号卷·A10联盟2022届高三开年考

理科数学参考答案

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	B	B	C	A	B	D	C	A	D

1. B　由题意得，$A=\{x|x\geqslant 2\}$，$\therefore A\cap B=[2,+\infty)$，故选B.

2. A　由题意得，$z=\dfrac{3-2i}{1+i}=\dfrac{(3-2i)(1-i)}{2}=\dfrac{1-5i}{2}$，则其虚部为$-\dfrac{5}{2}$. 故选A.

3. D　$\because S_9=9a_5=45$，$\therefore a_5=5$，$\therefore$数列$\{a_n\}$的公差为$a_6-a_5=4$. 故选D.

4. B　由三视图可知，该几何体的体积$V=\dfrac{1}{2}\times\pi\times1^2\times2+\dfrac{1}{3}\times2\times2\times2=\dfrac{8}{3}+\pi$. 故选B.

5. B　因为$c=\ln e^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，$a=\log_{29}3=\log_{29}27^{\frac{1}{3}}<\log_{29}29^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，

$b=\log_{50}4=\log_{50}64^{\frac{1}{3}}>\log_{50}50^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$，所以$a<c<b$. 故选B.

6. C　令$f(x)=2^x-\dfrac{1}{x}$，则$f(x)$在$(0,1)$为连续函数，且$f(1)=1>0$，

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$，故$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上存在零点，故方程$2^x=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上有解，故命题$p$为真命题；$x^2+ax+1>0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，则$\Delta=a^2-4<0$，解得$-2<a<2$，故命题$q$为假命题，所以$p\wedge(\neg q)$为真命题，$p\wedge q$，$(\neg p)\wedge q$，$(\neg p)\vee q$为假命题. 故选C.

7. A　由题意得，$(1-p)^4=\dfrac{81}{256}$，解得$p=\dfrac{1}{4}$，故在该地该季节的连续三天中，恰有一天出现雾凇的概率为$C_3^1\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{64}$. 故选A.

8. B　由题意得，$a_2\cdot a_2=a_4$，$\because a_n>0$，$\therefore a_2=2$；令$m=2$，则由$a_m\cdot a_n=a_{m+n}$可得$2a_n=a_{n+2}$，故数列$\{a_{2n}\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，则数列$\{a_{2n}\}$的前2022项和为$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{4044}=\dfrac{2\cdot(1-2^{2022})}{1-2}=2^{2023}-2$. 故选B.

9. D　由题意得，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，则$T=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=3$，$\therefore f(x)=4\sin(3x+\varphi)$.

$\because f(0)=4\sin\varphi=2\sqrt{2}$，$\therefore \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore f(x)=4\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，令$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

得$-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$，令$k=0$，得$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递增.

故选 D.

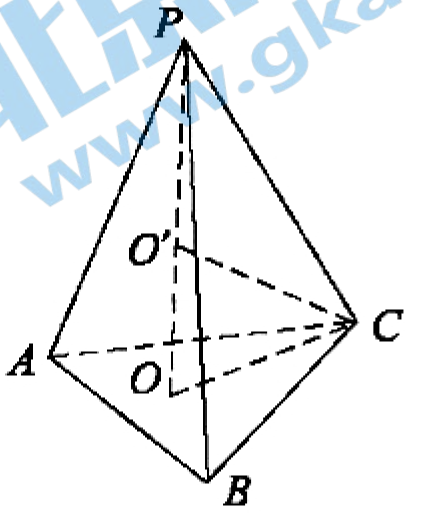
10. C　由题意得，$f(x-1)=\log_4\left(8^x+2^x\right)-x+1=\log_4\left(\dfrac{8^x+2^x}{4^x}\right)+1=$

$\log_4\left(2^x+2^{-x}\right)+1$，令$g(x)=\log_4\left(2^x+2^{-x}\right)+1$，可知$g(-x)=g(x)$，则函数$g(x)$为偶函数，图象关于$y$轴对称，则函数$f(x)$的图象关于直线$x=-1$对称，故①正确；$\because g(x)=\log_4\left(2^x+2^{-x}\right)+1$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore$函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，故②错误；由①②可知，函数$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=\dfrac{3}{2}$，结合图象可知，函数$y=f(x)-3$有两个零点，故③正确．故选 C.

