

房山区 2018 年高考第二次模拟测试试卷

数学（理）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 设集合 $A = \{x | x \leq 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cup B =$

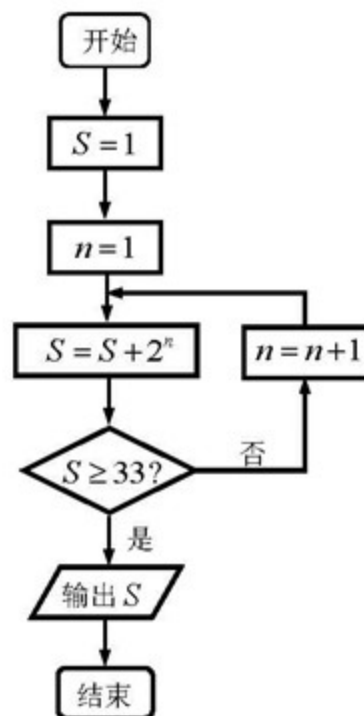
- (A) $\{x | x \leq 2\}$ (B) $\{x | x < 3\}$
(C) $\{x | 2 < x < 3\}$ (D) $\{x | 2 \leq x < 3\}$

(2) 若复数 $iz = -1 + i$, 则复数 z 在复平面内对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 执行如图的程序框图，输出的 S 值为

- (A) 65 (B) 64
(C) 63 (D) 33



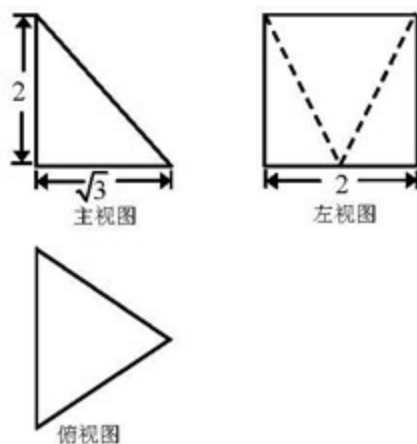
(4) 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的取值范围是

- (A) $(0,1)$ (B) $(0,1]$ (C) $[1,+\infty)$ (D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

(5) 已知函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称, 且周期为 4, 若 $f(-1)=2$, 则 $f(2017)=$ ()

- (A) 2 (B) 0 (C) -2 (D) -4

(6) 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的最长棱为



- (A) 4 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 2

(7) $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C , 则 “ $B=\frac{\pi}{3}$ ” 是 “ A, B, C 成等差数列” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 定义: 若存在常数 k , 使得对定义域 D 内的任意两个 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 均有 $|f(x_1)-f(x_2)| \leq k|x_1-x_2|$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上满足利普希茨条件. 若函数 $f(x)=\sqrt{x} (x \geq 1)$ 满足利普希茨条件, 则常数 k 的最小值为

- (A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $x-2y=0$, 则该双曲线的离心率为_____。

(10) 若平面向量 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (-2, m)$, 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则实数 m 的值为_____.

(11) 在 $(x+m)^5$ 的展开式中, 含 x^2 项的系数为 -10 , 则实数 m 的值为_____.

(12) 设点 A 是曲线 $\begin{cases} x = \sqrt{3} + \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 是参数) 上的点, 则点 A 到坐标原点的最大距离是_____.

(13) 能够说明 “ $e^x > x+1$ 恒成立” 是假命题的一个 x 的值为_____.

(14) 已知函数 $f(x) = x|2x-a|-1$.

①当 $a=0$ 时, 不等式 $f(x)+1 > 0$ 的解集为_____;

②若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

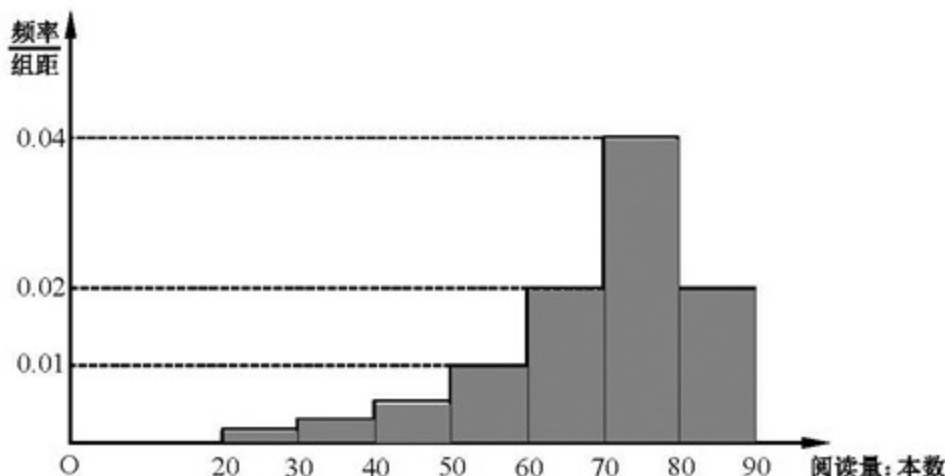
已知函数 $f(x) = \sin x - a \cos x$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{4}$.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 设 $g(x) = f(x) \cdot f(-x) + 2\sqrt{3} \sin x \cos x$, 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $g(x)$ 的值域.

