



保密★启用前

湛江市 2021 年普通高考测试(二)

数 学

2021.4

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。
 2. 回答选择题时，写出每小题的答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应的题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
 3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
- 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{1-5i}{1-i}$ ，则复数 z 的虚部为

- A. 2 B. -2 C. 2i D. -2i

2. 已知 $a > b$ ，则

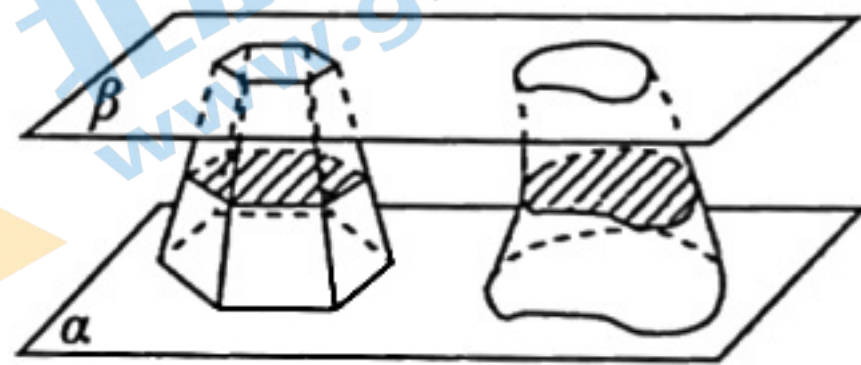
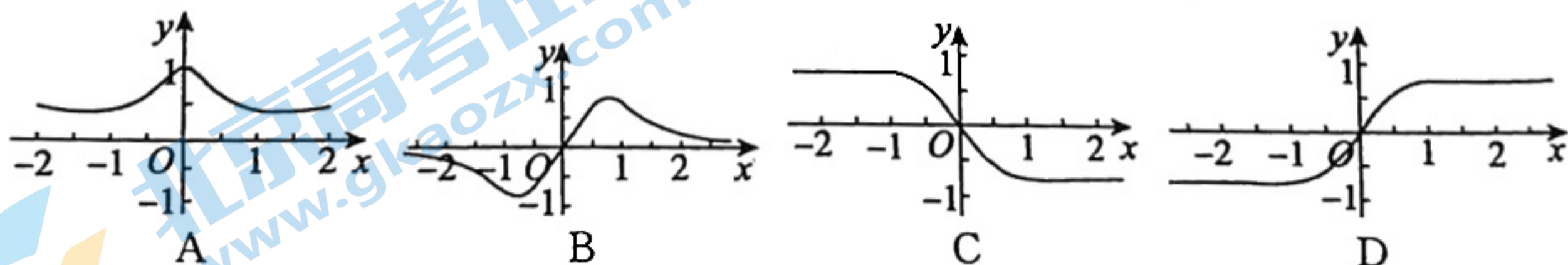
- A. $\ln a > \ln b$ B. $a^2 > b^2$ C. $2^a > 2^b$ D. $a^{-1} > b^{-1}$

3. $(1+3x)^2 + (1+2x)^3 + (1+x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$

- A. 49 B. 56 C. 59 D. 64

4. 中国南北朝时期数学家、天文学家祖冲之、祖暅父子总结了魏晋时期著名数学家刘徽的有关工作，提出“幂势既同，则积不容异”。“幂”是截面积，“势”是几何体的高. 详细点说就是，界于两个平行平面之间的两个几何体，被任一平行于这两个平面的平面所截，如果两个截面的面积相等，则这两个几何体的体积相等. 上述原理在中国被称为祖暅原理. 一个上底面边长为 1，下底面边长为 2，高为 $2\sqrt{3}$ 的正六棱台与一个不规则几何体满足“幂势既同”，则该不规则几何体的体积为

- A. 16
B. $16\sqrt{3}$
C. $18\sqrt{3}$
D. 21

5. 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{x^2 + 1}$ 的部分图象大致为6. 在 $\angle A = 90^\circ$ 的等腰直角 $\triangle ABC$ 中， E 为 AB 的中点， F 为 BC 的中点， $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AF} + \mu \overrightarrow{CE}$ ，则 $\lambda =$

