★启用前注意保密

2021年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数　学

本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1．答卷前，考生务必将自己的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号、座位号和考生号填写在答题卡上。将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。$-2<x<1$　　$x>-1$

1．已知集合 $M=\{x\mid -7<3x-1<2\}$，$N=\{x\mid x+1>0\}$，则 $M\cup N=$

A．$(-2,+\infty)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(-1,+\infty)$

2．若复数 z 满足 $(z-1)(1+i)=2-2i$，则 $|z|=$

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．5　　D．$\sqrt{5}$

3．已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(2e)=$

A．$2e^2$　　B．$2e$　　C．$1+\ln 2$　　D．$2\ln 2$

4．函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

5．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n-1$，则数列 $\{\log_2 a_n\}$ 的前10项和等于

A．1023　　B．55　　C．45　　D．35

6．已知 a，b 是两个正数，4是 2^a 与 16^b 的等比中项，则下列说法正确的是

A．ab 的最小值是1　　B．ab 的最大值是1

C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$　　D．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最大值是 $\frac{9}{2}$

7．《算数书》是我国现存最早的系统性数学典籍，其中记载有求“囷盖”的术：置如其周，令相乘也，又以高乘之，三十六成一．该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h，计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\frac{1}{36}L^2h$．用该术可求得圆周率 π 的近似值．

现用该术求得 π 的近似值，并计算得一个底面直径和母线长相等的圆锥的表面积的近似值为9，则该圆锥体积的近似值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. 3

8. 若$\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)^3(x+a)^2(a>0)$ 的展开式中 x^4 的系数为3，则 $a=$

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知曲线 C：$\frac{x^2}{4+m}+\frac{y^2}{1+m}=1$（$m\neq-1$，且 $m\neq-4$），则下列结论正确的是

A. 若曲线 C 为椭圆或双曲线，则其焦点坐标为（$\pm\sqrt{3}$，0）

B. 若曲线 C 是椭圆，则 $m>-1$

C. 若 $m<-1$ 且 $m\neq-4$，则曲线 C 是双曲线

D. 直线 $kx-y-k=0(k\in\mathbf{R})$ 与曲线 C 恒有两个交点

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-x^2+2x$，则下列判断正确的是

A. $f(x)$ 的值域为 $(0，1]$　　B. $f(x)$ 的周期为2

C. $f(x+1)$ 是偶函数　　D. $f(2021)=1$

11. 已知函数 $f(x)=\cos x+\lambda\sin x$，则下列说法正确的是

A. 若函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{5}$，则 $\lambda=2$

B. 若 $x\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\exists\lambda\in(0，1)$ 使得 $f(x)=\lambda$ 成立

C. 若 $\lambda=\sqrt{3}$，$\forall x\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$ 都有 $|f(x)-m|<1$ 成立，则 $m\in(1，2)$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0，\frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最大值，则正实数 λ 的取值范围是 $(0，\sqrt{3})$

12. 数学家华罗庚曾说："数缺形时少直观，形少数时难入微." 事实上，很多代数问题可以转化为几何问题加以解决. 例如，与 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 相关的代数问题，可以转化为点 $A(x,y)$ 与点 $B(a,b)$ 之间的距离的几何问题. 结合上述观点，对于函数 $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+5}$，下列结论正确的是

A. $f(x)=6$ 无解

B. $f(x)=6$ 的解为 $x=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$

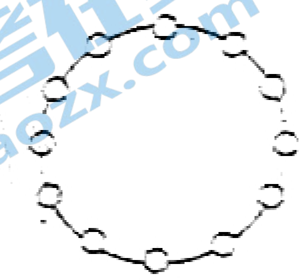
C. $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$

D. $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ __________.

14. 某圆形广场外围有12盏灯，如右图所示，为了节能每天晚上12时关掉其中4盏灯，则恰好每间隔2盏灯关掉1盏的概率是________.