(16) (本小题 13 分)

1995 年联合国教科文组织宣布每年的 4 月 23 日为世界读书日, 主旨宣言为 “希望散居在全球各地的人们, 都能享受阅读带来的乐趣, 都能尊重和感谢为人类文明作出巨大贡献的文学、文化、科学思想的大师们, 都能保护知识产权。” 为了解大学生课外阅读情况, 现从某高校随机抽取 100 名学生, 将他们一年课外阅读量 (单位: 本) 的数据, 分成 7 组 $[20, 30)$, $[30, 40)$, $\dots$, $[80, 90)$, 并整理得到如下频率分布直方图:



(I) 估计其阅读量小于 60 本的人数；

(II) 已知阅读量在 $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$ 内的学生人数比为 2:3:5. 为了解学生阅读课外书的情况, 现从阅读量在 $[20, 40)$ 内的学生中随机选取 3 人进行调查座谈, 用 X 表示所选学生阅读量在 $[20, 30)$ 内的人数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替, 试估计 100 名学生该年课外阅读量的平均数在第几组 (只需写出结论).

(17) (本小题 14 分)

如图 1, 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2, O 为中心, G 为 AB 的中点. 现将四边形 $DEFC$ 沿 CF 折起到四边形 D_1E_1FC 的位置, 使得平面 $ABCF \perp$ 平面 D_1E_1FC , 如图 2.

(I) 证明: $D_1F \perp$ 平面 E_1OG ;

(II) 求二面角 E_1-OG-F 的大小;

(III) 在线段 CD_1 上是否存在点 H , 使得 $BH \parallel$ 平面 E_1OG ? 如果存在, 求出 $\frac{D_1H}{D_1C}$ 的值; 如果不存在, 请说明理由.

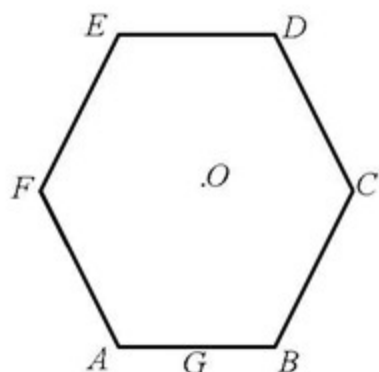


图 1

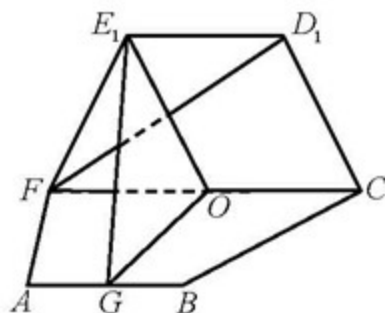


图 2

(18) (本小题 13 分)

设函数 $f(x) = x(k - \ln x)$, (k 为常数), $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} f(x)$. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(I) 求 k 的值;

(II) 求 $g(x)$ 的单调区间和最小值;

(III) 若 $g(a) - g(x) < \frac{1}{a}$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(19) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, O 为坐标原点, F 是椭圆 C 的右焦点, A 为

椭圆 C 上一点, 且 $AF \perp x$ 轴, $\triangle AFO$ 的面积为 $\frac{3}{4}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过 C 上一点 $P(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ 的直线 $l: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ 与直线 AF 相交于点 M , 与直线 $x = 4$

相交于点 N . 证明: 当点 P 在 C 上移动时, $\frac{|MF|}{|NF|}$ 恒为定值, 并求此定值.

(20) (本小题 13 分)

已知集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 其中 $i \in \mathbf{N}^+, 1 \leq i \leq n, n > 2$, $l(A)$ 表示 $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq n)$ 中所有不同值的个数.

(I) 设集合 $P = \{2, 4, 6, 8\}, Q = \{2, 4, 8, 16\}$, 分别求 $l(P)$ 和 $l(Q)$;

(II) 若集合 $A = \{2, 4, 8, \dots, 2^n\}$, 求证: $l(A) = \frac{n(n-1)}{2}$;

(III) $l(A)$ 是否存在最小值? 若存在, 求出这个最小值; 若不存在, 请说明理由.

