

2024 年 1 月“九省联考”考后提升卷

高三数学

(考试时间: 150 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 某篮球兴趣小组 7 名学生参加投篮比赛, 每人投 10 个, 投中的个数分别为 8, 5, 7, 5, 8, 6, 8, 则这组数据的众数和中位数分别为 ()

A. 5, 7 B. 6, 7 C. 8, 5 D. 8, 7

【答案】D

【解析】数据由小到大排列为 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8,

因此, 这组数据的众数为 8, 中位数为 7. 故选: D.

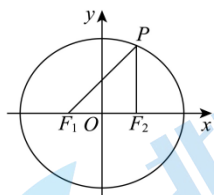
2. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P , 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】依题意, 设椭圆的长轴为 $2a$, 半焦距为 c ,

则 $|F_1F_2| = 2c$, 则 $|PF_2| = 2c$, $|PF_1| = 2\sqrt{2}c$,



于是 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2}c + 2c$,

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{2\sqrt{2c+2c}} = \sqrt{2} - 1. \text{故选: C.}$$

3. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_8 = 0$, $a_{16} + a_{17} = 18$, 则 $S_{17} = (\quad)$

- A. 0 B. 18 C. $\frac{18}{17}$ D. $\frac{35}{17}$

【答案】B

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_{16} + a_{17} = a_8 + 8d + a_8 + 9d = 17d = 18$, 可得 $d = \frac{18}{17}$,

所以, $a_9 = a_8 + d = \frac{18}{17}$,

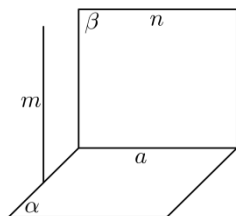
所以, $S_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \frac{17 \times 2a_9}{2} = 17a_9 = 17 \times \frac{18}{17} = 18$, 故选 B.

4. 已知 α 、 β 是两个不同的平面, m 、 n 是两条不同的直线, 则下列命题中不正确的是 ()

- A. 若 $m \perp \alpha$, $n // \alpha$, 则 $m \perp n$ B. 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $\alpha // \beta$, 则 $m // n$
C. 若 $\alpha // \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $m // \beta$ D. 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

【答案】D

【解析】对于 A 选项, 因为 $n // \alpha$, 过直线 n 作平面 β , 使得 $\alpha \cap \beta = a$,



因为 $n // \alpha$, $n \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, 则 $n // a$,

因为 $m \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, 则 $m \perp a$, 故 $m \perp n$, A 对;

对于 B 选项, 若 $m \perp \alpha$, $\alpha // \beta$, 则 $m \perp \beta$, 又因为 $n \perp \beta$, 故 $m // n$, B 对;

对于 C 选项, 若 $\alpha // \beta$, $m \subset \alpha$, 则 $m // \beta$, C 对;

对于 D 选项, 若 $m \perp n$, $m \perp \alpha$, $n // \beta$, 则 α 、 β 平行或相交, D 错.

故选 D.

5. 在党的二十大报告中, 习近平总书记提出要发展“高质量教育”, 促进城乡教育均衡发展. 某地区教育行政部门积极响应党中央号召, 近期将安排甲、乙、丙、丁 4 名教育专家前往某省教育相对落后的三个地区指导教育教学工作, 则每个地区至少安排 1 名专家的概率为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{8}{27}$

【答案】B

【解析】甲、乙、丙、丁4名教育专家到三个地区指导教育教学工作的安排方法共有： $3^4=81$ 种；

每个地区至少安排1名专家的安排方法有： $C_4^2 A_3^3=36$ 种；

由古典概型的计算公式，每个地区至少安排1名专家的概率为： $\frac{36}{81}=\frac{4}{9}$ 。

故选：B。

6. 设 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点， A, B, C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ ，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$
()

A. 9

B. 6

C. 4

D. 3

【答案】D

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ ，抛物线焦点坐标 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ，准线方程： $x=-\frac{1}{2}$ ，

$\because \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ ， $\therefore$ 点 F 是 $\triangle ABC$ 重心，

则 $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$ ， $y_1+y_2+y_3=0$ 。

而 $|FA|=x_1-\left(-\frac{1}{2}\right)=x_1+\frac{1}{2}$ ， $|FB|=x_2-\left(-\frac{1}{2}\right)=x_2+\frac{1}{2}$ ， $|FC|=x_3-\left(-\frac{1}{2}\right)=x_3+\frac{1}{2}$