15. 斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线过抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，且与 C 交于 A，B 两点，若 $|AB|=3\sqrt{2}$，则 $p=$ ________，$\triangle AOB$（O 为坐标原点）的面积为________．（本小题第一空2分，第二空3分）

16. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=AC=BC=AD=CD=2$，二面角 $B-AC-D$ 为 $120°$，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，____________.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\dfrac{4^n}{(2^{a_n-1}-1)(2^{a_{n+1}-1}-1)}$，设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，证明：$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$T_n<\dfrac{1}{9}$.

从下列三个条件中任选一个，补充在上面问题的横线中，然后对题目进行求解.

条件①：$S_n=na_n-n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$；

条件②：$nS_{n+1}=(n+1)S_n+n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$；

条件③：$\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. （12分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $a\cdot\sin A+a\cdot\sin C\cdot\cos B+b\cdot\sin C\cdot\cos A=b\cdot\sin B+c\cdot\sin A$.

（1）求角 B 的大小；

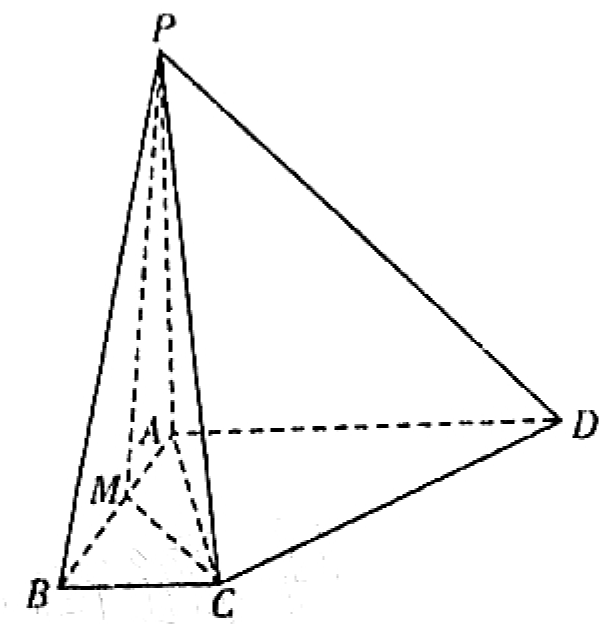
（2）若 $b=3\sqrt{6}$，$c=3\sqrt{2}$，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，求 $\triangle ABD$ 的面积.

19. （12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$BC/\!/AD$，$\angle BAD=90°$，$PA=AD=2AB=4BC=4$，$PC=\sqrt{21}$.

（1）证明：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）线段 AB 上是否存在一点 M，使得 MC 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{221}}{17}$？若存在，请求出 $\dfrac{AM}{AB}$ 的值；若不存在，请说明理由.



20. （12 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆 C 右焦点并垂直于 x 轴的直线 PM 交椭圆 C 于 P，M（点 P 位于 x 轴上方）两点，且 $\triangle OPM$（O 为坐标原点）的面积为 $\dfrac{3}{2}$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 l 交椭圆 C 于 A，B（A，B 异于点 P）两点，且直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{9}{4}$，求点 P 到直线 l 距离的最大值.

21. （12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$（$a\in\mathbf{R}$）.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

（2）设 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2+2e\ln a>0$.