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

准考证号

姓名

7. 已知 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点, 过椭圆 C 的下顶点且斜率为 $\frac{3}{4}$ 的直线与以点 F 为圆心、半焦距为半径的圆相切, 则椭圆 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = x^2 e^{1-x} - a$ 有三个零点, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(0, \frac{2}{e})$ B. $(0, \frac{4}{e})$ C. $(0, \frac{2}{e^2})$ D. $(0, \frac{4}{e^2})$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的。全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 某学校组织学生参加劳动实践, 学生需要手工制作一种模具, 劳动实践结束后, 学校任选了一个班级, 统计了该班每人制作的合格品个数, 其结果用茎叶图记录如下:

男		女
4 4 3	0	9
6 5 5 2	1	0 1 1 2 3 3 5 6 7 7 8 8 9
7 6 5 3 2	2	2
8 6 3 0	3	1 3 5
8 1 0	4	

由以上统计结果, 下列判断正确的是

- A. 男生制作合格品个数的方差更大
B. 女生制作合格品个数的分布更接近正态分布
C. 男生制作合格品个数的分布更接近正态分布
D. 该班女生制作合格模具的平均能力要低于男生

10. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x - 18 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + ax + a^2 - 27 < 0\}$, 则下列命题中正确的是

- A. 若 $A = B$, 则 $a = -3$
B. 若 $A \subseteq B$, 则 $a = -3$
C. 若 $B = \emptyset$, 则 $a \leq -6$ 或 $a \geq 6$
D. 若 $B \subseteq A$ 时, 则 $-6 < a \leq -3$ 或 $a \geq 6$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$, 则

- A. $f(x + \pi) = f(-x)$ B. $f(x)$ 的最大值为 $4 - 2\sqrt{2}$
C. $f(x)$ 是奇函数 D. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

12. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_n} = 2^n$, 则

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列 B. $a_{n+1} \leq a_n$ 恒成立

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao) 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，点 P 是双曲线 C 上一点，且 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{2}$ ， $\triangle F_1 P F_2$ 的面积为 a^2 ，则双曲线 C 的渐近线方程为_____。

14. 写出一个以 $(1, 0)$ 为对称中心的偶函数_____，该函数的最小正周期是_____。
(第一空 3 分，第二空 2 分)

15. 现有 5 个参加演讲比赛的名额，要分配给甲、乙、丙三个班级，要求每班至少要分配一个名额，则甲班恰好分配到两个名额的概率为_____。

16. 在三棱锥 $D-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 是以 $\angle A$ 为直角的等腰直角三角形， $\triangle DBC$ 是边长为 2 的等边三角形，二面角 $A-BC-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的表面积为_____。

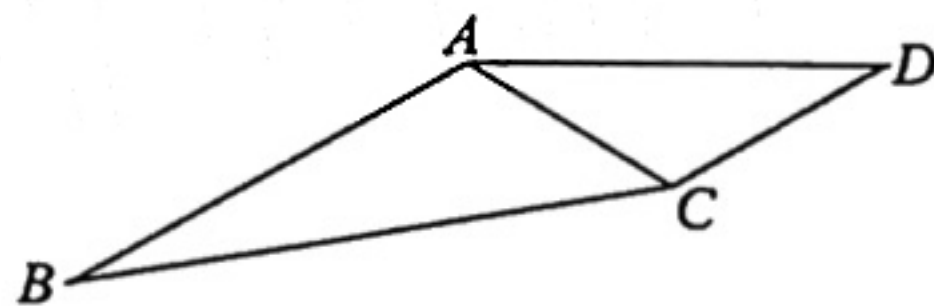
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \frac{5\pi}{6}$ ， $\angle ADC = \frac{\pi}{4}$ ， $AB = 2AC = 2\sqrt{2}$ ， $CD = 1$ 。

