

2018 北京人大附中高二（下）期末 数 学(理)

2018 年 7 月 6 日

制卷人：于金华 杨良庆 审卷人：梁丽平

说明：本练习共三道大题 20 道小题，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸的相应位置。）

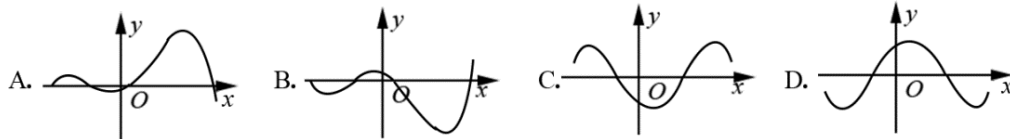
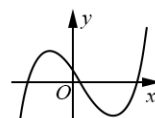
1. $\int_0^1 (e^x + 2x)dx$ 等于 ()

- (A) 1 (B) $e-1$ (C) e (D) $e+1$

2. 已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 项的系数是 54，则 $n =$ ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

3. 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如右图所示，则 $y = f(x)$ 的图象可能是 ()

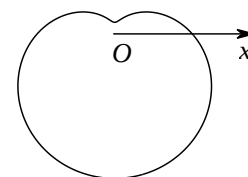


4. 已知从 A 口袋中摸出一个球是红球的概率为 $\frac{1}{4}$ ，从 B 口袋中摸出一个球是红球的概率为 $\frac{1}{5}$ ，现从两个口袋中各摸出一个球，那么这两个球至少有一个不是红球的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{20}$ (B) $\frac{19}{20}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{7}{20}$

5. 下列极坐标方程中，对应的曲线为右图的是 ()

- (A) $\rho = 6 + 5\cos\theta$ (B) $\rho = 6 + 5\sin\theta$
(C) $\rho = 6 - 5\cos\theta$ (D) $\rho = 6 - 5\sin\theta$



6. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = 1) = p_i$, $P(\xi_i = 0) = 1 - p_i$, $i = 1, 2$. 若 $0 < p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$, 则 ()

- (A) $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ (B) $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$
(C) $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ (D) $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

7. 集合 $P = \{x | x = a_0 + a_1 \times 2 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^3\}$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, 3$. 则集合 P 中元素的个数及所有元素之和分别是 ()

- (A) 16, 120 (B) 8, 120 (C) 16, 60 (D) 8, 60

8. 设函数 $y = \begin{cases} -x^3 + x^2, & x < e, \\ a \ln x, & x \geq e \end{cases}$ 的图象上存在两点 P, Q , 使得 $\triangle POQ$ 是以 O 为直角顶点的直角三角形 (其中 O 为坐标原点), 且斜边的中点恰好在 y 轴上, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(0, \frac{1}{e+1}]$ (B) $(-\infty, \frac{1}{e+1}]$ (C) $[\frac{1}{e+1}, +\infty)$ (D) $\mathbf{R}$

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。请把结果填在答题纸的相应位置.)

9. 已知复数 $z = \frac{1+2i}{1+i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模是_____.

10. 圆 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 被 x 轴截得的弦长为_____.

11. 现有 5 名教师要带 3 个兴趣小组外出学习考察, 要求每个兴趣小组的带队教师至多 2 人, 则不同的带队方案有_____种. (用数字作答)

12. 观察下列一组等式

$$\begin{aligned}
 1+2 &= 3 \\
 2+3+4+5 &= 14 \\
 3+4+5+6+7+8 &= 33 \\
 4+5+6+7+8+9+10+11 &= 60 \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

照此规律，第 n 个等式的右端为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0, \\ \ln(x+1), & x > 0. \end{cases}$ 若 $|f(x)| \geq ax$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____.

14. 给定集合 $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，映射 $f: A_n \rightarrow A_n$ ，若 f 满足：

- ① 当 $i, j \in A_n, i \neq j$ 时， $f(i) \neq f(j)$ ；
- ② 任取 $m \in A_n$ ，若 $m \geq 2$ ，则有 $m \in \{f(1), f(2), \dots, f(m)\}$.

