

北京市房山区 2019 年高考第一次模拟测试试卷

数学(文科)

一、选择题(本大题共 8 小题, 共 40.0 分)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 4\}$, $B = \{0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

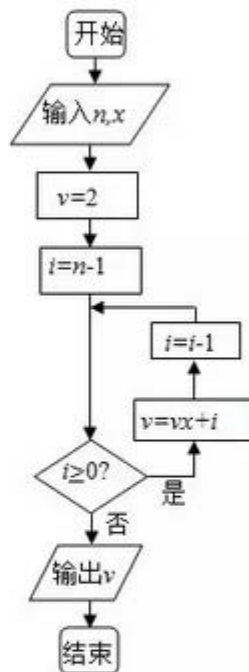
- A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cap B = A$ C. $A \cap B = B$ D. $A = B$

2. 复数 $z = \frac{3+i}{1+i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 z 的虚部为()

- A. -1 B. -2 C. $-i$ D. $-2i$

3. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 他在所著的《数学九章》中提出的多项式求值的算法, 至今仍是比较先进的. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求多项式值的一个实例, 若输入 n, x 的值分别为 3, 3, 则输出的 v 值为

- ()
A. 24
B. 25
C. 54
D. 75

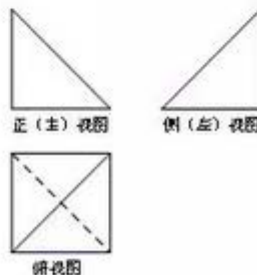


4. 已知 $\vec{a}$ 为单位向量, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 某三棱锥的三视图如图所示, 正视图与侧视图是两个全等的等腰直角三角形, 直角边长为 1, 俯视图为正方形, 则该三棱锥的体积为()

- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$



C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

6. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a > b > 0$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

7. 关于函数 $f(x) = x - \sin x$, 下列说法错误的是()

- A. $f(x)$ 是奇函数
B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增
C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的唯一零点
D. $f(x)$ 是周期函数

8. 已知函数 $f(x) = 2^x (x < 0)$ 与 $g(x) = \ln(x + a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点, 则 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 2)$
B. $(-\infty, e)$
C. $(2, e)$
D. $(e, +\infty)$

二、填空题(本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

9. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为_____.

10. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq 2x, \\ x + y \geq 3, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最大值为_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = 6, AC = 4, \sin A = \frac{3}{4}$, 则 $\angle B =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0, \\ -x + 3, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(-1) =$ _____; 求满足 $f(x) > 1$ 的 x 的取值范围_____.

13. 已知点 $A(-a, 0), B(a, 0) (a > 0)$, 若圆 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ 上存在点 C 使得 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 a 的最大值为_____.

14. 如果函数 $f(x)$ 满足: 对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 在下列函数:

- ① $f(x) = 2x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x^2$ ④ $f(x) = 2^x$ ⑤ $f(x) = \ln|x|$

中所有“保等比数列函数”的序号为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80.0 分)

15. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 2, S_5 = 40$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = a_3, b_4 = a_1 + a_5$, 问: b_7 与数列 $\{a_n\}$ 的第几项相等?

16. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos 2x + 1}{2 \cos x}$.

(I) 求 $f(0)$ 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(III) 求函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的取值范围.

17. 苹果是人们日常生活中常见的营养型水果. 某地水果批发市场销售来自 5 个不同产地的富士苹果, 各产地的包装规格相同, 它们的批发价格(元/箱)和市场份额如下:

产地	A	B	C	D	E
批发价格	150	160	140	155	170
市场份额	15%	10%	25%	20%	30%

市场份额亦称“市场占有率”, 指某一产品的销售量在市场同类产品中所占比重.