(1) 求 $\cos \angle ACD$ 的值；

(2) 求 BC 的值。



18. (12 分)

已知：数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

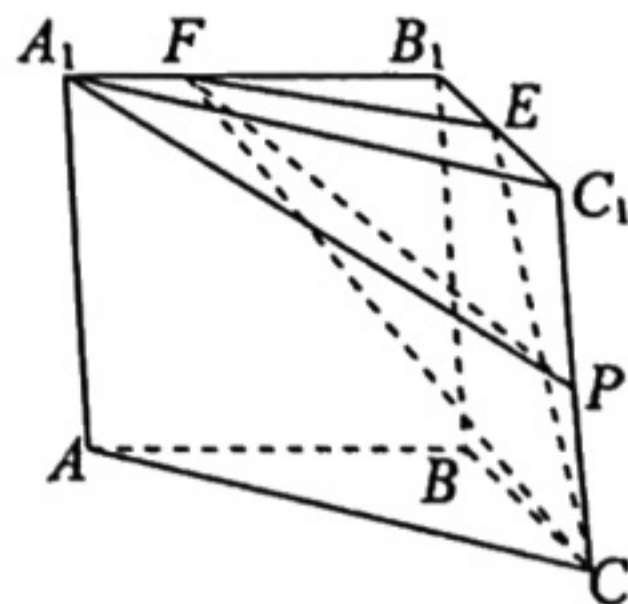
(2) 若 $b_n = na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (12 分)

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = AB = 3$ ， $BC = 2$ ， E, P 分别是 B_1C_1 和 CC_1 的中点，点 F 在棱 A_1B_1 上，且 $B_1F = 2$ 。

(1) 证明： $A_1P \parallel$ 平面 EFC ；

(2) 若 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $AB \perp BC$ ，求二面角 $P-CF-E$ 的余弦值。



某高三学生小明准备利用暑假的7月和8月勤工俭学,现有“送外卖员”和“销售员”两份工作可供其选择.已知“销售员”工作每日底薪为50元,每日销售的前5件每件奖励20元,超过5件的部分每件奖励30元.小明通过调查,统计了100名销售员1天的销售记录,其柱状图如图1;“送外卖员”没有底薪,收入与送的单数相关,在一日内:1至20单(含20单)每送一单3元,超过20单且不超过40单的部分每送一单4元,超过40单的部分,每送一单4.5元.小明通过随机调查,统计了100名送外卖员的日送单数,并绘制成如下直方图(如图2).