$\therefore |FA|+|FB|+|FC|=x_1+\frac{1}{2}+x_2+\frac{1}{2}+x_3+\frac{1}{2}=(x_1+x_2+x_3)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$ ，

故选：D。

7. 已知 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ， $\tan 2\theta = -4\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 $\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2 \theta + \sin 2\theta} =$ ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. 1

D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】由题 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ， $\tan 2\theta = -4\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ，

得 $\frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta} = \frac{-4(\tan \theta + 1)}{1-\tan \theta} \Rightarrow -4(\tan \theta + 1)^2 = 2\tan \theta$ ，

则 $(2\tan \theta + 1)(\tan \theta + 2) = 0 \Rightarrow \tan \theta = -2$ 或 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ ，

因为 $\theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ ， $\tan \theta \in (-1, 0)$ ，所以 $\tan \theta = -\frac{1}{2}$ ，

$$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2 \theta + \sin 2\theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta}{2\cos^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta + 1 + 2\tan \theta}{2 + 2\tan \theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{4} + 1 - 1}{2 + (-1)} = \frac{1}{4}.$$

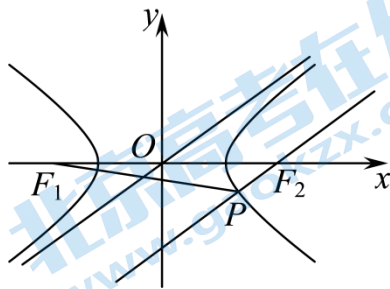
故选：A

8. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过 F_2 且与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线于点 P ，若 $|PF_1| = 4|PF_2|$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{21}$

【答案】B

【解析】



如图，不妨设点 P 为与双曲线渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 平行的直线与双曲线的交点。

由已知结合双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 3|PF_2| = 2a$ ，

所以， $|PF_2| = \frac{2}{3}a$ ， $|PF_1| = \frac{8}{3}a$ ， $\tan \angle F_1F_2P = \frac{b}{a}$ ，且 $\angle F_1F_2P$ 为锐角。

又 $\frac{\sin \angle F_1F_2P}{\cos \angle F_1F_2P} = \tan \angle F_1F_2P = \frac{b}{a}$ ， $\sin^2 \angle F_1F_2P + \cos^2 \angle F_1F_2P = 1$ ，

所以， $\cos \angle F_1F_2P = \frac{a}{c}$ 。

又 $|F_1F_2| = 2c$ ，

在 $\triangle F_1F_2P$ 中，由余弦定理可得

$$\cos \angle F_1F_2P = \frac{|PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |PF_1|^2}{2|PF_2| \cdot |F_1F_2|} = \frac{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + (2c)^2 - \left(\frac{8}{3}a\right)^2}{2 \times \frac{2}{3}a \times 2c} = \frac{a}{c},$$

整理可得， $3c^2 = 7a^2$ ，

所以 $c = \sqrt{\frac{7}{3}}a = \frac{\sqrt{21}}{3}a$ ， $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 。

故选：B。

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 若函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，则 ()

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $g(x)$ 是奇函数
- C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{16}$ 对称
- D. $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增

【答案】ACD

【解析】由题意，可得 $g(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{8}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$ ，

则 $g(x)$ 的最小正周期为 π ，且 $g(x)$ 不是奇函数，所以 A 正确，B 不正确；

当 $x = \frac{3\pi}{16}$ 时，可得 $g(x) = \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，

所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{16}$ 对称，所以 C 正确；

由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ ，得 $2x + \frac{\pi}{8} \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ ，所以 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增，所以 D 正确。

故选：ACD.

10. 已知复数 $z = 2 + i$ ， $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) (i 为虚数单位)， $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，则下列结论正确的是 ()

- A. $\bar{z}$ 的虚部为 $-i$
- B. $z^2 = |z|^2$
- C. $\frac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$
- D. 若 $|z - z_1| \leq 1$ ，则在复平面内 z_1 对应的点形成的图形的面积为 π

【答案】CD

【解析】由题意可得 $\bar{z} = 2 - i$ ，所以 $\bar{z}$ 的虚部为 -1 ，A 错误，

$z^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i$ ， $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，故 $z^2 \neq |z|^2$ ，B 错误，

$\frac{|\bar{z}|}{|z|} = \frac{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 1$ ，C 正确，