22. （12 分）

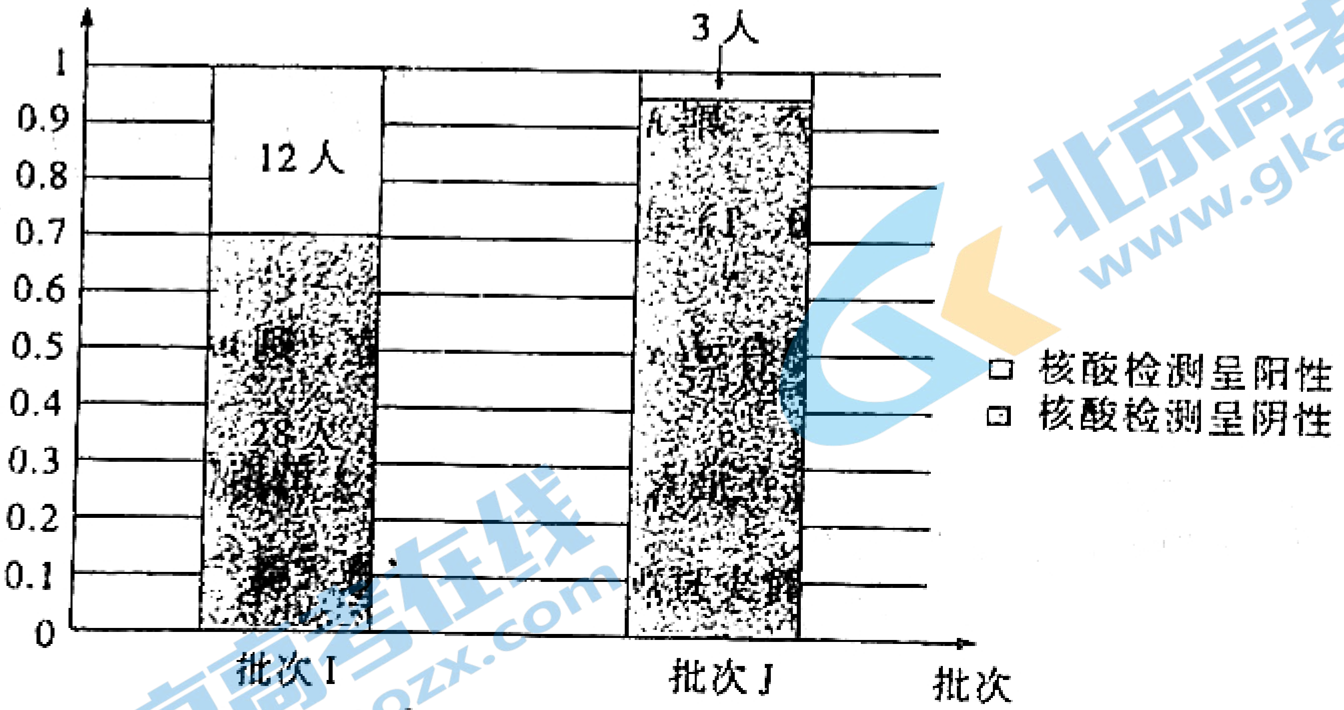
在新冠肺炎疫情肆虐之初，作为重要防控物资之一的口罩是医务人员和人民群众抗击疫情的武器与保障，为了打赢疫情防控阻击战，我国企业依靠自身强大的科研能力，果断转产自行研制新型全自动高速口罩生产机，“争分夺秒、保质保量”成为口罩生产线上的重要标语.

（1）在试产初期，某新型全自动高速口罩生产流水线有四道工序，前三道工序完成成品口罩的生产且互不影响，第四道是检测工序，包括红外线自动检测与人工抽检. 已知批次 I 的成品口罩生产中，前三道工序的次品率分别为 $p_1=\frac{1}{35}$，$p_2=\frac{1}{34}$，$p_3=\frac{1}{33}$.

①求批次 I 成品口罩的次品率 p_I.

②第四道工序中红外线自动检测为次品的口罩会被自动淘汰，合格的口罩进入流水线并由工人进行抽查检验. 已知批次 I 的成品口罩红外线自动检测显示合格率为 92%，求工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个口罩恰为合格品的概率（百分号前保留两位小数）.