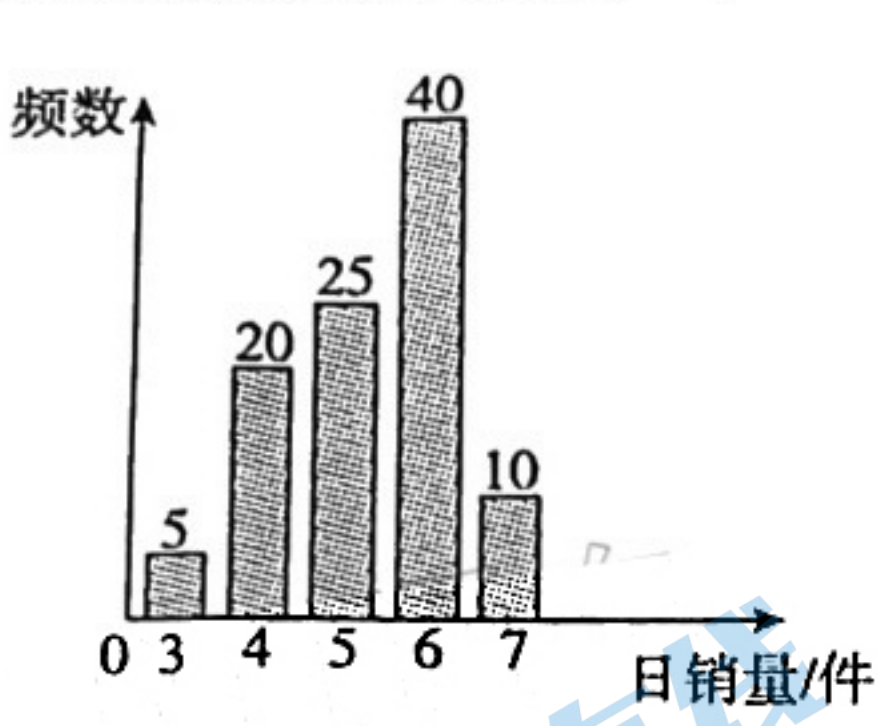


图 1

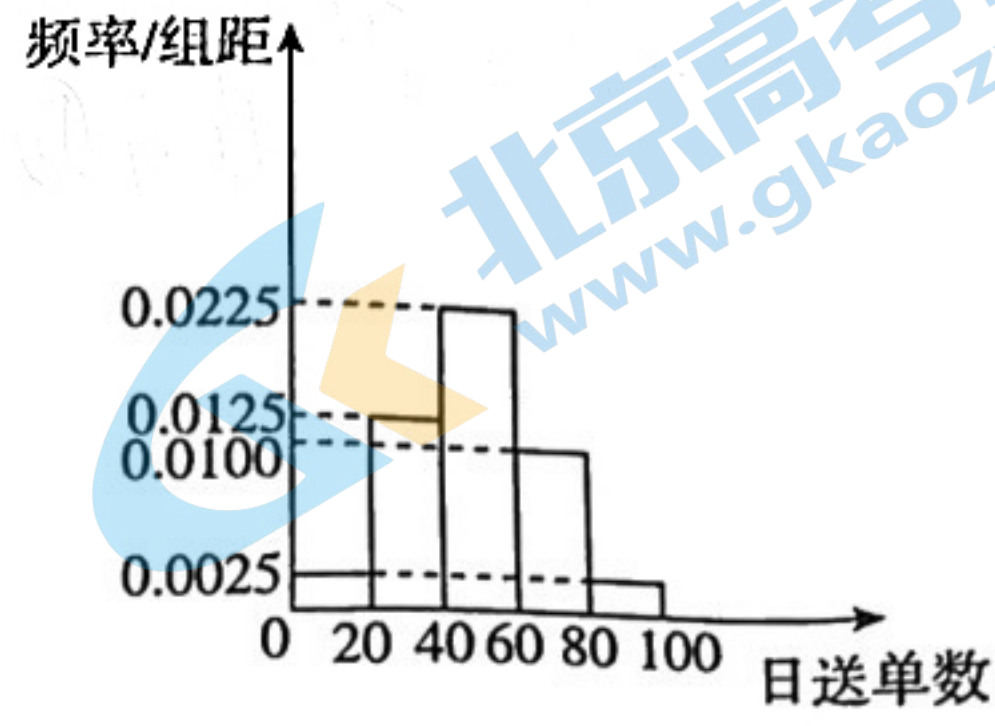


图 2

- 分别求出“销售员”的日薪 y_1 (单位:元) 与销售件数 x_1 的函数关系式、“送外卖员”的日薪 y_2 (单位:元) 与所送单数 x_2 的函数关系式;
- 若将频率视为概率,根据统计图,试分别估计“销售员”的日薪 X_1 和“送外卖员”的日薪 X_2 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表) 的数学期望,分析选择哪种工作比较合适,并说明你的理由.

21. (12 分)

设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ,过点 $P(0, 4)$ 的动直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点,当 F 在 l 上时,直线 l 的斜率为 -2 .

- 求抛物线的方程;
- 在线段 AB 上取点 D ,满足 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DB}$,证明:点 D 总在定直线上.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + a \cos x - \sqrt{2}x - 2, f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- 讨论 $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内极值点的个数;
- 若 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。

1. B

解析: $z = \frac{1-5i}{1-i} = \frac{(1-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 3-2i$, 故复数 z 的虚部为 -2 , 选 B.

