

数 学 试 卷

考生须知

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 本试卷共 7 页, 分为两个部分, 第一部分为选择题, 27 个小题(共 81 分); 第二部分为解答题, 4 个小题(共 19 分)。
3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答; 第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答, 作图时必须使用 2B 铅笔。
4. 考试结束后, 考生应将试卷、答题卡放在桌面上, 待监考员收回。

参考公式: 锥体的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 为锥体的底面积, h 为锥体的高。

第一部分 选择题 (每小题 3 分, 共 81 分)

在每个小题给出的四个备选答案中, 只有一个是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = [0, 1]$, $B = [-1, 1]$, 那么 $A \cup B$ 等于
A. $[0, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $\{0\}$ D. $[-1, 1, 0]$
2. 已知向量 $a = (1, 1)$, $b = (1, 2)$, 那么 $a + b$ 等于
A. $(0, -1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 2)$
3. 过点 $A(3, 0)$ 和 $B(0, 2)$ 的直线的方程为
A. $2x - 3y - 6 = 0$ B. $3x + 2y - 4 = 0$
C. $2x + 3y - 6 = 0$ D. $x + 2y - 4 = 0$
4. 函数 $y = \lg(x+2)$ 的定义域是
A. $[2, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-2, +\infty)$
5. 如果幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象经过点 $(4, 2)$, 那么 α 的值是
A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
6. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, $A(-1, -1, -1)$, $B(1, 1, 1)$, 那么 $|AB|$ 等于
A. 2 B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

7. 2018 年 10 月 24 日, 我国超级工程——港珠澳大桥正式通车运营, 它是世界上最长的跨海大桥, 全长 55 千米, 采用 Y 型线路, 连接香港、珠海和澳门三地. 如果从甲、乙、丙三位同学中任选一位同学前往港珠澳大桥参观, 那么甲同学被选中的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

8. 为深入贯彻落实《国务院办公厅关于强化学校体育促进学生身心健康全面发展的意见》, 我市提出: 到 2020 年, 全市义务教育阶段学生体质健康合格率达到 98%, 基础教育阶段学生优秀率达到 15% 以上. 某学校现有小学和初中学生共 2000 人, 为了了解学生的体质健康合格情况, 决定采用分层抽样的方法从全校学生中抽取一个容量为 400 的样本, 其中被抽到的初中学生人数为 180, 那么这所学校的初中学生人数为

- A. 800 B. 900 C. 1000 D. 1100

9. 化简 $\sin(\alpha + \pi)$ 为

- A. $-\sin\alpha$ B. $\sin\alpha$ C. $-\cos\alpha$ D. $\cos\alpha$

10. 如果直线 $2x - y = 0$ 与直线 $x + my - 1 = 0$ 垂直, 那么 m 的值为

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

11. 已知向量 $a = (2, -1)$, $b = (1, m)$, 且 $a = 2b$, 那么 m 的值为

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

12. 直线 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ 的倾斜角的度数是

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

13. 已知直线 l 经过点 $P(1, 1)$, 且与直线 $x - y + 2 = 0$ 平行, 那么直线 l 的方程为

- A. $x - y - 2 = 0$ B. $x + y - 2 = 0$ C. $x - y = 0$ D. $x + y - 4 = 0$

14. 函数零点的涵义是

- A. 一个点 B. 函数图象与 x 轴的交点的横坐标
C. 函数图象与 x 轴的交点 D. 函数图象与 y 轴的交点的纵坐标

15. 在函数 $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \log_3 x$ 中, 奇函数是

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^2$ C. $y = 2^x$ D. $y = \log_3 x$