$|z - z_1| \leq 1$ 表示点 (x, y) 到 $(2, 1)$ 的距离不大于 1 的点构成的图形，故为以 $(2, 1)$ 为圆心，以 1 为半径的圆以及内部，故面积为 π ，D 正确，

故选：CD

11. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 且 $g(x) = f(4+x)$, $f(x+y) + f(x-y) = g(x-4)f(y)$, $g(-3) = 1$, 则下列说法正确的有 ()

A. $f(1) = 1$

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 的周期为 6

D. $\sum_{k=1}^{2026} f(k) = -3$

【答案】ACD

【解析】对于 A, $g(-3) = f(1) = 1$, 故 A 正确;

$$\because g(x) = f(4+x), \therefore g(x-4) = f(x),$$

$$\therefore f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y), \text{ 令 } y=1,$$

$$\text{则 } f(x+1) + f(x-1) = f(x) \text{ ①},$$

$$\therefore f(x+2) + f(x) = f(x+1) \text{ ②},$$

$$\text{①+②可得 } f(x-1) + f(x+2) = 0,$$

$$\therefore f(x) + f(x+3) = 0, \therefore f(x+3) + f(x+6) = 0,$$

$$\therefore f(x) = f(x+6), \text{ 因此 } T=6, \text{ 故 C 正确};$$

$$\text{令 } x=0, f(y) + f(-y) = f(0)f(y),$$

$$\text{令 } x=1, y=0, 2f(1) = f(1)f(0),$$

$$\text{则 } f(0) = 2, \text{ 故 } x=0, f(y) + f(-y) = 2f(y) \Rightarrow f(y) = f(-y),$$

故 $f(x)$ 为偶函数, 所以 B 不正确;

$$\text{因为 } f(x) = f(x+6) = f(-x), \text{ 故 } f(x) \text{ 关于 } x=3 \text{ 对称},$$

$$\text{且 } f(0) = 2, f(1) = 1, \text{ 令 } x=1, y=1,$$

$$\text{则 } f(2) = -1, \text{ 令 } x=2, y=1, f(3) = -2,$$

$$\text{则 } f(4) = f(2) = -1, f(5) = f(1) = 1,$$

$$f(6) = f(0) = 2, \text{ 一个周期的和为 } 0,$$

$$\text{则 } \sum_{k=1}^{2026} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -3, \text{ 故 D 正确}.$$

故选：ACD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 已知集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x \geq a\}$ 且 $A \subset B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, -3]$

【解析】 集合 $A = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x \geq a\}$ 且 $A \subset B$, 则 $a \leq -3$.

13. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等。“圆柱容球”是阿基米德最为得意的发现. 在一个“圆柱容球”模型中，若球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$ ，则该模型中圆柱的表面积为_____.

【答案】 18π

【解析】 设球的半径为 R ，则圆柱的底面半径为 R ，母线长为 $2R$ ，

则球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$ ，所以 $R = \sqrt{3}$ ，

所以圆柱表面积为 $2\pi R^2 + 2\pi R \times 2R = 6\pi R^2 = 18\pi$.

14. 对于任意两个正实数 a, b ，定义 $a \otimes b = \lambda \cdot \frac{a}{b}$ ，其中常数 $\lambda \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. 若 $u \geq v > 0$ ，且 $u \otimes v$ 与 $v \otimes u$ 都

是集合 $\left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$ 的元素，则 $u \otimes v =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2} / 1.5$

【解析】 由 $u \otimes v$ 与 $v \otimes u$ 都是集合 $\left\{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$ 的元素，

不妨设 $u \otimes v = \lambda \cdot \frac{u}{v} = \frac{1}{2}n_1$, $v \otimes u = \lambda \cdot \frac{v}{u} = \frac{1}{2}n_2$, $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$,

因为 $u \geq v > 0$ ，所以 $0 < \frac{v}{u} \leq 1$ ，

由已知 $\lambda \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ，所以 $\frac{1}{2}n_2 = \lambda \cdot \frac{v}{u} \in (0, 1)$ ，则 $n_2 \in (0, 2)$ ，

又 $n_2 \in \mathbf{Z}$ ，所以 $n_2 = 1$ ，即 $\frac{1}{2} = \frac{\lambda v}{u}$ ，

所以 $\lambda = \frac{u}{2v} \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ，

所以 $\frac{u}{v} \in (\sqrt{2}, 2)$ ， $\frac{u^2}{v^2} \in (2, 4)$ ，

则 $\lambda \cdot \frac{u}{v} = \frac{u^2}{v^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} n_1 \in (1, 2)$, 即 $n_1 \in (2, 4)$,

因为 $n_1 \in \mathbb{Z}$, 所以 $n_1 = 3$, 则 $\frac{1}{2} n_1 = \frac{3}{2}$, 即 $u \otimes v = \frac{3}{2}$.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 + ax + 2$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线与直线 $2x + 3y = 0$ 垂直.