2. C

解析: $2 > -3$ 时, A, B 错误, $2 > 1$ 时, D 错误, $y = 2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 故 C 正确.

3. C

解析: 令 $x=1$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (1+3)^2 + (1+2)^3 + (1+1)^4 = 59$.

4. D

解析: 由祖暅原理, 该不规则几何体体积与正六棱台体积相等, 故 $V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{12\sqrt{3}}{2} \right) \times 2\sqrt{3} = 21$.

5. D

解析: $f(x) = -f(-x)$, 故 A 错误, $f(2) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, 故 B, C 错误.

6. A

解析: 以 A 为原点建立直角坐标系, 设 $B(2,0), C(0,2)$, 则 $F(1,1), E(1,0)$, 则 $\overrightarrow{BC} = (-2,2)$, $\lambda \overrightarrow{AF} + \mu \overrightarrow{CE} = \lambda(1,1) + \mu(1,-2) = (\lambda + \mu, \lambda - 2\mu)$,

所以 $\begin{cases} \lambda + \mu = -2, \\ \lambda - 2\mu = 2, \end{cases}$ 所以 $\lambda = -\frac{2}{3}$.

7. A

解析: 由点到直线距离公式, 得 $c = \frac{\left| \frac{3}{4}c - b \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 + 1}}$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8. B

解析: 由 $x^2 e^{1-x} - a = 0 \Rightarrow a = x^2 e^{1-x}$,

设 $g(x) = x^2 e^{1-x}$, $g'(x) = e^{1-x} x(2-x)$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g(0) = 0, g(2) =$

$\frac{4}{e}$, 故 $0 < a < \frac{4}{e}$.
关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求的。全部选对得5分,部分选对得2分,有选错的得0分。

9. ACD

10. ABC

解析: $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 6\}$, 若 $A = B$, 则 $a = -3$, 且 $a^2 - 27 = -18$, 故 A 正确, $a = -3$ 时, $A = B$. 故 D 不正确.

若 $A \subseteq B$, 则 $(-3)^2 + a \cdot (-3) + a^2 - 27 \leq 0$ 且 $6^2 + 6a + a^2 - 27 \leq 0$, 解得 $a = -3$, 故 B 正确, 当 $B = \emptyset$ 时, $a^2 - 4(a^2 - 27) \leq 0$, 解得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 6$, 故 C 正确.

11. AB

解析: $f(x+\pi) = \frac{\cos 2x}{1-\sin x} = f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1+\sin(-x)} = \frac{\cos 2x}{1-\sin x}$, 故 A 正确,

$f(x) = \frac{\cos 2x}{1+\sin x} = \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x} = 4 - (2+2\sin x + \frac{1}{1+\sin x}) \leq 4 - 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ 时等号成立, 故 B 正确,

$f(-x) \neq -f(x)$, 故 C 错,

$f(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\cos(-\frac{2\pi}{3})}{1+\sin(-\frac{\pi}{3})} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2-\sqrt{3} < -\frac{1}{2}$, 故 D 错.

12. BC

解析: $\frac{1}{a_{n+1} \cdot a_n} = 2^n \Rightarrow \frac{1}{a_{n+2} \cdot a_{n+1}} = 2^{n+1}$, 故 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = 1$, 故 $a_2 = \frac{1}{2}$,

故 $a_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}, n=2k-1, \\ (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}, n=2k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$, 所以 A 错误, B 正确,

$S_n = \begin{cases} 3 - (\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}, n=2k-1, \\ 3 - 3(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}, n=2k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$, 所以 C 正确, D 错误.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. $x \pm y = 0$

解析: $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$, 设 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2$, $\frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = a^2$, 解得 $a = b$, 渐近线方程为 $x \pm y = 0$.

14. $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ 4

解析: 只要写出符合条件的函数即可, 如 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, 该函数的最小正周期是 4.