16. 在相距 4 千米的 A, B 两点分别观测目标点 C , 如果 $\angle CAB = 75^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$, 那么 A, C 两点间的距离是
- A. $2\sqrt{2}$ 千米 B. $2\sqrt{3}$ 千米 C. $2\sqrt{6}$ 千米 D. $(2+2\sqrt{3})$ 千米
17. 已知角 α 的终边经过点 $P(5, 12)$, 那么 $\sin \alpha$ 的值是
- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$
18. 已知直线 $l: x+y+2=0$ 和圆 $C: (x-1)^2+(y+1)^2=1$, 那么圆心 C 到直线 l 的距离是
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
19. 函数 $f(x) = 2\sin^2 x$ 的最小正周期是
- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π
20. 计算 $(\frac{1}{4})^0 + \log_2 2$ 的结果为
- A. 3 B. $\frac{5}{4}$ C. 2 D. 1
21. 已知两条直线 m, n 和平面 α , 且 $m \perp \alpha$, 要得到结论 $m \parallel n$, 还需要添加一个已知条件, 这个条件应是 ① $n \perp \alpha$, ② $n \parallel \alpha$, ③ $n \subset \alpha$, ④ $n \not\subset \alpha$ 中的
- A. ① B. ② C. ③ D. ④
22. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$ 如果 $f(m) = 4$, 那么实数 m 的值为
- A. 1 B. -2 C. -8 D. $-\frac{1}{2}$
23. 将函数 $y = 2\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 所得图象的函数表达式是
- A. $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ B. $y = 2\sin(x - \frac{\pi}{6})$
C. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ D. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
24. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 如果 $b = 1, c = \sqrt{3}, B = 30^\circ$, 那么角 A 的度数是
- A. 30° 或 60° B. 45° 或 60° C. 30° 或 90° D. 45° 或 120°

第二部分 解答题 (共 19 分)

28. (本小题满分 5 分)

某同学解答一道三角函数题：“已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, $\omega > 0$, 其最小正周期为 π . (I) 求 $f(0)$ 和 ω 的值; (II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值及相应 x 的值.”

该同学解答过程如下:

解答: (I) $f(0) = 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$;

因为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$, 且 $\omega > 0$,

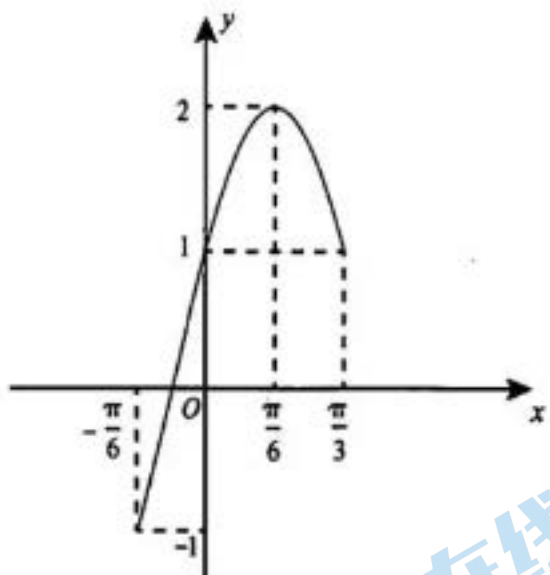
所以 $\omega = 2$.

(II) 画出函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 在

$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的图象, 由图象

可知, 当 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$

的最小值 $f(x)_{\min} = -1$.



下表列出了某些数学知识:

任意角的概念	任意角的正弦、余弦、正切的定义
弧度制的概念	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切的诱导公式
弧度与角度的互化	函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的图象
三角函数的周期性	正弦函数、余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的性质
同角三角函数的基本关系式	正切函数在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质
两角差的余弦公式	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义
两角差的正弦、正切公式	参数 A , ω , φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象变化的影响
两角和的正弦、余弦、正切公式	半角的正弦、余弦、正切公式
二倍角的正弦、余弦、正切公式	积化和差、和差化积公式

请写出该同学在解答过程中用到了此表中的哪些数学知识.

29. (本小题满分 5 分)

阅读下面题目及其证明过程, 在 ① ~ ⑤ 处填写适当的内容.

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,
 $\angle BAC = 90^\circ$, E, F 分别为 AB_1, CB_1 的中点.

(I) 求证: $EF \parallel$ 平面 ABC ;

(II) 求证: $AB \perp A_1C$.

解答: (I) 证明: 在 $\triangle AB_1C$ 中,

因为 E, F 分别为 AB_1, CB_1 的中点,

所以 ①.

因为 $EF \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $EF \parallel$ 平面 ABC .

(II) 证明: 因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 ②.

因为 $\angle BAC = 90^\circ$,

所以 $AB \perp AC$.