11. A　设直线$l: y=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$，联立$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{p}{2}\right),\end{cases}$则$\sqrt{3}y^2+2py-\sqrt{3}p^2=0$，

则$y_A+y_B=-\dfrac{2p}{\sqrt{3}}, y_Ay_B=-p^2$．由$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QF}$，得$P,Q$分别为线段$AF,BF$的中点，$\therefore y_A-y_B=8\sqrt{3}$，联立上述三式，解得$p=6$．故选 A.

12. D　由题意得，该正四面体在正方体的内切球内，故该四面体内接于球时棱长最大．易得正方体的内切球半径为$r=3$，如图，记正四面体为$P-ABC$，棱长为a，O为底面ABC的中心，四面体外接球的球心为O'，连接PO，$OC, O'C$，则$PO\perp$底面ABC，



$CO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，$O'P=O'C=3$，在$\mathrm{Rt}\triangle OO'C$中，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}a-3\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=3^2$，解得$a=2\sqrt{6}$．故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填写在题中的横线上．）

13. $-\dfrac{5}{3}$

由题意得，$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda, 2+\lambda)$，$\because \boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$垂直，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=1+\lambda+2(2+\lambda)=0$，解得 $\lambda=-\frac{5}{3}$.

14. 2

由题意得，这条渐近线的斜率为 $\sqrt{3}$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2$.

15. $y=3$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=-2\sin x$，$\therefore f'(-\pi)=-2\sin(-\pi)=0$，$\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 对称点处的导数相同，$\therefore f'(\pi)=f'(-\pi)=0$，即切线的斜率为 0，又 $f(\pi)=-f(-\pi)=-[2\cos(-\pi)-1]=3$，$\therefore$ 切线方程为 $y=3$.

16. 148π

由题意得，$CA_1=CB_2$，结合圆的对称性，康威圆的圆心在 $\angle ACB$ 的平分线上；同理可得，康威圆的圆心在 $\angle ABC$ 的平分线上，则康威圆的圆心即为 $\triangle ABC$ 内切圆的圆心. $\because \tan 2\angle ABC=\frac{24}{7}$，$\therefore \frac{2\tan\angle ABC}{1-\tan^2\angle ABC}=\frac{24}{7}$，解得 $\tan\angle ABC=\frac{3}{4}$（$\tan\angle ABC=-\frac{4}{3}$ 舍去），又 $AB=10$，$\therefore AC=6$，$BC=8$. 易知康威圆的圆心到直线 AB 的距离即为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r，则 $r=\frac{AC+BC-AB}{2}=2$，由垂径定理知康威圆的半径 $R=\sqrt{12^2+2^2}=\sqrt{148}$，$\therefore$ 所求面积为 148π.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，

$\because \sin(A-B)=\sin C-\sin B$，

$\therefore \sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

即 $2\cos A\sin B-\sin B=0$，………………………… 4 分

又 $\sin B\neq 0$，$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.………………………… 6 分

（Ⅱ）由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $24=(b+c)^2-2bc-2bc\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $24=36-3bc$，解得 $bc=4$，………………………… 10 分

则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$(2a+0.04+0.08+0.06)\times 5=1$，解得 $a=0.01$，……………… 2 分

故所求平均数为

$17.5\times 0.2+22.5\times 0.4+27.5\times 0.3+32.5\times 0.05+37.5\times 0.05=24.25$（元）.…… 4 分

（Ⅱ）由题意得，消费在$[15,20)$，$[20,25)$的高中女生分别有3人和6人，……… 5分

故X的可能取值为0，1，2，3，

$\therefore P(X=0)=\frac{C_6^3C_3^0}{C_9^3}=\frac{5}{21}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}$，

$P(X=3)=\frac{C_6^0C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}$，…………………………… 9分

故X的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{5}{21}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{1}{84}=1$. ………………………… 12分