(I) 从该地批发市场销售的富士苹果中随机抽取一箱, 求该箱苹果价格低于 160 元的概率;

(II) 按市场份额进行分层抽样, 随机抽取 20 箱富士苹果进行检验,

① 从产地 A, B 共抽取 n 箱, 求 n 的值;

② 从这 n 箱苹果中随机抽取两箱进行等级检验, 求两箱产地不同的概率;

(III) 由于受种植规模和苹果品质的影响, 预计明年产地 A 的市场份额将增加 5%, 产地 C 的市场份额将减少 5%, 其它产地的市场份额不变, 苹果销售价格也不变(不考虑其它因素). 设今年苹果的平均批发价为每箱 M_1 元, 明年苹果的平均批发价为每箱 M_2 元, 比较 M_1, M_2 的大小. (只需写出结论)

18. 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD$, E 为 DC 的中点. 以 AE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置, 且平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$ (如图 2).

(I) 求证: $EC \parallel$ 平面 PAB ;

(II) 求证: $BE \perp PA$;

(III) 对于线段 PB 上任意一点 M , 是否都有 $PA \perp EM$ 成立? 请证明你的结论.

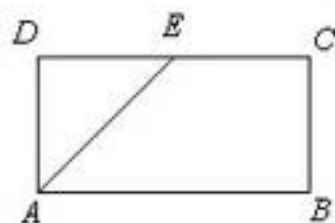


图 1

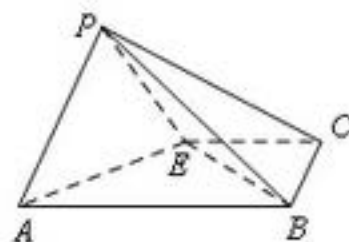


图 2

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，过坐标原点 O 做两条互相垂直的射线，与椭圆分别交于 M, N 两点.

(I) 求椭圆的离心率;

(II) 求证: 点 O 到直线 MN 的距离为定值.

20. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + (2-m)x + 2$, $g(x) = \frac{x^2 + 3m^2}{x-m}$, $m \in \mathbb{R}$.

(I) 当 $m = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(II) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(III) 设 $m < 0$, 若对于任意 $x_0 \in [0, 1]$, 总存在 $x_1 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_0)$ 成立, 求 m 的取值范围.

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

6. 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a > b > 0$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 关于函数 $f(x) = x - \sin x$, 下列说法错误的是()

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增

C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的唯一零点

D. $f(x)$ 是周期函数

8. 已知函数 $f(x) = 2^x (x < 0)$ 与 $g(x) = \ln(x + a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点, 则 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, e)$

C. $(2, e)$

D. $(e, +\infty)$

二、填空题(本大题共 6 小题, 共 30.0 分)

9. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为_____.

10. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq 2x, \\ x + y \geq 3, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最大值为_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = 6, AC = 4, \sin A = \frac{3}{4}$, 则 $\angle B =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0, \\ -x + 3, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(-1) =$ _____; 求满足 $f(x) > 1$ 的 x 的取值范围_____.

13. 已知点 $A(-a, 0), B(a, 0) (a > 0)$, 若圆 $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ 上存在点 C 使得 $\angle ACB = 90^\circ$, 则 a 的最大值为_____.

14. 如果函数 $f(x)$ 满足: 对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为“保等比数列函数”. 在下列函数:

① $f(x) = 2x$

② $f(x) = x + 1$

③ $f(x) = x^2$

④ $f(x) = 2^x$

⑤ $f(x) = \ln|x|$

中所有“保等比数列函数”的序号为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80.0 分)

答案和解析

1. C

2. A

3. D

4. B

5. C

6. A

7. D

8. B

9. $x = -1$

10. 10

11. $\frac{\pi}{6}$

12. $\frac{1}{3}$ (0, 2)

13. $3\sqrt{2}$

14. ①③

15. 解: (I) 由 $S_5 = 40$ 得 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4 \times d}{2} = 40$ (2 分)

又 $a_1 = 2, \therefore d = 3$ (4 分)

由等差数列的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$,

得: $a_n = 3n - 1$; (6 分)

(II) $\because b_3 = a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8, b_4 = a_1 + a_5 = 2 + 3 \times 5 - 1 = 16$,

$\therefore q = \frac{b_4}{b_3} = \frac{16}{8} = 2$, (8 分)

又 $\because b_3 = b_1 \cdot q^2$, 即 $8 = b_1 \cdot 2^2$, 得 $b_1 = 2$ (9 分)

$\therefore b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ (11 分)

$\therefore b_7 = 2^7 = 128$.