(1) 求 a ;

【解】(1) $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x + a$, 则 $f'(2) = \frac{1}{2} + 2 \times 2 + a = \frac{9}{2} + a$,

由题意可得 $\left(\frac{9}{2} + a\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, 解得 $a = -3$;

(2) 由 $a = -3$, 故 $f(x) = \ln x + x^2 - 3x + 2$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x > 0$,

故当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 、 $(1, +\infty)$, $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

故 $f(x)$ 有极大值 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{4} - \ln 2$,

有极小值 $f(1) = \ln 1 + 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$.

16. (15 分) 某班为了庆祝我国传统节日中秋节, 设计了一个小游戏: 在一个不透明箱中装有 4 个黑球, 3 个红球, 1 个黄球, 这些球除颜色外完全相同. 每位学生从中一次随机摸出 3 个球, 观察颜色后放回. 若摸出的球中有 X 个红球, 则分得 X 个月饼; 若摸出的球中有黄球, 则需要表演一个节目.

(1) 求一学生既分得月饼又要表演节目的概率;

(2) 求每位学生分得月饼数的概率分布和数学期望.

【解】(1) 记“一学生既分得月饼又要表演节目”为事件 A ,

可知有两种可能: “2 个红球 1 个黄球”和“1 个黑球, 1 个红球, 1 个黄球”,

所以 $P(A) = \frac{C_3^2 C_1^1 + C_4^1 C_3^1 C_1^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$.

(2) 由题意可知 X 的可能取值为: 0, 1, 2, 3, 则有:

$P(X=0) = \frac{C_5^3 C_3^0}{C_8^3} = \frac{5}{28}$, $P(X=1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}$,

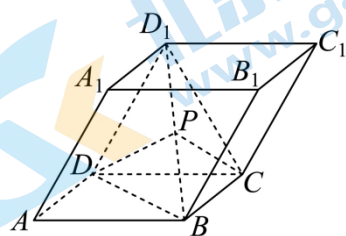
$$P(X=2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}, P(X=3) = \frac{C_5^0 C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56},$$

可得 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}.$$

17. (15 分) 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 和侧面 BCC_1B_1 都是矩形, $D_1D = D_1C = \sqrt{5}$, $AB = 2BC = 2$.



(1) 求证: $AD \perp D_1C$;

(2) 若点 P 的在线段 BD_1 上, 且二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 求 $\frac{D_1P}{PB}$ 的值.

【解】(1) 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

底面 $ABCD$ 和侧面 BCC_1B_1 都是矩形, 则侧面 ADD_1A_1 都是矩形,

有 $AD \perp DC$, $AD \perp DD_1$,

$DC \cap DD_1 = D$, $DC, DD_1 \subset$ 平面 DCC_1D_1 ,

所以 $AD \perp$ 平面 DCC_1D_1 ,

又因为 $D_1C \subset$ 平面 DCC_1D_1 , 所以 $AD \perp D_1C$.

(2) $D_1D = D_1C = \sqrt{5}$, $AB = 2BC = 2$.

取 E, F 分别为 DC, AB 的中点, 连接 ED_1 , EF ,

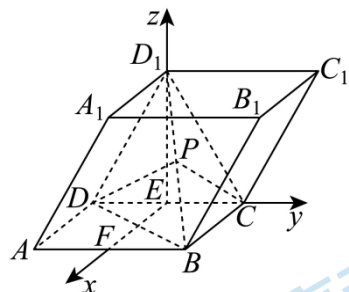
因为 $EF \parallel AD$, $AD \perp$ 平面 DCC_1D_1 ,

所以 $EF \perp$ 平面 DCC_1D_1 ,

因为 $D_1D = D_1C$ ，所以 $ED_1 \perp DC$ ，

所以以 E 为原点， EF, EC, ED_1 所在直线分别为 x, y, z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，



