应的概率，由此能求出随机变量 X 的分布列和期望.

(III) $a+b=108$，设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为 M，由此能求出 M 的最大值，最小值.

【详解】（Ⅰ）设事件A：从上表12个月中，随机取出1个月，
该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播.

用A_i表示事件抽取的月份为第i月，

则$\Omega=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}\}$共12个基本事件，

$A=\{A_2, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}\}$共6个基本事件，

所以，该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）在第一季度和第二季度的6个月中，
甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份只有2月和6月，
故X所有可能的取值为0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$

随机变量X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$；

（Ⅲ）$a+b=108$，设乙地上表12个月的空气月平均相对湿度的中位数为M，
则M的最大值为58%，最小值为54%.

20.【答案】（Ⅰ）$x-y+1=0$；（Ⅱ）见解析；（Ⅲ）$[\frac{1}{e}, +\infty)$.

【解析】

【分析】（Ⅰ）函数$f(x)=ax-\ln x$．当$a=2$时，$f(x)=2x-\ln x$，$f(1)=2$．切线的斜率为$f'(1)$，利用点斜式即可得出曲线$y=f(x)$的在点$x=1$处的切线方程.

（Ⅱ）$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．对a分类讨论即可得出单调区间.

（Ⅲ）若$f(x)\geqslant 0$恒成立，则$a\geqslant\frac{\ln x}{x}$在$x\in(0,+\infty)$上恒成立．令$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$．利用导数研究其单调性即可得出函数$g(x)$的最大值，即可得出所求.

【详解】解：（Ⅰ）函数$f(x)=ax-\ln x$，$(x>0)$

当 $a=2$ 时，$f(x)=2x-\ln x$，f（1）$=2$.

$f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$，

f'（1）$=1$，

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 的在点 $x=1$ 处的切线方程为：$y-2=x-1$，即 $x-y+1=0$.

（Ⅱ）$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

$a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减.

$a>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a(x-\frac{1}{a})}{x}$，

则函数 $f(x)$ 在 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a}$，$+\infty)$ 上单调递增.

（Ⅲ）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$，则 $x=e$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(0,e)$ 递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(e,+\infty)$ 递减，

所以 $g(x)_{max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，

所以 a 的取值范围为 $[\dfrac{1}{e}$，$+\infty)$.

21.【答案】(I) 极大值 1，无极小值；(II) 见解析；(III) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$

【解析】

【分析】(I) 求导，列出随 x 的变化，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的情况表，进而求得极值；

(II) 令 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-1=\dfrac{x+1}{e^x}+\dfrac{1}{2}x^2-1$（$x>0$），求导，由 $x>0$ 得 $e^x-1>0$，则 $g'(x)>0$，进而得出函数 $g(x)$ 的单调性，由此得证；

(III) 当 $a\le-\dfrac{1}{2}$ 时，由 (II) 知符合题意，再令 $h(x)=f(x)-ax^2-1=\dfrac{x+1}{e^x}-ax^2-1$，分 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 及 $a\ge 0$ 均可判断不合题意，进而得出实数 a 的取值范围.

【详解】(I) 因为 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，定义域 R，所以 $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$.

随 x 的变化，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	增	极大值	减

由表可知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 时取得极大值 $f(0)=1$，无极小值；

(II) 证明：令 $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1=\frac{x+1}{e^2}+\frac{1}{2}x^2-1$ ($x>0$)，

$g'(x)=-\frac{x}{e^x}+x=x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=x\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)$.

由 $x>0$ 得 $e^x-1>0$，于是 $g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $f(x)>-\frac{1}{2}x^2+1$；

(III) 当 $a\le-\frac{1}{2}$ 时，由 (II) 知 $f(x)>-\frac{1}{2}x^2+1\ge ax^2+1$，满足题意

令 $h(x)=f(x)-ax^2-1=\frac{x+1}{e^x}-ax^2-1$，$h'(x)=-\frac{x}{e^x}-2ax=-x\left(\frac{1}{e^x}+2a\right)$.