由 $b_7 = a_n = 3n - 1$, 即 $128 = 3n - 1$, 得: $n = 43$.

于是 b_7 与数列 $\{a_n\}$ 的第 43 项相等.(13 分)

$$16. \text{解: (I)} \because f(x) = \frac{\sin 2x + \cos 2x + 1}{2 \cos x},$$

$$\therefore f(0) = \frac{\sin 0 + \cos 0 + 1}{2 \cos 0} = \frac{1+1}{2} = 1;$$

$$\text{(II) 由 } \cos x \neq 0, \text{ 得 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \text{函数的定义域是 } \{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

$$\text{(III) } f(x) = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x - 1 + 1}{2 \cdot \cos x}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos x (\sin x + \cos x)}{2 \cdot \cos x} = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\because x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 即 } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \therefore 1 < \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 上的取值范围为 } (1, \sqrt{2}].$$

17. 解: (I) 设事件 A: “从该地批发市场销售的富士苹果中随机抽取一箱, 该箱苹果价格低于 160 元”.

由题意可得: $P(A) = 0.15 + 0.25 + 0.20 = 0.60$ (3 分)

(II) (1) A 地抽取 $20 \times 15\% = 3$, B 地抽取 $20 \times 10\% = 2$,

所以 $n = 3 + 2 = 5$ (5 分)

(2) 设 A 地抽取的 3 箱苹果分别记为 a_1, a_2, a_3 , B 地抽取的 2 箱苹果分别记为 b_1, b_2 ,

从这 5 箱中抽取 2 箱共有 10 种抽取方法, 分别为:

$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, a_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (b_1, b_2)$

来自不同产地共有 6 种.

所以从这 n 箱苹果中随机抽取两箱进行等级检验, 两箱产地不同的概率为: $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (10 分)

(III) $M_1 < M_2$ (13 分)

18. 证明: (I) 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 CD 中点,

所以 $CE \parallel AB$ (2 分)

$AB \subset$ 平面 PAB , $CE \not\subset$ 平面 PAB

所以 $EC \parallel$ 平面 PAB (4 分)

(II) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2CD$, E 是 CD 中点,

可得 $AB^2 = AE^2 + BE^2$

所以 $BE \perp AE$ (6 分)

又 平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $PAE \cap$ 平面 $ABCE = AE$, $BE \subset$ 平面 $ABCE$

所以 $BE \perp$ 平面 PAE (8 分) $PA \subset$ 平面 PAE

所以 $BE \perp PA$ (9 分)

解: (III) 对于线段 PB 上任意一点 M , 都有 $PA \perp EM$ 成立. 证明如下(10 分)

因为矩形 $ABCD$, 所以 $DA \perp DE$, 即 $PA \perp PE$ (11 分)

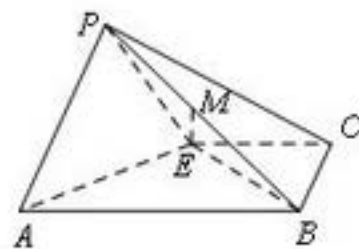
由(II)得 $BE \perp PA$

而 $BE \subset$ 平面 PBE , $PE \subset$ 平面 PBE , $PE \cap BE = E$

所以 $PA \perp$ 平面 PBE (13 分)

对于线段 PB 上任意一点 M , $EM \subset$ 平面 PBE

所以 $PA \perp EM$ (14 分)



19. (I) 解: 由椭圆的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $a = 2, b = \sqrt{3}$.

$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 1$.

$\therefore$ 椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$;

(II) 证明: 当直线 MN 的斜率不存在时, 设 $M(x_0, x_0), N(x_0, -x_0)$.