因为 $D_1D = D_1C = \sqrt{5}$ ， $AB = 2BC = 2$ ，则 $ED_1 = 2$ 。

则 $C(0, 1, 0), D(0, -1, 0), D_1(0, 0, 2), B(1, 1, 0)$ ，

设 $\overrightarrow{D_1P} = \lambda \overrightarrow{D_1B} (0 \leq \lambda \leq 1)$ ，即 $\overrightarrow{D_1P} = \lambda(1, 1, -2)$ ，可得 $P(\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$ ，

$\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{CP} = (\lambda, \lambda - 1, 2 - 2\lambda)$ ，

设平面 PCD 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CP} = \lambda x + (\lambda - 1)y + (2 - 2\lambda)z = 0 \end{cases}$$

令 $z = \lambda$ ，则 $x = 2\lambda - 2, y = 0$ ，得 $\vec{n} = (2\lambda - 2, 0, \lambda)$ ，

又平面 BCD 的一个法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ ，

因为二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$ ，

$$\text{则有 } |\cos \vec{n} \cdot \vec{m}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{\lambda}{\sqrt{(2\lambda - 2)^2 + \lambda^2}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理得， $3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ ，解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ ，或 $\lambda = 2$ （舍），

所以 $\overrightarrow{D_1P} = \frac{2}{3} \overrightarrow{D_1B}$ ，则 $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{D_1B}$ ，有 $\frac{D_1P}{PB}$ 的值为 2。

18. (17 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ， E 的准线 l 交 x 轴于点 K ，过 K 的直线 l 与抛物线 E 相切于点 A ，且交 y 轴正半轴于点 P 。已知 E 上的动点 B 到点 F 的距离与到直线 $x = -2$ 的距离之和的最小值为 3。

(1) 求抛物线 E 的方程；

(2) 过点 P 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 y 轴的直线与线段 OA 交于点 T , 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

【解】(1) 设 $B(x_0, y_0), x_0 \geq 0$, 由题意知准线 $l: x = -\frac{p}{2}, F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

由抛物线的定义可知点 B 到点 F 的距离等于点 B 到准线 l 的距离,

所以点 B 到点 F 的距离与到直线 $x = -2$ 的距离之和为 $x_0 + \frac{p}{2} + x_0 + 2 = 2x_0 + 2 + \frac{p}{2}$,

由题意知当 $x_0 = 0$ 时, 距离之和最小,

所以 $2 + \frac{p}{2} = 3$, 解得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 由 (1) 知 $K(-1, 0)$, 设 $AK: x = my - 1$,

联立方程 $\begin{cases} x = my - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 得 $y^2 - 4my + 4 = 0$,

由 $\Delta = 0$ 得 $16m^2 - 16 = 0$, 解得 $m = \pm 1$, 又与 y 轴交于正半轴, 所以 $m = 1$,

由 $y^2 - 4y + 4 = 0$ 解得 $y = 2$, 所以点 $A(1, 2)$,

所以直线 $OA: y = 2x$,

所以直线 $AK: y = x + 1$, 所以 $P(0, 1)$,

因为 MN 斜率存在且不为零, 所以设 $MN: y = kx + 1 (k \neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = kx + 1 \end{cases}$, 消去 x , 得 $ky^2 - 4y + 4 = 0 (k \neq 0)$,

则 $\Delta = 16(1 - k) > 0$, 所以 $k < 1$ 且 $k \neq 0$,

$y_1 + y_2 = y_1 y_2 = \frac{4}{k}$,

又直线 $OA: y = 2x$, 令 $x = x_1$, 得 $y = 2x_1$, 所以 $T(x_1, 2x_1)$,

因为 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$, 所以 $H(x_1, 4x_1 - y_1)$,

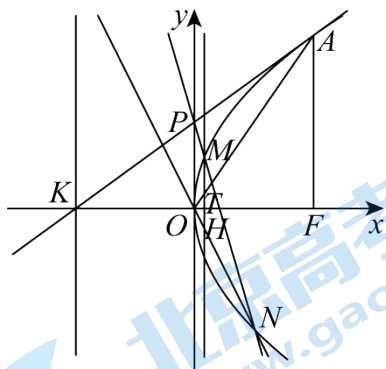
所以 $K_{NH} = \frac{y_1 + y_2 - 4x_1}{x_2 - x_1}$,