房山区 2018 年高考第二次模拟测试试卷

数学（理）

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	A	C	D	C	B	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (10) -6 (11) -1 (12) 3 (13) 0 (14) ① $(0, +\infty)$; ② $a > 2\sqrt{2}$

8. 设 $x_1 < x_2$, $Q |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|$, $\therefore \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq k$

$$\therefore k \geq \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \quad (\text{分子有理化})$$

$$Q x \geq 1, \text{ 且 } x_1 \neq x_2, \therefore 0 < \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < \frac{1}{2}, \therefore k \geq \frac{1}{2}$$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (I) 解：依题意，得 $f(\frac{\pi}{4}) = 0$,1 分

$$\text{即 } \sin \frac{\pi}{4} - a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}a}{2} = 0, \quad \text{.....3 分}$$

解得 $a = 1$5 分

(II) 解：由 (I) 得 $f(x) = \sin x - \cos x$.

$$g(x) = f(x) \cdot f(-x) + 2\sqrt{3} \sin x \cos x \quad \text{.....6 分}$$

$$= (\sin x - \cos x)(-\sin x - \cos x) + \sqrt{3} \sin 2x \quad \text{.....7 分}$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3} \sin 2x \quad \text{.....8 分}$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x \quad \text{.....9 分}$$

$$= 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6}). \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{由 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 得 } \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 即 $x = 0$ 时, $g(x)$ 取得最大值 2,11 分

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x)$ 取得最小值 -1.12 分

所以 $g(x)$ 的值域是 $[-1, 2]$ 13 分

(16) 解: (I) $100 - 100 \times 10 \times (0.04 + 0.02 \times 2) = 20$ (人)3 分

(II) 由已知条件可知:

$[20, 50)$ 内人数为: $100 - 100 \times 10 \times (0.04 + 0.02 + 0.02 + 0.01) = 10$

$[20, 30)$ 人数为 2 人, $[30, 40)$ 人数为 3 人, $[40, 50)$ 人数为 5 人.6 分

X 的可能取值为 0, 1, 2

$$P(X=0) = \frac{C_3^3 C_2^0}{C_5^3} = \frac{1}{10} \quad P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5} \quad P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

.....10 分

$$EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

(III) 第五组13 分

(17) (1) 证: 图 (1) 中 $OG \perp CF$

$\therefore$ 图 (2) 中, $OG \perp CF$

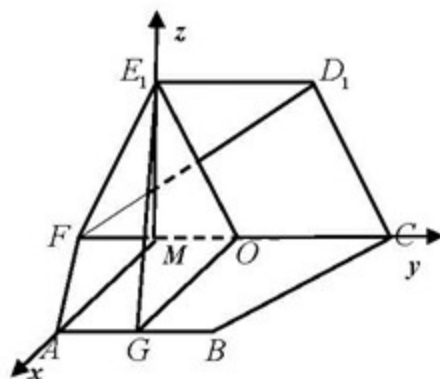
又面 $CD_1E_1F \perp$ 面 $ABCF$, 面 $CD_1E_1F \cap$ 面 $ABCF = CF$

$\therefore OG \perp$ 面 CD_1E_1F

$Q D_1F \subset$ 面 $CD_1E_1F \therefore OG \perp D_1F$

又 O 为 CF 的中点 $\therefore OF \parallel D_1E_1$, 又 $E_1D_1 = E_1F$

$\therefore$ 四边形 E_1D_1OF 为菱形



$$\therefore D_1F \perp OE_1$$

$$Q OG \perp OE_1 = O \therefore D_1F \perp \text{面} E_1OG \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 取 OF 的中点 M , 连接 E_1M, MA , 以点 M 为坐标原点, 建立空间直角坐标系 $M-xyz$ 如图所示.

$$E_1(0, 0, \sqrt{3}), O(0, 1, 0), G(\sqrt{3}, 1, 0), F(0, -1, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{OG} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{OE_1} = (0, -1, \sqrt{3})$$

设面 OE_1G 的法向量为 $\vec{n}$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{OE_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3}z \end{cases}, \text{ 令 } z = 1, \text{ 则 } y = \sqrt{3}, \therefore \vec{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$$