19.（本小题满分12分）

（Ⅰ）连接PO，易得$PO // SB$，故$\angle OPQ$为异面直线PQ与SB所成的角. …… 1分

由题意得，$SO\perp$底面ABQ，$\therefore SO\perp OQ$. $\because$点Q为半圆弧AB的中点，

$\therefore AB\perp OQ$，$\therefore OQ\perp$平面SAB，$\therefore OQ\perp PO$. …………………… 3分

在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中，$OQ=OP=2$，$\therefore \angle OPQ=\frac{\pi}{4}$，

即异面直线PQ与SB所成角的大小为$\frac{\pi}{4}$. ………………………… 5分

（Ⅱ）建立如图所示的空间直角坐标系$Oxyz$，

则$A(0,2,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$Q(2,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{SA}=(0,2,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AQ}=(2,-2,0)$. ……………… 7分

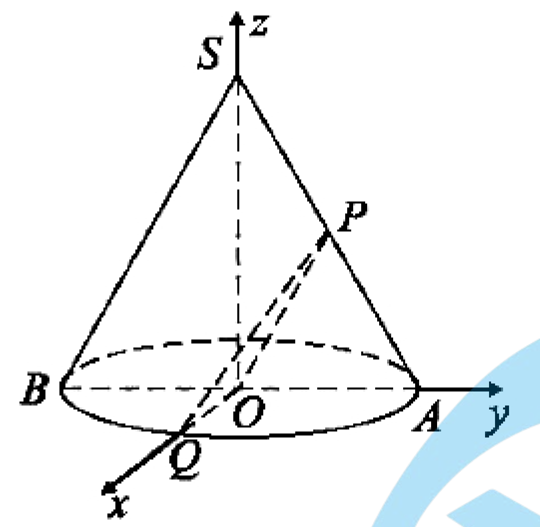
设平面SAQ的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}y-\sqrt{3}z=0\\ x-y=0\end{cases}$，

令$z=1$，则$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$. ………………………… 9分

由（Ⅰ）得，$OQ\perp$平面SAB，$\therefore$平面SAB的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

$\therefore \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\therefore \sin<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\therefore$二面角$B-SA-Q$的正弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ………………………… 12分



20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $ab=\sqrt{2}$ ①，…………………………… 1 分

而 $|EF|=\frac{\sqrt{14}}{2}$，$\therefore\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ 在椭圆 C 上，代入可得 $\frac{1}{4a^2}+\frac{7}{8b^2}=1$ ②，…… 2 分

联立①②，解得 $a^2=2$，$b^2=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………… 4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$B(0,1)$，若直线 EF 的斜率不存在，设 $E(s,t)$，$F(s,-t)$，

此时 $k_{BE}\cdot k_{BF}=\frac{t-1}{s}\cdot\frac{-t-1}{s}=\frac{1-t^2}{s^2}=\frac{\frac{1}{2}s^2}{s^2}=\frac{1}{2}$，

与题设矛盾，故直线 EF 的斜率必存在. …………………………… 6 分

设直线 EF 的方程为 $y=kx+m\ (m\neq 1)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2+4mkx+2m^2-2=0$，$\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4mk}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$，（*）…………………………… 8 分

$\therefore k_{BE}\cdot k_{BF}=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2}$

$=\frac{k^2x_1x_2+k(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2}{x_1x_2}=\frac{1}{6}$，…………………… 9 分

将（*）式代入上式，整理得 $m^2-3m+2=0$，………………………… 11 分

解得 $m=2$ 或 $m=1$（舍去），即直线 EF 过定点 $(0,2)$.……………………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=e^x(2e^x-x)$，则 $f'(x)=e^x(4e^x-x-1)$. ……………… 1 分

令 $m(x)=4e^x-x-1$，则 $m'(x)=4e^x-1$，………………………… 2 分

令 $m'(x)>0$，解得 $x>\ln\frac{1}{4}$，令 $m'(x)<0$，解得 $x<\ln\frac{1}{4}$，

$\therefore m(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{1}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，………… 3 分

$\therefore m(x)\geqslant m\left(\ln\frac{1}{4}\right)=1+\ln 4-1>0$，$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. …………4 分

（Ⅱ）由题意得，$f'(x)=-e^{x}\left[(x+1)-2me^{x}\right]$. ………………………… 5 分

$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant-\frac{2}{m}$ 恒成立，$\therefore f(0)=m\leqslant-\frac{2}{m}$，可得 $m<0$. ……… 6 分