又因为 $AC \cap AA_1 = A$,

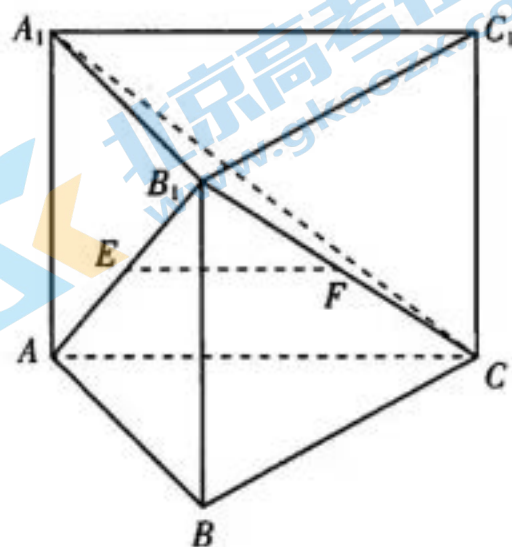
所以 ③.

因为 $A_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

所以 $AB \perp A_1C$.

上述证明过程中, 第 (I) 问的证明思路是先证 “线线平行”, 再证

“线面平行”; 第 (II) 问的证明思路是先证 ④, 再证 ⑤, 最后证 “线线垂直”.



30. (本小题满分 5 分)

某同学解答一道解析几何题: “已知圆 $O: x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 与直线 $l_1: x = -2$ 和 $l_2: x = 2$ 分别相切, 点 C 的坐标为 $(-1, 0)$. A, B 两点分别在直线 l_1 和 l_2 上, 且 $AC \perp BC$, $|AC| = |BC|$, 试推断线段 AB 的中点是否在圆 O 上.”

该同学解答过程如下：

解答：因为圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与直线 $l_1: x = -2$ 和 $l_2: x = 2$ 分别相切，

所以 $2r = 4, r = 2$ 所以 $x^2 + y^2 = 4$. 由题意可设 $A(-2, m), B(2, n)$,

因为 $AC \perp BC$, 点 C 的坐标为 $(-1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 即 $mn = -3$. ①

因为 $|AC| = |BC|$,

所以 $\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{9 + n^2}$.

化简得 $m^2 - n^2 = 8$. ②

由 ①② 可得 $8mn = -24, 3m^2 - 3n^2 = 24$, 所以 $3m^2 + 8mn - 3n^2 = 0$.

因式分解得 $(3m - n)(m + 3n) = 0$, 所以 $n = 3m$, 或 $m = -3n$.

解得 $\begin{cases} m = -3, \\ n = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = 3, \\ n = -1, \end{cases}$

所以 线段 AB 的中点坐标为 $(0, -1)$ 或 $(0, 1)$.

所以 线段 AB 的中点不在圆 O 上.

请指出上述解答过程中的错误之处，并写出正确的解答过程.

31. (本小题满分 4 分)

从 2008 年开始的十年间，中国高速铁路迅猛发展，已经建成“四纵四横”网络，“八纵八横”格局正在构建. 到 2018 年，中国高速铁路新里程已超过两万五千千米，铸就了一张新的“国家名片”. 京沪高速铁路是北京南站到上海虹桥站之间的一条高速铁路，全长约 1318 km. 某机构研究发现：高速列车在该线路上单程运行一次的总费用 $f(x)$ (万元) 与平均速度 x (km/h) 及其它费用 a ($3 \leq a \leq 4$) (万元) 之间近似满足函数关系 $f(x) = \frac{1318a}{x} + 0.0006x^2$ ($200 \leq x \leq 400$). 问：当高速列车在该线路上运行的平均速度是多少时，单程运行一次总费用最小？

2019 年北京市第一次普通高中学业水平合格性考试

数学试卷答案及评分参考

[说明]

1. 第一部分选择题，机读阅卷。
2. 第二部分解答题。为了阅卷方便，解答题中的推导步骤写得较为详细，考生只要写明主要过程即可。若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分。解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

第一部分 选择题（共 81 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
答案	D	C	C	D	D	D	A	B	A
题号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
答案	D	B	A	C	B	A	C	D	C
题号	19	20	21	22	23	24	25	26	27
答案	B	C	A	B	A	C	A	D	D

第二部分 解答题（共 19 分）

28.（本小题满分 5 分）

某同学解答一道三角函数题：“已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, $\omega > 0$ ，其最小正周期为 π 。（I）求 $f(0)$ 和 ω 的值；（II）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的最小值及相应 x 的值。”

该同学解答过程如下：

解答: (I) $f(0) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$;