（2）已知某批次成品口罩的次品率为 $p(0<p<1)$，设 100 个成品口罩中恰有 1 个不合格品的概率为 $\varphi(p)$，记 $\varphi(p)$ 的最大值点为 p_0，改进生产线后批次 J 的口罩的次品率 $p_J=p_0$. 某医院获得批次 I，J 的口罩捐赠并分发给该院医务人员使用. 经统计，正常佩戴使用这两个批次的口罩期间，该院医务人员核酸检测情况如下面条形图所示，求 p_0，并判断是否有 99.9% 的把握认为口罩质量与感染新冠肺炎病毒的风险有关？



附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

★启用前注意保密

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	B	C	B	A	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.（全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	CD	CD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.（第 15 题第一空 2 分，第二空 3 分）

13. $\sqrt{13}$　14. $\frac{1}{165}$　15. $\sqrt{2}$；$\frac{\sqrt{6}}{2}$　16. $\frac{28\pi}{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. （10 分）

（1）解：选条件①，因为 $S_n = na_n - n^2 + n$，①

所以 $S_{n-1} = (n-1)a_{n-1} - (n-1)^2 + (n-1)(n \geqslant 2)$. ② ………………………… 1 分

所以① − ②，得 $a_n = na_n - (n-1)a_{n-1} - 2n + 1 + 1$，即 $a_n - a_{n-1} = 2(n \geqslant 2)$. ……

……………………………………………………………………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列.

所以 $a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1(n \in \mathbf{N}^*)$. ……………………………………… 5 分

选条件②，因为 $nS_{n+1} = (n+1)S_n + n^2 + n$，所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n} + 1$，$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 1$. …

……………………………………………………………………………… 1 分

所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以 1 为公差的等差数列，又$\frac{S_1}{1}=a_1=1$， ………………………… 2 分

所以$\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $S_n=n^2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 3 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant 2)$. ………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 5 分

选条件③，因为 $\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+1$，所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=1$. ………………………… 1 分

所以$\{\sqrt{S_n}\}$是以 1 为公差的等差数列．又 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$， ………………………… 2 分

所以 $\sqrt{S_n}=1+(n-1)\times 1=n$．所以 $S_n=n^2$. ………………………… 3 分

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqslant 2)$. ………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 5 分

（2）证明：由（1）知 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $b_n=\frac{4^n}{(2^{2n}-1)(2^{2n+2}-1)}$

$=\frac{4^n}{(4^n-1)(4^{n+1}-1)}$ ………………………… 6 分

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$. ………………………… 7 分

所以 $T_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{63}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{63}+\cdots+\frac{1}{4^n-1}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$ ………………………… 8 分

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$ ………………………… 9 分

$=\frac{1}{9}-\frac{1}{3(4^{n+1}-1)}<\frac{1}{9}$. ………………………… 10 分

18.（12 分）

解：

（1）法一：因为 $a\cdot\sin A+a\cdot\sin C\cdot\cos B+b\cdot\sin C\cdot\cos A=b\cdot\sin B+c\cdot\sin A$，

所以根据正弦定理，得 $\sin^2 A+\sin A\cdot\sin C\cdot\cos B+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A=\sin^2 B+\sin A\cdot\sin C$. ………………………… 1 分

所以$\sin^2 A+\sin C(\sin A\cdot\cos B+\sin B\cdot\cos A)=\sin^2 B+\sin A\cdot\sin C$.

所以$\sin^2 A+\sin C\cdot\sin(A+B)=\sin^2 B+\sin A\cdot\sin C$.

所以$\sin^2 A+\sin^2 C=\sin^2 B+\sin A\cdot\sin C$. ………………………… 2 分

根据正弦定理，得 $a^2+c^2=b^2+ac$，即 $a^2+c^2-b^2=ac$. ………………………… 3 分

根据余弦定理，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$. ………………………… 4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

法二：因为 $a\cdot\sin A+a\cdot\sin C\cdot\cos B+b\cdot\sin C\cdot\cos A=b\cdot\sin B+c\cdot\sin A$，

所以根据正弦定理，得 $a^2+ac\cdot\cos B+bc\cdot\cos A=b^2+ac$. ………………… 1 分

根据余弦定理，得 $a^2+ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2+ac$. ………… 2 分

即 $a^2+c^2-b^2=ac$. ……………………………………………………………… 3 分

根据余弦定理，得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………… 4 分

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 5 分

（2）由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$.