令 $g(x)=(x+1)-2me^{x}$，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

由 $g(-1)=-2me^{-1}>0$，$g(2m-1)=2m(1-e^{2m-1})<0$，

$\therefore\exists x_0\in(2m-1,-1)$，使得 $g(x_0)=0$，………………………… 7 分

且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)>0$；

当 $x_0\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(x_0)=me^{2x_0}-x_0e^{x_0}$. ……………………… 9 分

由 $g(x_0)=(x_0+1)-2me^{x_0}=0$，得 $m=\frac{x_0+1}{2e^{x_0}}$，

由 $f(x)_{\max}\leqslant-\frac{2}{m}$，得 $x_0e^{x_0}-e^{2x_0}\cdot\frac{x_0+1}{2e^{x_0}}\geqslant\frac{4e^{x_0}}{x_0+1}$，即 $\frac{x_0-1}{2}\geqslant\frac{4}{x_0+1}$，

由 $x_0+1<0$，得 $x_0^2-1\leqslant 8$，$\therefore -3\leqslant x_0<-1$. ……………………… 10 分

设 $h(x)=\frac{x+1}{2e^{x}}(-3\leqslant x<-1)$，则 $h'(x)=\frac{-x}{2e^{x}}>0$，可知 $h(x)$ 在 $[-3,1)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(-3)=-e^{3}$，即 $m\geqslant-e^{3}$，$\therefore$ 实数 m 的最小值为 $-e^{3}$. ………… 12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（其中 φ 为参数），转化为普通方程为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，由 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

得曲线 C_1 的极坐标方程为 $\frac{\rho^2\cos^2\theta}{2}+\rho^2\sin^2\theta=1$，整理得 $\rho^2=\frac{2}{1+\sin^2\theta}$；

同理，得曲线 $C_2:x^2-2x+y^2=0$ 的极坐标方程为 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，

即 $\rho=2\cos\theta$. …………………… 5 分

（Ⅱ）联立$\begin{cases}\theta=\alpha=\dfrac{\pi}{3}\\ \rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\theta}\end{cases}$，得$|OA|^2=\rho_A{}^2=\dfrac{2}{1+\frac{3}{4}}=\dfrac{8}{7}$，$\therefore |OA|=\rho_A=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$，

联立$\begin{cases}\theta=\alpha=\dfrac{\pi}{3}\\ \rho=2\cos\theta\end{cases}$，得$|OB|=\rho_B=1$，

$\therefore |AB|=|OA|-|OB|=\dfrac{2\sqrt{14}-7}{7}$. ………………………… 10分

23.（本小题满分10分）选修4–5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$|4x-3|+|4x+5|>10$，

当$x<-\dfrac{5}{4}$时，不等式化为$3-4x-4x-5>10$，解得$x<-\dfrac{3}{2}$，$\therefore x<-\dfrac{3}{2}$；

当$-\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$时，不等式化为$3-4x+4x+5>10$，无解；

当$x>\dfrac{3}{4}$时，不等式化为$4x-3+4x+5>10$，解得$x>1$，$\therefore x>1$，

则不等式$f(x)>10$的解集为$\left\{x\middle|x<-\dfrac{3}{2}或x>1\right\}$. ………………………… 5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当$-\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{4}$时，$f(x)$取得最小值，且$f(x)_{\min}=8$，即$f(x)\geqslant 8$.

$\because \left(\sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}\right)^2\leqslant 2\left[\left(\sqrt{m+1}\right)^2+\left(\sqrt{2n+1}\right)^2\right]=2(m+1+2n+1)=8$，

当且仅当$m=2n=1$时等号成立，$\therefore \sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}\leqslant 2\sqrt{2}$，

$\therefore 2^{\sqrt{m+1}}\cdot 2^{\sqrt{2n+1}}=2^{\sqrt{m+1}+\sqrt{2n+1}}\leqslant 2^{2\sqrt{2}}<2^3=8$，

即$2^{\sqrt{m+1}}\cdot 2^{\sqrt{2n+1}}<f(x)$. ………………………… 10分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。