设面 FOG 的法向量为 $\vec{m}$, 则 $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{二面角 } E_1-OG-F \text{ 的大小为 } \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(III) 假设存在, 设 $H(x, y, z)$, $\frac{D_1H}{D_1C} = \lambda, \lambda \in [0, 1]$

$$\therefore \overrightarrow{D_1H} = \lambda \overrightarrow{D_1C}$$

$$D_1(0, 2, \sqrt{3}), C(0, 3, 0), B(\sqrt{3}, 2, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{D_1H} = (x, y - \sqrt{2}, z - \sqrt{3}), \overrightarrow{D_1C} = (0, 1, -\sqrt{3})$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0 \\ y - 2 = \lambda \\ z - \sqrt{3} = -\lambda\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3} \end{cases} \therefore H(0, 2 + \lambda, \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3}) \therefore \overrightarrow{BH} = (-\sqrt{3}, \lambda, \sqrt{3} - \lambda\sqrt{3})$$

$$Q \overrightarrow{BH} \cdot \vec{n} = 0 \therefore \sqrt{3}\lambda + \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda = 0 \therefore \sqrt{3} = 0 \text{ 矛盾} \therefore \text{不存在} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(19) 解: (I) $f(x) = x(k - \ln x)$

$f'(x) = k - 1 - \ln x$, 因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行

所以 $f'(x) = 0$,

所以 $k = 1$ 5 分

$$(II) g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x, \text{ 定义域为 } \{x | x > 0\}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 1$ ，当 x 变化时， $g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化如下表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

由上表可知 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$ ，单调递增区间为 $(1,+\infty)$ ，

最小值为 $g(1) = 0$ 。..... 10 分

(III) 若 $g(a) - g(x) < \frac{1}{a}$ 对任意 $x > 0$ 成立，则 $g(a) - g(x)_{\min} < \frac{1}{a}$
即 $\ln a < 1$ ，解得 $0 < a < e$ 13 分

(19) (I) 设 $F(c,0)$ ， $A(c,d)$ 则 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore |d| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

因 $\triangle AFO$ 的面积为 $\frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{1}{2}c|d| = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3}{4}, bc = \sqrt{3}$$

$$\text{由 } \begin{cases} a^2 - b^2 = c^2 \\ a = 2c \\ bc = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(II) 由(I)知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1$ ($y_0 \neq 0$)，即 $y = \frac{12-3x_0x}{4y_0}$ ($y_0 \neq 0$)。

因为直线 AF 的方程为 $x=1$ ，所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1, \frac{12-3x_0}{4y_0})$ ，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4, 3-3x_0)$ ，

$$\text{则} \frac{|MF|^2}{|NF|^2} = \frac{\left(\frac{12-3x_0}{4y_0}\right)^2}{9+\left(\frac{3-3x_0}{y_0}\right)^2} = \frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$$

$$\text{又 } P(x_0, y_0) \text{ 是 } C \text{ 上一点, 则 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$$

代入上式得

$$\frac{|MF|^2}{|NF|^2} = \frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2} = \frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)} = \frac{1}{4} \frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{所以 } \frac{|MF|}{|NF|} = \frac{1}{2}, \text{ 为定值.} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(20) 解: (I) 由 $2+4=6, 2+6=8, 2+8=10, 4+6=10, 4+8=12, 6+8=14$ 得 $l(P)=5$

由 $2+4=6, 2+8=10, 2+16=18, 4+8=12, 4+16=20, 8+16=24$ 得 $l(Q)=6$

$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(II) 证明: $Q a_i + a_j (1 \leq i < j \leq n)$ 最多有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个值,

$$\therefore l(A) \leq \frac{n(n-1)}{2},$$

又集合 $A = \{2, 4, 8, \dots, 2^n\}$, 任取 $a_i + a_j, a_k + a_l (1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq n)$,

当 $j \neq 1$ 时, 不妨设 $j < 1$, 则 $a_i + a_j < 2a_j = 2^{j+i} \leq a_1 < a_k + a_l$,

即 $a_i + a_j \neq a_k + a_l$,

当 $j=1, i \neq k$ 时, $a_i + a_j \neq a_k + a_1$,

$\therefore$ 当且仅当 $i=k, j=1$ 时 $a_i + a_j = a_k + a_1$,

即所有 $a_i + a_j (1 \leq i < j \leq n)$ 的值两两不同,

$$\therefore l(A) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(III) $l(A)$ 存在最小值, 且最小值为 $2n-3$,

不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, 可得 $a_1 + a_2, a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_n < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} + a_n, \dots$

$\therefore a_i + a_j (1 \leq i < j \leq n)$ 中至少有 $2n-3$ 个不同的数，即 $l(A) \geq 2n-3$ ，

取 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，则， $a_i + a_j \in \{3, 4, 5, \dots, 2n-1\}$ ，即 $a_i + a_j$ 的不同值共有 $2n-3$ 个，

故 $l(A)$ 的最小值为 $2n-3$ 。

.....13 分