高 三 数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，集合 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 复数 z_1,z_2 满足 $z_1+z_2=2,z_1-z_2=2i$，则 $z_1z_2=$

A. 2i　　B. 3i　　C. 2　　D. 3

3. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$一条渐近线的斜率为 $2\sqrt{2}$，则 C 的离心率为

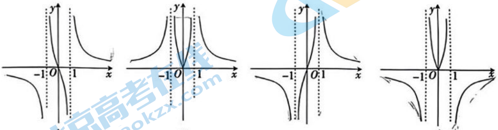
A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

4. 设$\{a_n\}$是等比数列，且 $a_1+a_3=$[illegible]，$a_3+a_5=6$，则 $a_{[illegible]}+a_{[illegible]}$

A. 24　　B. 36

C. 48　　D. 64

5. 函数 $f(x)=\frac{x^2}{3-3^{|x|}}$的图象大致为



A　　B　　D

6. 下列函数的图象不可能与直线 $y=2x+m,m\in\mathbf{R}$ 相切的是

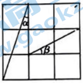
A. $f(x)=x^{[illegible]}+x$

B. $f(x)=x^{[illegible]}+e$

C. $f(x)=\ln x+\frac{x^2}{2}$

D. $f(x)=\sqrt{x}+2x$

7. 如图，α,β 是九个相同的正方形拼接而成的九宫格中的两个角，则 $\alpha+\beta=$



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

8. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 与 x 轴相交于 E,F 两点，与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 相交于 A,B 两点，若抛物线 C 的焦点为 F，直线 BF 与抛物线 C 的另一个交点为 D，则 $|DF|-|AF|=$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组数据 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，其中 $x_i\in(10,90)$，$i=1,2,3,4$，$x_5=10$，$x_6=90$，$x_1+x_2+x_3+x_4=200$，平均数为 $\bar{x}$，方差为 m. 若去除 x_5,x_6 两个数据后，剩余数据的方差为 n，则

A. $\bar{x}=50$　　B. $\bar{x}>50$　　C. $m>n$　　D. $m<n$

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{12})$，则

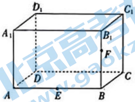
A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. 直线 $x=-\frac{7\pi}{24}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 上恰有 2 个极小值点

D. 若要得到函数 $y=2\cos 2x$ 的图象，可将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度

11. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=\sqrt{2}$，E 为 AB 的中点，F 是棱 BB_1 上一点，则



A. $EF+FC_1$ 的最小值为 $\sqrt{11}$

B. 存在点 F，使得 $EF\perp D_1E$

C. 存在点 F，使得 $EF /\!/ DC_1$

D. 存在点 F，使得 $\angle EFC=60^\circ$

12. 已知 $a=\frac{7}{9}$，$b=\cos\frac{1}{3}$，$c=2\ln\frac{4}{3}$，则

A. $a<b$　　B. $c<b$　　C. $b<a$　　D. $c<a$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,-1)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$___▲___.

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且对任意的 x,y 都有 $f(xy)=f(x)f(y)$，若 $f(-1)=1$，则 $f(x)<1$ 的解集为___▲___.

15. 在高考志愿模拟填报实验中，共有 10 个专业可供学生甲填报，其中学生甲感兴趣的专业有 3 个. 若在实验中，学生甲随机选择 3 个专业进行填报，则填报的专业中至少有 1 个是学生甲感兴趣的概率为___▲___.

16. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle ABD=\angle ABC=60^\circ$，$BC=BD=2$，$AB=4$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$是以 3 为首项，公差不为 0 的等差数列，且 a_1,a_3,a_9 成等比数列．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若 $b_n=\dfrac{27}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n

18.（12 分）

在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 对应的边分别是 a,b,c，且 $b\cos C+c\cos B=3a\cos A$．

（1）求 $\cos A$；

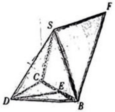
（2）若$\triangle ABC$ 的面积是$\sqrt{2}$，$a=2$，求$\triangle ABC$ 的周长．

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $S-BCD$ 中，E 是 BC 的中点，$\triangle SCD$ 与$\triangle SBD$ 均为正三角形．

（1）证明：$BC\perp SD$．

（2）若 $BE=DE$，点 F 满足$\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{DE}$，求二面角 $F-BS-D$ 的正弦值．



). (12 分)

某批发市场供应的排球中，来自甲厂的占 40%，来自乙厂的占 30%，来自丙厂的占 30%，甲厂生产的排球的合格率为 95%，乙厂生产的排球的合格率为 92%，丙厂生产的排球的合格率为 96%.