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，若 $x\in\left(0,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right)$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $\left[0,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right]$ 上是减函数.

所以 $x\in\left(0,\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)\right)$ 时，$h(x)<h(0)=0$，不合题意.

当 $a\ge0$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 $h(x)<h(0)=0$，不合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

【点睛】本题考查运用导函数研究函数的单调性、极值、最值、证明不等式，求参数的范围，关键在于构造合适的函数，求其导函数的正负，得出其函数的单调性，从而得出所构造的函数的图象趋势，可以解决函数的极值、最值、不等式等相关问题，属于难度题.

22. 【答案】(1) τ 数列的前四项为：$1,-1,1,-1$；$1,-1,1,5$；$1,-1,3,-3$；$1,-1,3,7$

(2) τ 数列为首项为 1 公差为 4 的等差数列，理由见解析

(3) m 的最小值为1517

【解析】

【分析】（1）先根据条件①去绝对值可得 $a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$，由 $a_2<0$ 得 $a_2=-1$，再根据条件逐个列举即可；

（2）由条件①知，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$，由 $a_2>0$ 得 $a_2=5$，利用反证法假设 τ 数列中存在最小的正整数 i（$i\geq 3$），使得 $a_i=-a_{i-1}$，根据单调性结合条件②可知假设不成立，即可得结论；

（3）先根据条件②可得 $b_n=-4n+3(1\leq n\leq 506)$ 必为数列 $\{a_n\}$ 中的项，再结合条件①可得 $a_{3n-1}=b_n$ 分析即可.

【小问 1 详解】

由条件①知，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$，

因为 $a_2<0$，由条件①知 $a_2=-1$，

所以 τ 数列的前四项为：$1,-1,1,-1$；$1,-1,1,5$；$1,-1,3,-3$；$1,-1,3,7$.

【小问 2 详解】

若 $a_2>0$，τ 数列是等差数列

由条件①知，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=-a_{n-1}$ 或 $a_n=a_{n-1}+4$，

因为 $a_2>0$，所以 $a_2=5$

假设 τ 数列中存在最小的正整数 i（$i\geq 3$），使得 $a_i=-a_{i-1}$，

则 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{i-1}$ 单调递增，

由 $a_1=1$ 则 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{i-1}$ 均为正数，且 $a_{i-1}\geq a_2=5$.

所以 $a_i=-a_{i-1}\leq -5$. 由条件②知，则存在 $k\in\{1,2,3,\cdots,i-1\}$，使得 $a_k=a_i+4\leq -1$

此时与 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{i-1}$ 均为正数矛盾，

所以不存在整数 i（$i\geq 3$），使得 $a_i=-a_{i-1}$，即 $a_n=a_{n-1}+4$.

所以 τ 数列为首项为 1 公差为 4 的等差数列.

【小问 3 详解】

由 $a_m=-2021$ 及条件②,

可得 $-1,-5,-9,\cdots,-2017,-2021$ 必为数列 $\{a_n\}$ 中的项，记该数列为 $\{b_n\}$，有

$b_n=-4n+3(1\leq n\leq 506)$，

不妨令 $b_n=a_j$，由条件①，$a_{j+1}=-a_j=4n-3$ 或 $a_{j+1}=a_j+4=-4n+7$ 均不为 $b_{n+1}=-4n-1$；

此时 $a_{j+2}=-4n+3$ 或 $4n+1$ 或 $4n-7$ 或 $-4n+11$，均不为 $b_{n+1}=-4n-1$

上述情况中，当 $a_{j+1}=4n-3$，$a_{j+2}=4n+1$ 时，$a_{j+3}=-a_{j+2}=-4n-1=b_{n+1}$

结合 $a_1=1$，则有 $a_{3n-1}=b_n$.

由 $b_{506}=-2021$，得 $m=3\times 506-1=1517$ 即为所求.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