因为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$, 且 $\omega > 0$,

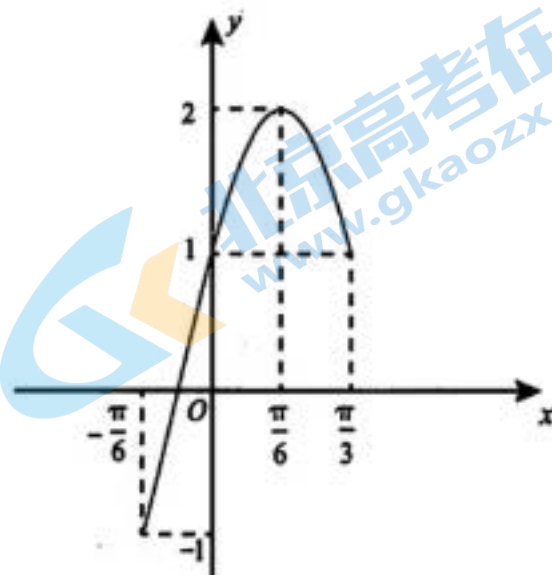
所以 $\omega = 2$.

(II) 画出函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 在

$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的图象, 由图象可知, 当

$x = -\frac{\pi}{6}$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值

$f(x)_{\min} = -1$.



下表列出了某些数学知识:

任意角的概念	任意角的正弦、余弦、正切的定义
弧度制的概念	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切的诱导公式
弧度与角度的互化	函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 的图象
三角函数的周期性	正弦函数、余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的性质
同角三角函数的基本关系式	正切函数在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质
两角差的余弦公式	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义
两角差的正弦、正切公式	参数 A, ω, φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象变化的影响
两角和的正弦、余弦、正切公式	半角的正弦、余弦、正切公式
二倍角的正弦、余弦、正切公式	积化和差、和差化积公式

请写出该同学在解答过程中用到了此表中的哪些数学知识.

解答: 弧度制的概念, 三角函数的周期性, 函数 $y = \sin x$ 的图象, 正弦函数在区间 $[0, 2\pi]$

上的性质, 参数 A, ω, φ 对函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象变化的影响.5 分

29. (本小题满分 5 分)

阅读下面题目及其证明过程，在①~⑤处填写适当的内容。

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ ， $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， E, F 分别为 AB_1, CB_1 的中点。

(I) 求证： $EF \parallel$ 平面 ABC ；

(II) 求证： $AB \perp A_1C$ 。

解答：(I) 证明：在 $\triangle AB_1C$ 中，

因为 E, F 分别为 AB_1, CB_1 的中点，

所以 ①。

因为 $EF \not\subset$ 平面 ABC ， $AC \subset$ 平面 ABC ，

所以 $EF \parallel$ 平面 ABC 。

(II) 证明：因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ， $AB \subset$ 平面 ABC ，

所以 ②。

因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，

所以 $AB \perp AC$ 。

又因为 $AC \perp AA_1$ ，

所以 ③。

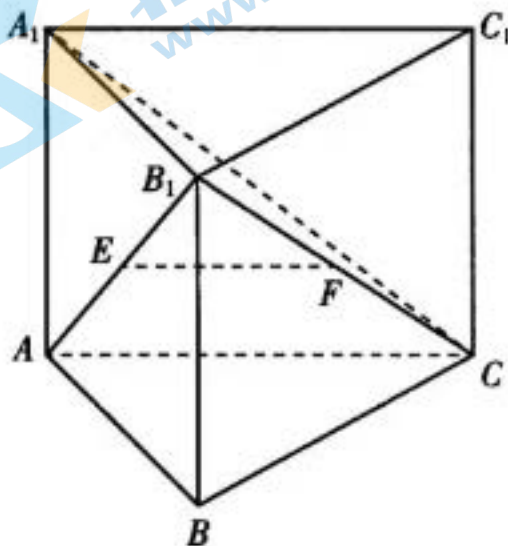
因为 $A_1C \subset$ 平面 AA_1C_1C ，

所以 $AB \perp A_1C$ 。

上述证明过程中，第 (I) 问的证明思路是先证“线线平行”，再证“线面平行”；第 (II) 问的证明思路是先证 ④，再证 ⑤，最后证“线线垂直”。

解答：① $EF \parallel AC$ ；② $AA_1 \perp AB$ ；③ $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C ；④ “线线垂直”；

⑤ “线面垂直”。(每空 1 分，共 5 分)



30. (本小题满分 5 分)

某同学解答一道解析几何题：“已知圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与直线 $l_1: x = -2$ 和 $l_2: x = 2$ 分别相切，点 C 的坐标为 $(-1, 0)$ ， A, B 两点分别在直线 l_1 和 l_2 上，且 $AC \perp BC$ ， $|AC| = |BC|$ ，试推断线段 AB 的中点是否在圆 O 上。”