所以直线 NH 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_1 + y_2 - 4x_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$,

$$\text{所以 } y = \frac{y_1 + y_2 - 4x_1}{x_2 - x_1}x + y_2 - \frac{x_2(y_1 + y_2 - 4x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 + y_2 - 4x_1}{x_2 - x_1}x + \frac{4x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\text{因为 } 4x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = 4 \times \frac{y_1^2}{4} \times \frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4} \times y_2 - \frac{y_2^2}{4} y_1 = \frac{y_1y_2}{4} [y_1y_2 - (y_1 + y_2)] = 0,$$

$$\text{所以直线 } NH \text{ 为 } y = \frac{y_1 + y_2 - 4x_1}{x_2 - x_1}x, \text{ 所以 } NH \text{ 恒过定点 } (0, 0).$$



19. (17分) 今有一个“数列过滤器”，它会将进入的无穷非减正整数数列删去某些项，并将剩下的项按原来的位置排好形成一个新的无穷非减正整数数列，每次“过滤”会删去数列中除以 M 余数为 N 的项，将这样的操作记为 $L(M, N)$ 操作. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷非减正整数数列.

(1) 若 $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^+$, $\{a_n\}$ 进行 $L(2, 1)$ 操作后得到 $\{b_n\}$, 设 $a_n + b_n$ 前 n 项和为 S_n

①求 S_n .

②是否存在 $p, q, r \in \mathbb{N}^+$, 使得 S_p, S_q, S_r 成等差? 若存在, 求出所有的 (p, q, r) ; 若不存在, 说明理由.

(2) 若 $a_n = n, n \in \mathbb{N}^+$, 对 $\{a_n\}$ 进行 $L(4, 0)$ 与 $L(4, 1)$ 操作得到 $\{b_n\}$, 再将 $\{b_n\}$ 中下标除以 4 余数为 0, 1 的项删掉最终得到 $\{c_n\}$ 证明: 每个大于 1 的奇平方数都是 $\{c_n\}$ 中相邻两项的和.

【解】(1) ①由 $a_n = 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^+$ 知: 当 $n \geq 2$ 时 $\frac{a_n}{2} \in \mathbb{N}^+$, 故 $b_n = 2^n, n \in \mathbb{N}^+$.

$$\text{则 } S_n = 3 \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 3(2^n - 1), n \in \mathbb{N}^+.$$

②解: 假设存在, 由 S_n 单调递增, 不妨设 $p < q < r, 2S_q = S_p + S_r, p, q, r \in \mathbb{N}^+$

化简得 $2^{q-p+1} = 1 + 2^{r-q}$, 显然左式为偶数, 右式为奇数, 矛盾, 故不存在.

(2) 易知 $7a_{4n} = 4n, a_{4n-3} = 4n-3, a_{4n-2} = 4n-2, a_{4n-1} = 4n-1$,

所以保留 a_{4n-2}, a_{4n-1} , 则 $b_{2n-1} = 4n-2, b_{2n} = 4n-1$.

又 $b_{4n+1} = 8n+2, b_{4n+2} = 8n+3, b_{4n+3} = 8n+6, b_{4n+4} = 8n+7$, 将 b_{4n}, b_{4n+1} 删去,

得到 c_n ，则 $c_{2n+1} = 8n + 3, c_{2n+2} = 8n + 6$

也即 $c_n = \begin{cases} 8n - 5, n = 2k - 1 \\ 8n - 2, n = 2k \end{cases}, k \in N^+.$

记 $r_k = \frac{k(k+1)}{2}$ ，下面证明： $(2k+1)^2 = c_{r_k} + c_{r_k+1}$ 。

由 $r_{4m} = 8m^2 + 2m, r_{4m+1} = 8m^2 + 6m + 1, r_{4m+2} = 8m^2 + 10m + 3, r_{4m+3} = 8m^2 + 14m + 6$,

知： $c_{r_{4m}} + c_{r_{4m}+1} = c_{8m^2+2m} + c_{8m^2+2m+1} = 8(4m^2+m) - 2 + 8(4m^2+m+1) = [2(4m+1)]^2$

$c_{r_{4m+1}} + c_{r_{4m+1}+1} = c_{8m^2+6m+1} + c_{8m^2+6m+2} = [2(4m+1)+1]^2$,

同理可得： $c_{r_{4m+2}} + c_{r_{4m+2}+1} = [2(4m+2)+1]^2, c_{r_{4m+3}} + c_{r_{4m+3}+1} = [2(4m+3)+1]^2$,

合并以上四式，便证明了对任意的 $k \in N^+$ ，都有 $(2k+1)^2 = c_{r_k} + c_{r_k+1}$ 。

因此，原命题得证。