所以 $54=a^2+18-3\sqrt{2}a$，即 $a^2-3\sqrt{2}a-36=0$. ……………………………… 7 分

所以 $(a-6\sqrt{2})(a+3\sqrt{2})=0$. 因为 $a>0$，所以 $a=6\sqrt{2}$. ……………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

所以 $BD=\dfrac{1}{3}BC=2\sqrt{2}$. …………………………………………………………… 10 分

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. …… 12 分

19. （12 分）

（1）证明：因为 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $AD\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AD\perp$ 平面 PAB. 所以 $AD\perp PA$. ……………………………………………… 2 分

因为 $\angle BAD=90^\circ$，$BC/\!/AD$，

所以 $\angle ABC=90^\circ$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

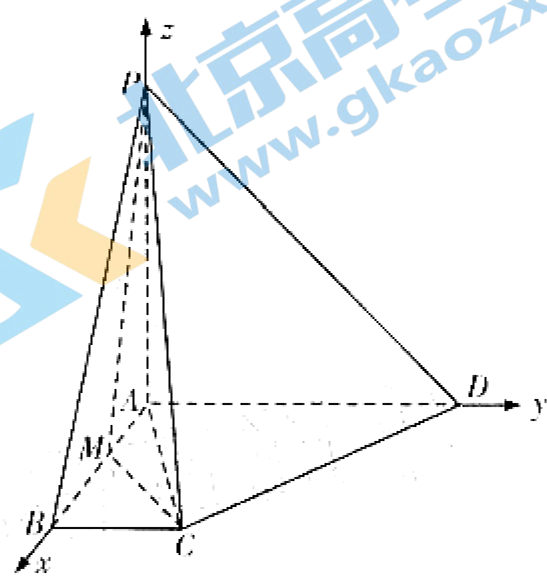
因为 $PA=4$，$PC=\sqrt{21}$，所以 $PA^2+AC^2=PC^2$，

所以 $PA\perp AC$. …………………………………… 4 分

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$AC\cap AD=A$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 5 分



（2）解：以 A 为原点，以 AB、AD、AP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $A\text{-}xyz$，如图所示，

则 $A(0，0，0)$，$B(2，0，0)$，$C(2，1，0)$，$D(0，4，0)$，$P(0，0，4)$.

设 $M(a，0，0)(a\in[0，2])$，所以 $\overrightarrow{PC}=(2，1，-4)$，$\overrightarrow{MC}=(2-a，1，0)$，$\overrightarrow{CD}=(-2，3，0)$. ……………………………………………………………… 7 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1，y_1，z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot n=(2,1,-4)\cdot(x_1,y_1,z_1)=2x_1+y_1-4z_1=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot n=(-2,3,0)\cdot(x_1,y_1,z_1)=-2x_1+3y_1=0.\end{cases}$

令 $y_1=2$，得 $x_1=3$，$z_1=2$. 所以 $n=(3,2,2)$. ………………………………………… 9 分

所以 $|\cos<\overrightarrow{MC},n>|=\dfrac{|\overrightarrow{MC}\cdot n|}{|\overrightarrow{MC}|\cdot|n|}=\dfrac{|8-3a|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{(a-2)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{221}}{17}$. …… 10 分

化简，得 $4a^2-4a+1=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………… 11 分

所以存在点 M，使得 MC 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{221}}{17}$，

此时 $\dfrac{AM}{AB}$ 的值为$\dfrac{1}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

20. (12 分)

解：

(1) 由题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2b^2}{a}\times c=\dfrac{3}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4 分

(2) 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 (1) 易求得 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

当直线 l 的斜率不存在时，设其方程为 $x=x_0(-2<x_0<2$ 且 $x_0\neq1)$，

联立$\begin{cases}x=x_0,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=x_0,\\ y^2=3\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right).\end{cases}$ 因为$\begin{cases}x_1=x_2=x_0,\\ y_1=-y_2,\end{cases}$

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\dfrac{3}{2}}{x_2-1}=-\dfrac{9}{4}$，即 $2x_0^2-3x_0+1=0$.