则称映射 f 为 $A_n \rightarrow A_n$ 是一个“优映射”. 例如：用表 1 表示的映射 $f: A_3 \rightarrow A_3$ 是一个优映射.

表 1

i	1	2	3
$f(i)$	2	3	1

表 2

i	1	2	3	4
$f(i)$		3		

(1) 已知表 2 表示的映射 $f: A_4 \rightarrow A_4$ 是一个优映射，请把表 2 补充完整（只需填出一个满足条件的映射）；

(2) 若映射 $f: A_{10} \rightarrow A_{10}$ 是“优映射”，且方程 $f(i) = i$ 的解恰有 6 个，则这样的“优映射”的个数是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明证明过程或演算步骤.）

15.（本小题 13 分）

甲、乙两人进行射击比赛，各射击 4 局，每局射击 10 次，射击命中目标得 1 分，未命中目标得 0 分. 两人 4 局的得分情况如下：

甲	6	6	9	9
乙	7	9	x	y

(I) 若从甲的 4 局比赛中，随机选取 2 局，求这 2 局的得分恰好相等的概率；

(II) 如果 $x = y = 7$ ，从甲、乙两人的 4 局比赛中随机各选取 1 局，记这 2 局的得分和为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(III) 在 4 局比赛中，若甲、乙两人的平均得分相同，且乙的发挥更稳定，写出 x 的所有可能取值.（结论不要求证明）

16.（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，且 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2 + a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(I) 求 a_2, a_3, a_4 的值；

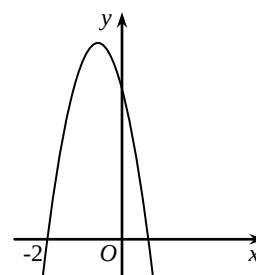
(II) 试猜想这个数列的通项公式，并用数学归纳法证明.

17.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + 4x$ 的极小值为 -8 ，其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(-2, 0)$ ，如图所示.

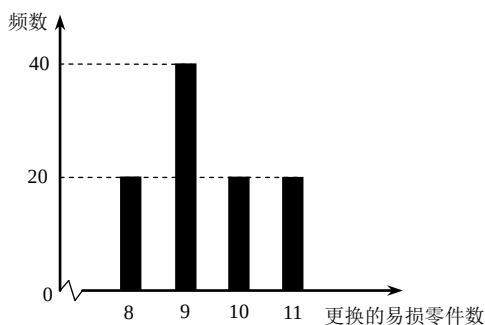
(I) 求 $f(x)$ 的解析式；

(II) 若函数 $y = f(x) - k$ 在区间 $[-3, 2]$ 上有两个不同的零点，求实数 k 的取值范围.



18. (本小题 13 分)

某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰。机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元，在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元。现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得下面柱状图：



以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数， n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数。

- (I) 求 X 的分布列；
- (II) 若要求 $P(X \leq n) \geq 0.5$ ，确定 n 的最小值；
- (III) 以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - a(x - \ln x)$ ($a \in \mathbf{R}$)。

- (I) 当 $a=1$ 时，试求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程；
- (II) 当 $a \leq 0$ 时，试求 $f(x)$ 的单调区间；
- (III) 若存在 $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (0, 1)$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2)$ ，试求 a 的取值范围。

20. (本小题 14 分)

对于项数为 m 的有穷数列 $\{a_n\}$ ，令 $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($k=1, 2, \dots, m$)，即 b_k 为 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 中的最大值，称数列 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的上界数列，如 1, 3, 2, 5 的上界数列是 1, 3, 3, 5。

- (I) 若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的上界数列为 2, 4, 4, 5，写出所有的 $\{a_n\}$ ；
- (II) 设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的上界数列，满足 $a_k + b_{m-k+1} = C$ (C 为常数, $k=1, 2, \dots, m$)，求证： $b_k = a_k$ ；
- (III) 若各项为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的项数 $m=5$ ，其上界数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, $b_5=10$ ，求满足条件的数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的个数。