该同学解答过程如下：

解答：因为 圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与直线 $l_1: x = -2$ 和 $l_2: x = 2$ 分别相切，

所以 $2r = 4$ ， $r = 2$ ，

所以 $x^2 + y^2 = 4$ 。

由题意可设 $A(-2, m), B(2, n)$ ，

因为 $AC \perp BC$ ，点 C 的坐标为 $(-1, 0)$ ，

所以 $AC \cdot BC = 0$ ，即 $mn = -3$ 。①

因为 $|AC| = |BC|$ ，

所以 $\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{9 + n^2}$ 。

化简得 $m^2 - n^2 = 8$ 。②

由①②可得 $8mn = -24$ ， $3m^2 - 3n^2 = 24$ ，

所以 $3m^2 + 8mn - 3n^2 = 0$ 。

因式分解得 $(3m - n)(m + 3n) = 0$ ，

所以 $n = 3m$ ，或 $m = -3n$ 。

解得 $\begin{cases} m = -3, \\ n = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = 3, \\ n = -1, \end{cases}$

所以 线段 AB 的中点坐标为 $(0, -1)$ 或 $(0, 1)$ 。

所以 线段 AB 的中点不在圆 O 上。

请指出上述解答过程中的错误之处，并写出正确的解答过程.

解答: $mn = -3$ 不对.

.....1 分

由 $AC \cdot BC = 0$, 即 $mn = 3$. ①

因为 $|AC| = |BC|$, 点 C 的坐标为 $(-1, 0)$,

所以 $\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{9 + n^2}$.

化简得 $m^2 - n^2 = 8$. ②

由①②解得 $\begin{cases} m = 3, \\ n = 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -3, \\ n = -1. \end{cases}$

所以 线段 AB 的中点坐标 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$.

所以 线段 AB 的中点在圆 O 上.

.....5 分

31. (本小题满分 4 分)

从 2008 年开始的十年间, 中国高速铁路迅猛发展, 已经建成“四纵四横”网络, “八纵八横”格局正在构建. 到 2018 年, 中国高速铁路新里程已超过两万五千千米, 铸就了一张新的“国家名片”. 京沪高速铁路是北京南站到上海虹桥站之间的一条高速铁路线, 全长约 1318km. 某机构研究发现: 高速列车在该线路上单程运行一次的总费用 $f(x)$ (万元) 与平均速度 x (km/h) 及其它费用 a ($3 \leq a \leq 4$) (万元) 之间近似满足函数关系 $f(x) = \frac{1318a}{x} + 0.0006x^2$ ($200 \leq x \leq 400$). 问: 当高速列车在该线路上运行的平均速度是多少时, 单程运行一次总费用最小?

解答: 任取 $x_1, x_2 \in [200, 400]$, 不妨设 $x_2 > x_1$, 令 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } \Delta y &= f(x_2) - f(x_1) = \frac{1318a}{x_2} + 0.0006x_2^2 - \left(\frac{1318a}{x_1} + 0.0006x_1^2 \right) \\ &= \frac{-1318a(x_2 - x_1) + 0.0006x_1x_2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_1x_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)[0.0006x_1x_2(x_1 + x_2) - 1318a]}{x_1x_2}.$$

因为 $200 \leq x_1 \leq 400$, $200 \leq x_2 \leq 400$,

所以 $400 < x_1 + x_2 < 800$, $40000 < x_1x_2 < 160000$.

所以 $24 < 0.0006x_1x_2 < 96$.

所以 $9600 < 0.0006x_1x_2(x_1 + x_2) < 76800$.

又因为 $3 \leq a \leq 4$,

所以 $3954 \leq 1318a \leq 5272$.

所以 $4328 < 0.0006x_1x_2(x_1 + x_2) - 1318a < 72846$.

所以 $0.0006x_1x_2(x_1 + x_2) - 1318a > 0$.

因为 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 > 0$,

所以 $\frac{(x_2 - x_1)[0.0006x_1x_2(x_1 + x_2) - 1318a]}{x_1x_2} > 0$.

于是当 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ 时, $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) > 0$,

所以 函数 $f(x)$ 在定义域 $[200, 400]$ 上是单调递增函数.

所以 当 $x = 200$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值.

故运行的平均速度是 200km/h 时, 单程运行一次总费用最小.4 分