解得 $x_0=\dfrac{1}{2}$或 $x_0=1$（舍），此时点 P 到直线 l 的距离为$\dfrac{1}{2}$. ……………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

则$\begin{cases}\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)\cdot(4m^2-12)>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2},\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ ………………………… 8 分

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{y_1-\dfrac{3}{2}}{x_1-1}\cdot\dfrac{y_2-\dfrac{3}{2}}{x_2-1}=-\dfrac{9}{4}$，即 $\left(y_1-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\left(y_2-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}(x_1-1)\cdot$

(x_2-1).

所以$\left(kx_1+m-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(kx_2+m-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}(x_1-1)\cdot(x_2-1)$.

即$\left(k^2+\frac{9}{4}\right)\cdot x_1x_2+\left[k\left(m-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}\right](x_1+x_2)+\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=0$.

整理得$2k^2+4m^2-3m+6km-\frac{9}{2}=0$.

即$\left(k+m-\frac{3}{2}\right)\cdot(2k+4m+3)=0$，所以$k+m-\frac{3}{2}=0$或$2k+4m+3=0$. …… 10 分

若$k+m-\frac{3}{2}=0$，则直线l的方程为$y-\frac{3}{2}=k(x-1)$.

所以直线l过定点$N\left(1,\frac{3}{2}\right)$，不合题意.

若$2k+4m+3=0$，则直线l的方程为$y+\frac{3}{4}=k\left(x-\frac{1}{2}\right)$，所以直线$l$过定点$Q\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$.

又因为$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{3}<1$，所以点$Q$在椭圆$C$内.

设点P到直线l的距离为d，所以$d_{max}=PQ=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2}=\frac{\sqrt{85}}{4}>\frac{1}{2}$.

所以点P到直线l距离的最大值为$\frac{\sqrt{85}}{4}$. ………………………………………………… 12 分

21. (12 分)

(1) 解：由题知函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$. ……

…… 1 分

当$a=0$时，则$f(x)=\ln x+1$，$f(x)$有唯一零点e^{-1}.

当$a<0$时，则$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，又$f(e^{-1})=-ae^{-1}>0$，$f(e^{a-1})=a(1-e^{a-1})<0$，故$\exists x_1\in(e^{a-1},e^{-1})$，使得$f(x_1)=0$，

此时$f(x)$有唯一零点x_1. ………………………………………………………………… 2 分

当$a>0$时，则当$0<x<\frac{1}{a}$时$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增；当$x>\frac{1}{a}$时$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

所以$f(x)_{max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$. ……………………………………………………… 3 分

当$a=1$时，$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)=\ln 1=0$，所以$f(x)$有唯一零点 1.

当 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}<0$，$f(x)$ 无零点.

当 $0<a<1$ 时，$f(x)_{\max}>0$ 且 $f(\mathrm{e}^{-1})=-a\mathrm{e}^{-1}<0$，故 $\exists x_2\in\left(\mathrm{e}^{-1},\frac{1}{a}\right)$，使得 $f(x_2)=0$.

$f\left(\frac{\mathrm{e}}{a^2}\right)=\ln\frac{\mathrm{e}}{a^2}-\frac{\mathrm{e}}{a}+1=\ln\frac{\mathrm{e}^2}{a^2}-\frac{\mathrm{e}}{a}=2\ln\frac{\mathrm{e}}{a}-\frac{\mathrm{e}}{a}$,

令 $g(x)=2\ln x-x$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1$.

因为当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $g(x)_{\max}=g(2)=2\ln 2-2<0$.

所以 $2\ln x-x<0$.