(1)若小张到该市场购买 1 个排球，求购得的排球为合格品的概率.

(2)若小李到该市场批发 2 个排球回去销售，购买的 1 个球来自甲厂，1 个球来自丙厂，已知来自甲厂的每个排球售出后可获得纯利润 10 元，没有售出则每个球将损失 5 元，且每个球被售出的概率等于排球的合格率；来自丙厂的每个排球售出后可获得纯利润 8 元，没有售出则每个球将损失 6 元，且每个球被售出的概率等于排球的合格率. 求小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润的数学期望.

1. (12 分)

在直角坐标系 xOy 中，动点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍，设动点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)直线 l: $x=my-1$ 与曲线 C 交于 A, B 两点，求$\triangle MAB$ 面积的最大值.

2. (12 分)

已知函数 $f(x)=x(\ln x+a)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)<ae^x-1$.

高三数学参考答案

1. B　因为 $A=\{x|x^2<4\}=\{x|-2<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

2. C　由 $\begin{cases}z_1+z_2=2,\\ z_1-z_2=2i,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z_1=1+i,\\ z_2=1-i,\end{cases}$ 则 $z_1z_2=(1+i)(1-i)=2$.

3. A　由题可知 $\frac{b}{a}=2\sqrt{2}$，即 $b=2\sqrt{2}a$，则 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=3$.

4. C　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_1+a_3=3$，$a_3+a_5=6$，得 $q^2=2$，则 $a_9+a_{11}=(a_1+a_3)q^8=3\times2^4$
48.

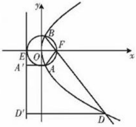
5. D　由题可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq+1\}$，且 $f(-x)=\frac{x^2}{3-3^{|x|}}=f(x)$，故函数为偶函数，排除 A，C. 又 $f(2)=\frac{4}{3-9}=-\frac{2}{3}<0$，所以选 D.

6. D　若导函数 $f'(x)=2$ 有解，则直线 $y=2x+m$ 就可以为该函数图象的切线. 对于选项 A，令 $f'(x)=2x+1=2$，解得 $x=\frac{1}{2}$，满足条件. 对于选项 B，因为 $f'(x)=3x^2+e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(0)=1<2$，$f'(2)=12+e^2>2$，所以方程 $f'(x)=3x^2+e^x=2$ 有解，满足条件. 对于选项 C，令 $f'(x)=\frac{1}{x}+x=2$，解得 $x=1$，满足条件. 对于选项 D，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2>2$，不满足条件.

7. B　由图知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$.

因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

8. D　由题意知 $F(2,0)$，则 $\frac{p}{2}=2$，即 $p=4$. 如图，过点 A 和点 D 分别作 AA' 和 DD' 垂直于抛物线的准线，易知 $|AF|=|BF|=|AA'|$，$|DD'|=|DF|$. 设 $\angle BFE=\angle AFE=\theta$，则 $|BF|=|EF|\cos\theta=4\cos\theta$，则 $|AA'|+|AF|\cos\theta=|EF|$，即 $4\cos\theta+4\cos^2\theta=4$，解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $|AA'|=4\cos\theta=2\sqrt{5}-2$. $|DD'|=|EF|+|DF|\cos\theta$，则 $|DF|=4+|DF|\cos\theta$，解得 $|DF|=\frac{4}{1-\cos\theta}=6+2\sqrt{5}$，所以 $|DF|-|AF|=6+2\sqrt{5}-(2\sqrt{5}-2)=8$.

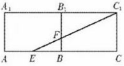


9. AC　因为 $x_1+x_2+x_3+x_4=200$，$x_5=10$，$x_6=90$，所以 $\bar{x}=\frac{200+10+90}{6}=50$，A 正确，B 不正确. 因为 $x_i\in(10,90)$，$i=1,2,3,4$，所以去除 $x_5=10$，$x_6=90$ 后剩余数据的波动性更小，方

差更小，所以 $m>n$，C 正确，D 不正确.

10. BD　因为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{12})$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 不正确. 当 $x=-\frac{7\pi}{24}$ 时，$2x+\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{2}$，故直线 $x=-\frac{7\pi}{24}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，B 正确. 由 $0<x<\frac{3\pi}{2}$，得 $\frac{\pi}{12}<2x+\frac{\pi}{12}<\frac{37\pi}{12}$，当且仅当 $2x+\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{17\pi}{24}$ 时，$f(x)$ 取得极小值，C 不正确. $f(x+\frac{5\pi}{24})=2\sin[2(x+\frac{5\pi}{24})+\frac{\pi}{12}]=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})=2\cos 2x$，所以若要得到函数 $y=2\cos 2x$ 的图象，可将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度，D 正确.