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

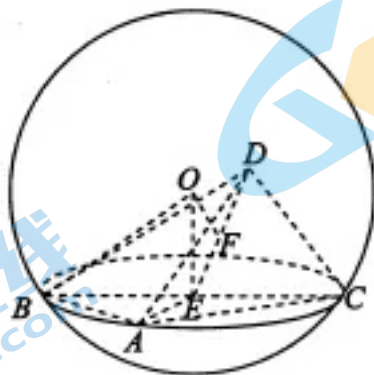
又如 $f(x) = \cos \frac{3\pi}{2}x$, 该函数的最小正周期是 $\frac{4}{3}$.

15. $\frac{1}{3}$

解析:分配的总数为 $C_3^1 + C_3^2 = 6$, 甲班恰好分配到两个名额, 则余下的 3 个名额要分配给乙、丙两班, 有 2 种分配方法, 所以甲班恰好分配到两个名额的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

16. 8π

解析:如图,



设 BC 的中点为 E, 过点 E 作平面 ABC 的法线 EO, 过 $\triangle BCD$ 的重心 F 作平面 DBC 的法线 FO, EO 与 FO 交于点 O, 则 O 为三棱锥 D-ABC 的外接球的球心.

又 $EF = \frac{1}{3}DE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \angle DEA = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以 $\cos \angle FEO = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $\cos \angle FEO = \frac{EF}{OE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $OE = 1$, 故外接球的半径为 $\sqrt{2}$, 所以球的表面积为 8π .

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。

17. (10 分)

解:(1)由正弦定理,得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{\sin \angle CAD}$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sin \angle CAD}$ 2 分

所以 $\sin \angle CAD = \frac{1}{2}$, 故 $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$ 3 分

所以 $\cos \angle ACD = \cos \left[\pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = -\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ 5 分

(2)由(1)可知 $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

由余弦定理,得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 14$, 9 分

所以 $BC = \sqrt{14}$ 10 分

18. (12 分)

(1)证明:由 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, 得 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$ 1 分

又 $a_2 - 2a_1 = 0$, 所以 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n = 0$ 3 分

故 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公比的等比数列. 4 分

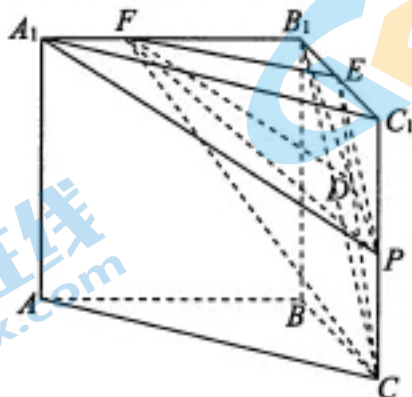
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

- (2)解:由 $b_n = na_n$, 得 $b_n = n \cdot 2^{n-1}$, 8分
- $T_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$, ① 9分
- $2T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$, ② 10分
- 由①-②得 $-T_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = -(n-1)2^n - 1$, 11分
- 则 $T_n = (n-1)2^n + 1$ 12分

19. (12分)

- (1)证明:如图,连接 PB_1 交 CE 于点 D ,连接 DF, EP, CB_1 1分

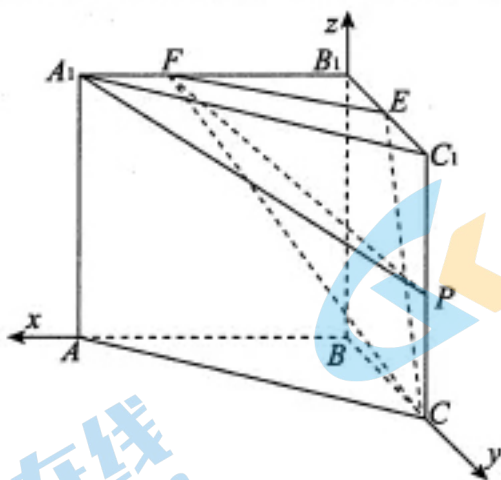


因为 E, P 分别是 B_1C_1 和 CC_1 的中点,故 $EP \parallel \frac{1}{2}CB_1$,故 $\frac{PD}{DB_1} = \frac{1}{2}$ 2分