所以 $f\left(\frac{\mathrm{e}}{a^2}\right)=2\ln\frac{\mathrm{e}}{a}-\frac{\mathrm{e}}{a}<0$.

故 $\exists x_3\in\left(\frac{1}{a},\frac{\mathrm{e}}{a^2}\right)$，使得 $f(x_3)=0$.

所以当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

综上，当 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$ 时，$f(x)$ 有唯一零点；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有两个零点；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 无零点. …………………………………………………… 5 分

(2) 证明：令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{\mathrm{e}}x$，由(1)可知 $0<a<1$，$h(x)_{\max}=h(\mathrm{e})=0$，

所以 $h(x)\leqslant 0$. 所以 $\ln x\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}x$. 所以 $\ln\frac{1}{a}\leqslant\frac{1}{a\mathrm{e}}$. 所以 $-2\mathrm{e}\ln a\leqslant\frac{2}{a}$. ……… 7 分

令 $Q(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，所以 $Q'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

所以 $Q(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $Q(x)>Q(1)=0$. 所以 $\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$. ……… 9 分

又 x_1，x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点，所以 $\begin{cases}\ln x_1-ax_1+1=0,\\ \ln x_2-ax_2+1=0,\end{cases}$ 两式相减，得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$. …………………………………………………… 10 分

不妨设 $x_1>x_2$，则 $\frac{x_1}{x_2}>1$. 所以 $a(x_1-x_2)=\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$.

所以 $a(x_1-x_2)>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$. 所以 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$. 所以 $x_1+x_2>\frac{2}{a}\geqslant-2\mathrm{e}\ln a$.

所以 $x_1+x_2+2\mathrm{e}\ln a>0$. …………………………………………………… 12 分

22. （12 分）

解：

（1）①批次 I 成品口罩的次品率为

$p_I = 1-[(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)] = 1-\frac{34}{35}\times\frac{33}{34}\times\frac{32}{33}=\frac{3}{35}$. ………………………… 2 分

②设批次 I 的成品口罩红外线自动检测合格为事件 A，人工抽检合格为事件 B，

由已知，得 $P(A)=\frac{92}{100}$，$P(AB)=1-p_I=1-\frac{3}{35}=\frac{32}{35}$，

则工人在流水线进行人工抽检时，抽检一个口罩恰为合格品为事件 $B|A$，

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{32}{35}\times\frac{100}{92}=\frac{8\times 20}{7\times 23}=\frac{160}{161}\approx 99.38\%$. ………………………… 5 分

（2）100 个成品口罩中恰有 1 个不合格品的概率 $\varphi(p)=C_{100}^{1}p\cdot(1-p)^{99}$.

因此 $\varphi'(p)=100[(1-p)^{99}-99p(1-p)^{98}]=100(1-p)^{98}\cdot(1-100p)$.

令 $\varphi'(p)=0$，得 $p=0.01$.

当 $p\in(0,0.01)$ 时，$\varphi'(p)>0$；当 $p\in(0.01,1)$时，$\varphi'(p)<0$.

所以 $\varphi(p)$ 的最大值点为 $p_0=0.01$. ………………………………………………… 7 分

由（1）可知，$p_I=\frac{3}{35}\approx 0.09$，$p_J=p_0=0.01$，故批次 J 口罩的次品率低于批次 I，

故批次 J 的口罩质量优于批次 I.

由条形图可建立 2×2 列联表如下：

单位：人

核酸检测结果	口罩批次		合计
	I	J	
呈阳性	12	3	15
呈阴性	28	57	85
合计	40	60	100

………………………………………………………………………………………………… 8 分

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{100\times(12\times 57-28\times 3)^2}{40\times 60\times 15\times 85}$$ ………………………………………… 9 分

$$=\frac{100\times 600\times 600}{40\times 60\times 15\times 85}=\frac{200}{17}\approx 11.765>10.828.$$ ………………………… 11 分

因此，有 99.9% 的把握认为口罩质量与感染新冠肺炎病毒的风险有关. … 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。