11. ABC　如图，将平面 AA_1B_1B 沿着轴 BB_1 展开到平面 BB_1C_1C 内，则 $EF+FC_1$ 的最小值为 $EC_1=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$，A 正确. 当 F 为 BB_1 的中点时，$D_1E^2=7$，$EF^2=\frac{3}{2}$，$D_1F^2=\frac{17}{2}$，则 $D_1E^2+EF^2=D_1F^2$，从而 $EF\perp D_1E$，B 正确. 当 F 为 BB_1 的中点时，$EF/\!/AB_1/\!/DC_1$，C 正确. 设 $BF=a(0\leqslant a^2\leqslant 2)$，则 $EF^2=1+a^2$，$EC^2=5$，$FC^2=4+a^2$，$\cos\angle EFC=\frac{EF^2+FC^2-EC^2}{2EF\cdot FC}=\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^2)(4+a^2)}}$. 若 $\angle EFC=60°$，则 $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^2)(4+a^2)}}=\frac{1}{2}$，整理得 $3a^4-5a^2-4=0$，解得 $a^2=\frac{5+\sqrt{73}}{6}>2$ 或 $a^2=\frac{5-\sqrt{73}}{6}<0$，不符合题意，D 不正确.



12. ABD　令 $f(x)=1-2x^2-\cos x$，则 $f'(x)=-4x+\sin x$. 令 $g(x)=-4x+\sin x$，则 $g'(x)=-4+\cos x<0$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $g(0)=0$，所以 $g(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(\frac{1}{3})=\frac{7}{9}-\cos\frac{1}{3}<f(0)=0$，即 $a<b$. 令 $h(x)=x-\ln x-1$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. 当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 故 $h(\frac{16}{9})=\frac{7}{9}-2\ln\frac{4}{3}>h(1)=0$，即 $c<a$. 故选 ABD.

13. -20　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $6+x=0$，即 $x=-6$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3x-2=-20$.

14. $(-1,1)$　令 $y=-1$，则 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)<1$ 的解集为 $(-1,1)$.

15. $\frac{17}{24}$　由题可知，填报的专业中至少有 1 个是学生甲感兴趣的概率为 $1-\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{17}{24}$.

16. 16π　由 $\angle ABD=\angle ABC=60°$，$BC=BD=2$，$AB=4$，根据余弦定理可得 $AC=AD=2\sqrt{3}$，则 $AC\perp BC$，$AD\perp BD$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的直径为 $AB=4$，故三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\cdot(\frac{AB}{2})^2=16\pi$.

17. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 a_1,a_3,a_9 成等比数列，所以 $a_3^2=a_1a_9$，即 $(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，又 $d\neq0$，所以 $d=a_1=3$，…………………………………… 3 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=3n$. …………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可得，$b_n=\frac{3}{n(n+1)}=3(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， …………………………………… 8 分

则 $T_n=3(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{3n}{n+1}$. …………………………………… 10 分

18. 解：(1) 由 $b\cos C+c\cos B=3a\cos A$，可得到 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=3\sin A\cos A$， ……
…………………………………… 2 分

即 $\sin(B+C)=3\sin A\cos A$. …………………………………… 3 分

因为 $B+C=\pi-A$，所以 $\sin(B+C)=\sin A\neq0$，

故 $\cos A=\frac{1}{3}$. …………………………………… 5 分

(2) 由 $\cos A=\frac{1}{3}$，可得 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$， …………………………………… 6 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以 $\sqrt{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$，则 $bc=3$. …………………………………… 8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $4=b^2+c^2-\frac{2}{3}bc=(b+c)^2-\frac{8}{3}bc$，

所以 $b+c=2\sqrt{3}$， …………………………………… 10 分

故 $\triangle ABC$ 的周长是 $a+b+c=2\sqrt{3}+2$. …………………………………… 12 分

19. (1) 证明：连接 SE，因为 $\triangle SCD$ 与 $\triangle SBD$ 均为正三角形，所以 $SB=SC=SD=BD=CD$.
…………………………………… 1 分