又 $B_1F = 2, A_1B_1 = 3$,故 $\frac{A_1F}{FB_1} = \frac{1}{2}$,故 $FD \parallel A_1P$ 3分

又 $FD \subset$ 平面 EFC ,所以 $A_1P \parallel$ 平面 EFC 4分

(2)解:由题意知 AB, BC, BB_1 两两垂直,以 B 为坐标原点,以 BB_1 的方向为 z 轴正方向,分别以 BA, BC 为 x 轴和 y 轴的正方向,建立如图所示空间直角坐标系 $B-xyz$ 5分



则 $C(0, 2, 0), B_1(0, 0, 3), F(2, 0, 3), E(0, 1, 3), P(0, 2, \frac{3}{2})$ 6分

设 $n = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 EFC 的法向量,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EF} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1 - y_1 = 0, \\ y_1 - 3z_1 = 0, \end{cases}$ 可取 $n = (\frac{3}{2}, 3, 1)$ 8分

设 $m = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PFC 的法向量,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{PF} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_2 - 2y_2 + \frac{3}{2}z_2 = 0, \\ \frac{3}{2}z_2 = 0, \end{cases}$ 可取 $m = (1, 1, 0)$ 10分

$$\text{所以 } \cos\langle n, m \rangle = \frac{n \cdot m}{|n||m|} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{\sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 9 + 1} \times \sqrt{1 + 1}} = \frac{9\sqrt{2}}{14}.$$

由题意知二面角 $P\text{-}CF\text{-}E$ 为锐角,

所以二面角 $P\text{-}CF\text{-}E$ 的余弦值为 $\frac{9\sqrt{2}}{14}$ 12 分

20. (12 分)

解: (1) “销售员”的日薪 y_1 (单位: 元) 与销售件数 x_1 的函数关系式为 $y_1 = \begin{cases} 20x_1 + 50, & x_1 \leq 5, x_1 \in \mathbf{N}, \\ 30x_1, & x_1 > 5, x_1 \in \mathbf{N}, \end{cases}$ 2 分

“送外卖员”的日薪 y_2 (单位: 元) 与所送单数 x_2 的函数关系式为

$$y_2 = \begin{cases} 3x_2, & x_2 \leq 20, x_2 \in \mathbf{N}, \\ 4x_2 - 20, & 20 < x_2 \leq 40, x_2 \in \mathbf{N}, \\ 4.5x_2 - 40, & x_2 > 40, x_2 \in \mathbf{N}. \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由柱状图知, 日平均销售量满足如下表格:

销售量/件	3	4	5	6	7
频率	0.05	0.2	0.25	0.4	0.1

..... 5 分

所以 X_1 的分布列为

X_1	110	130	150	180	210
P	0.05	0.2	0.25	0.4	0.1

..... 6 分

所以 $E(X_1) = 110 \times 0.05 + 130 \times 0.2 + 150 \times 0.25 + 180 \times 0.4 + 210 \times 0.1 = 162$ (元). 7 分

由直方图可知, 日送单数满足如下表格:

单数/单	10	30	50	70	90
频率	0.05	0.25	0.45	0.2	0.05

..... 8 分

所以 X_2 的分布列如下表:

X_2	30	100	185	275	365
P	0.05	0.25	0.45	0.2	0.05

..... 9 分

由直方图知, $E(X_2) = 30 \times 0.05 + 100 \times 0.25 + 185 \times 0.45 + 275 \times 0.2 + 365 \times 0.05 = 183$ (元). 10 分

由以上计算得 $E(X_2) > E(X_1)$, 做“送外卖员”挣的更多, 故小明选择做“送外卖员”的工作比较合适. 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息. 12 分

(只要是建立在计算结果上的回答, 答的有道理都给 2 分)

21. (12 分)

(1)解:由题意,得 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

则 $\frac{4-0}{0-\frac{p}{2}} = -2$, 解得 $p=4$, 2 分

故抛物线的方程为 $y^2=8x$ 4 分

(2)证明:设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), D(x, y)$, 直线 l 的方程为 $x=m(y-4)$.