又 M, N 两点在椭圆上, $\therefore \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{3} = 1, x_0^2 = \frac{12}{7}$.

$\therefore$ 点 O 到直线 MN 的距离 $d = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

当直线 MN 的斜率存在时, 设直线 MN 的方程为 $y = kx + m$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0.$$

$$\text{由已知 } \Delta = (8km)^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) > 0.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2).$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}.$$

$$\because OM \perp ON, \therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0.$$

$$\therefore x_1 x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0.$$

$$\text{即 } (k^2 + 1)x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0.$$

$$\therefore (k^2 + 1) \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2 m^2}{3 + 4k^2} + m^2 = 0.$$

$$\text{整理得 } 7m^2 = 12(k^2 + 1), \text{ 满足 } \Delta > 0.$$

$$\therefore \text{点 } O \text{ 到直线 } MN \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ 为定值.}$$

$$20. \text{解: (I) 当 } m = 2 \text{ 时, } f(x) = x^3 - x^2 + 2, \text{ 所以 } f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\text{所以 } f(1) = 2, f'(1) = 1, \text{ 所以曲线 } y = f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处的切线方程为 } y = x + 1 \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$(II) g(x) = \frac{x^2 + 3m^2}{x - m}, \text{ 的定义域是 } \{x | x \neq m\}, g'(x) = \frac{(x + m)(x - 3m)}{(x - m)^2}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得}$$

$$x_1 = -m, x_2 = 3m \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{①当 } m = 0 \text{ 时, } g(x) = x, (x \neq 0) \text{ 所以函数 } g(x) \text{ 的单调增区间是 } (-\infty, 0), (0, +\infty)$$

$$\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{②当 } m < 0 \text{ 时, } x, g'(x), g(x) \text{ 变化如下:}$$

x	$(-\infty, 3m)$	$3m$	$(3m, m)$	$(m, -m)$	$-m$	$(-m, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+

$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$
--------	------------	--	------------	------------	--	------------

所以函数 $g(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, 3m), (-m, +\infty)$, 单调减区间是 $(3m, m), (m, -m)$,

③当 $m > 0$ 时, $x, g'(x), g(x)$ 变化如下:

x	$(-\infty, -m)$	$-m$	$(-m, m)$	$(m, 3m)$	$3m$	$(3m, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$

所以函数 $g(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -m), (3m, +\infty)$, 单调减区间是

$(-m, m), (m, 3m)$ (8 分)

(III) 因为 $f(x) = x^3 - x^2 + (2-m)x + 2$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 2x + (2-m)$

当 $m < 0$ 时, $\Delta = 4 - 12(2-m) = 12m - 20 < 0$,

所以 $f'(x) > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值是 $f(0) = 2$, 最大值是 $f(1) = 4 - m$,

即当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的取值范围为 $[2, 4 - m]$ (10 分)

由(II)知 当 $-1 < m < 0$ 时, $0 < -m < 1$, $g(x)$ 在 $(0, -m)$ 上单调递减, 在 $(-m, 1)$ 上单调递增,

因为 $g(-m) = -2m < 2$, 所以不合题意

当 $m \leq -1$ 时, $-m > 1$, $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $g(0) = -3m$, 最小值为 $g(1) = \frac{1+3m^2}{1-m}$

所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $g(x)$ 的取值范围为 $\left[\frac{1+3m^2}{1-m}, -3m\right]$ (12 分)

“对于任意 $x_0 \in [0, 1]$, 总存在 $x_1 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1) = g(x_0)$ 成立”

等价于“ $\left[\frac{1+3m^2}{1-m}, -3m\right] \subseteq [2, 4-m]$ ”

$$\text{解} \begin{cases} \frac{1+3m^2}{1-m} \geq 2 \\ -3m \leq 4-m \end{cases} \text{得} \begin{cases} m \leq -1 \text{ 或 } m \geq \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases}$$

所以 m 的取值范围为 $[-2, -1]$ (13 分)