又 E 为 BC 的中点，所以 $DE\perp BC$，$SE\perp BC$. …………………………………… 2 分

因为 $DE\cap SE=E$，所以 $BC\perp$ 平面 SDE. …………………………………… 3 分

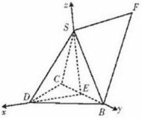
又 $SD\subset$ 平面 SDE，所以 $BC\perp SD$. …………………………………… 4 分

(2) 解：因为 $BE=DE$，所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，且 $BD\perp CD$. …………………………………… 5 分

不妨令 $BD=2$，则 $CE=\sqrt{2}$. 由 $SE\perp BC$，得 $SE=\sqrt{2}$，

则 $SD^2=DE^2+SE^2$，故 $SE\perp DE$. …………………………………… 6 分

以 E 为坐标原点，直线 ED,EB,ES 分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



$B(0,\sqrt{2},0)$，$S(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{2},0,0)$.

因为 $\overrightarrow{SF}=\overrightarrow{DE}$，所以 $F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$.

则 $\overrightarrow{FB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BS}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$.
…………………………………… 7 分

设平面 FBS 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\\-\sqrt{2}y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$. ········ 8分

设平面 BDS 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}-\sqrt{2}y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\\sqrt{2}x_2-\sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

········ 9分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, ········ 10分

故二面角 $F-BS-D$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ········ 12分

20. 解：(1)设 A,B,C 分别表示购买的排球来自甲厂、乙厂、丙厂，D 表示购买的排球是合格品，则 $P(A)=40\%$，$P(B)=P(C)=30\%$，$P(D|A)=95\%$，$P(D|B)=92\%$，$P(D|C)=96\%$，所以 $P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)$ ········ 2分

$=40\%\times95\%+30\%\times92\%+30\%\times96\%=94.4\%$. ········ 4分

(2)设小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润为 X 元，

依题意可得 X 的可能取值为 $10+8,10-6,-5+8,-5-6$，即 $18,4,3,-11$，········ 6分

$P(X=18)=0.95\times0.96=0.912$, ········ 7分

$P(X=4)=0.95\times(1-0.96)=0.038$, ········ 8分

$P(X=3)=(1-0.95)\times0.96=0.048$, ········ 9分

$P(X=-11)=(1-0.95)\times(1-0.96)=0.002$. ········ 10分

所以 $E(X)=18\times0.912+4\times0.038+3\times0.048+(-11)\times0.002=16.69$,

故小李到该市场批发 2 个排球进行销售获得的纯利润的数学期望为 16.69 元. ········ 12分

21. 解：(1)设 $P(x,y)$，因为点 P 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $M(1,0)$ 的距离的 2 倍，

所以 $|x-4|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，则 $x^2-8x+16=4x^2-8x+4+4y^2$, ········ 3分

整理得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，故曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ········ 5分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\x=my-1,\end{cases}$

整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$, ········ 6分

则 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. ········ 7分

因为 l 过点 $(-1,0)$，所以 $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

$=\dfrac{12}{3\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}}$. ········ 9分

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，$t\geqslant 1$，$f(t)=3t+\frac{1}{t}$，则 $f'(t)=3-\frac{1}{t^2}>0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立，则 $f(t)\geqslant$ $f(1)=4$，则$\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}\leqslant 3$. ………………………………………………………………… 11 分

故$\triangle MAB$ 面积的最大值为 3. ………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1+a$，令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{-a-1}$. … 1 分

由 $f'(x)<0$，解得 $0<x<e^{-a-1}$，由 $f'(x)>0$，解得 $x>e^{-a-1}$. ……………………… 3 分

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0,e^{-a-1})$，单调递增区间为$(e^{-a-1},+\infty)$. ……………… 5 分

(2)证明：令 $\varphi(x)=f(x)-ae^x+1=a(x-e^x)+x\ln x+1$，

令 $k(x)=x-e^x$，则 $k'(x)=1-e^x$，则 $k(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以 $k(x)\leqslant k(0)=-1<0$.

由 $a\geqslant 1$，可得 $a(x-e^x)+x\ln x+1\leqslant x-e^x+x\ln x+1$，……………………………… 7 分

即证$\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1>0$.

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-1)}{x^2}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 8 分

由 $g'(x)=0$，可得 $x=1(x=0$ 舍去$)$.

因为当 $x>0$ 时，$e^x-1>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e-1-1=e-2>0$，…………………………………………………… 10 分

所以 $g(x)>0$，则$\frac{e^x}{x}-\ln x-\frac{1}{x}-1>0$，所以 $x-e^x+x\ln x+1<0$，结论成立. ……… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！