由 $\begin{cases} y^2=8x, \\ x=m(y-4) \end{cases}$ 得 $y^2-8my+32m=0$, 5 分

$y_1+y_2=8m, y_1y_2=32m$ 6 分

由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$, 得 $y_1-4=\lambda(y_2-4), y-y_1=\lambda(y_2-y)$, 7 分

故 $\frac{y_1-4}{y_2-4} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = \lambda$, 化简得 $y = \frac{2y_1y_2-4(y_1+y_2)}{y_1+y_2-8} = \frac{4m}{m-1}$ 8 分

又 $x=m(y-4)$, 故 $y = \frac{4\left(\frac{x}{y-4}\right)}{\frac{x}{y-4}-1}$, 9 分

化简得 $xy-y^2+4y-4x=0$, 10 分

即 $(x-y)(y-4)=0$, 11 分

则 $y=x$ 或 $y=4$.

当点 D 在定直线 $y=4$ 上时, 直线 l 与抛物线 C 只有一个交点, 与题意不符.

故点 D 在定直线 $y=x$ 上. 12 分

22. (12 分)

解:(1)由 $f(x)=e^x+a\cos x-\sqrt{2}x-2$, 得 $f'(x)=e^x-a\sin x-\sqrt{2}$ 1 分

令 $g(x)=e^x-a\sin x-\sqrt{2}$, 则 $g'(x)=e^x-a\cos x$ 2 分

因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $e^x > 1, 0 < \cos x < 1$.

当 $a \leq 1$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 即 $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无极值点; 3 分

当 $a > 1$ 时, $g''(x) = e^x + a\sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $g''(x) > 0$, 所以 $g'(x) = e^x - a\cos x$ 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增. 又 $g'(0) = e^0 - a\cos 0 = 1 - a < 0, g'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a\cos \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$, 故存在

$x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $g'(x_0) = 0$, 且 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减; $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时,

$g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 所以 $x = x_0$ 为 $g(x)$ 的极小值点, 此时 $f'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内存在一个

极小值点, 无极大值点. 4 分

(2)若 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $f(0) = 1 + a - 2 \geq 0$, 所以 $a \geq 1$ 5 分

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

下面证明当 $a \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 恒成立.

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $0 \leq \cos x \leq 1$,

所以 $a \geq 1$ 时, $f(x) = e^x + a \cos x - \sqrt{2}x - 2 \geq e^x + \cos x - \sqrt{2}x - 2$ 6 分

令 $h(x) = e^x + \cos x - \sqrt{2}x - 2, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 所以 $h'(x) = e^x - \sin x - \sqrt{2}$.

令 $\varphi(x) = e^x - \sin x - \sqrt{2}$, 则 $\varphi'(x) = e^x - \cos x$ 8 分

$\varphi''(x) = e^x + \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 单调递增.

又 $\varphi''\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}} + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} < e^{-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$,

所以 $\varphi'(x) = e^x - \cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

又 $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$,

$\varphi'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2} < e^{-1} - \frac{1}{2} < 0$,

所以存在 $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$, 使 $\varphi'(x_1) = 0$, 且 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, x_1\right)$ 时, $\varphi'(x) > 0, h'(x)$ 单调递增; $x \in (x_1, 0)$ 时, $\varphi'(x) < 0, h'(x)$ 单调递减, 所以 $x = x_1$ 时, $h'(x)$ 取得最大值, 且 $h'(x)_{\max} = h'(x_1)$.

因为 $\varphi'(x_1) = 0$, 所以 $e^{x_1} = \cos x_1$, 10 分

所以 $h'(x)_{\max} = h'(x_1) = \cos x_1 - \sin x_1 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cos\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \leq 0$.

所以 $h(x)$ 单调递减, 所以 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $h(x) \geq h(0) = 0$, 即 $f(x) \geq 0$ 成立.

综上, 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$ 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