

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、立体几何、直线与圆、圆锥曲线。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in [-5, 0) \right\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = \log_3 x, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{2, 3\}$ B. $\{1, 2, 3\}$
C. $\{y \mid 1 < y \leq \log_3 32\}$ D. $\{y \mid 0 < y \leq \log_3 32\}$
2. 已知复数 z 满足 $\frac{z+i}{z-2i} = 2-i$, 则 $\bar{z} =$
A. $-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $-\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i$
C. $-\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i$ D. $-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i$
3. 已知直线 $l_1: ax+2y-a+1=0$, 直线 $l_2: x+(a-1)y-2=0$, 则“ $a=2$ ”是“ $l_1 \parallel l_2$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{4}$, 则 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) =$
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{7}{16}$ C. $-\frac{7}{16}$ D. $-\frac{1}{8}$
5. 已知 P 为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $y = 2x + 5$ 的距离大于 m 恒成立, 则
实数 m 的取值范围为
A. $(-\infty, 5]$ B. $(-\infty, \sqrt{5}]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 1]$
6. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(1, 0)$, $B(0, 3)$, $C(3, 0)$, 动点 P 满足 $|\vec{CP}| = 1$, 则 $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OP}|$ 的最大值是
A. $\sqrt{10} + 1$ B. 5 C. $2\sqrt{2} + 1$ D. 6
7. 已知棱长为 4 的正四面体 $A-BCD$, 用所有与点 A, B, C, D 距离均相等的平面截该四面体, 则所有截
面的面积和为
A. $16 + 4\sqrt{3}$ B. $12 + 4\sqrt{3}$
C. $8\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{3}$

8. 若 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, $f'(x)$ 为其导函数, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) + 3f(x) > 0$ 恒成立, 则不等式 $x^3f(x) + (2x-1)^3f(1-2x) < 0$ 的解集为

- A. $(\frac{1}{3}, 1)$
- B. $(1, 3)$
- C. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- D. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知曲线 $E: x^2 + xy + y^2 = 4$, 则

- A. E 关于原点对称
- B. E 关于直线 $y=x$ 对称
- C. E 关于 y 轴对称
- D. $(2, -2)$ 为 E 的一个顶点

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, $\omega > 0$, $\varphi \in [0, \pi)$, 它们的最小正周期均为 π , $f(x) + g(x)$ 的一个零点为 $-\frac{\pi}{6}$, 则

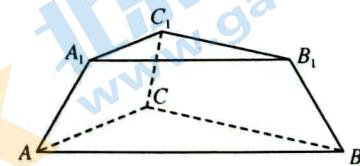
- A. $f(x) + g(x)$ 的最大值为 2
- B. $f(x) + g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
- C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上均单调递增
- D. 将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到 $g(x)$ 的图象

11. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是 C 上两点, O 为坐标原点, M 为 x 轴正半轴上一点, 过 B 作 C 的准线的垂线, 垂足为 B_1 , AB 的中点为 E , 则

- A. 若 $|AF| = 3$, 则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\sqrt{2}$
- B. 若 $|BB_1| = 2|OF|$, 则四边形 $OFBB_1$ 的周长为 $3 + \sqrt{5}$
- C. 若 $|AB| = 6$, 则 E 到 y 轴的最短距离为 3
- D. 若直线 AB 过点 $M(2, 0)$, 则 $\frac{1}{|MA|^2} + \frac{1}{|MB|^2}$ 为定值

12. 如图, 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的上、下底面的边长分别为 4 和 6, 侧棱长为 2, 以点 A 为球心, $2\sqrt{7}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为曲线 Γ , P 为 Γ 上一点, 则

- A. CP 的最小值为 $2\sqrt{3}-2$
- B. 存在点 P , 使得 $AP \perp BC$
- C. 存在点 P 及 B_1C_1 上一点 Q , 使得 $AP \parallel A_1Q$
- D. 所有线段 AP 所形成的曲面的面积为 $\frac{4\sqrt{7}\pi}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = 2|b| = 2$, $|a - b| = 2$, 则 $\cos\langle a, b \rangle = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知实数 x, y 满足 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则 $\frac{y}{x+1}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 \frac{x}{27}$, 若对不相等的正数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以线段 F_1F_2 为直径的圆与 C 在第一、第三象限分别交于点 A, B , 若 $|AF_1| \leq 4|BF_1|$, 则 C 的离心率的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

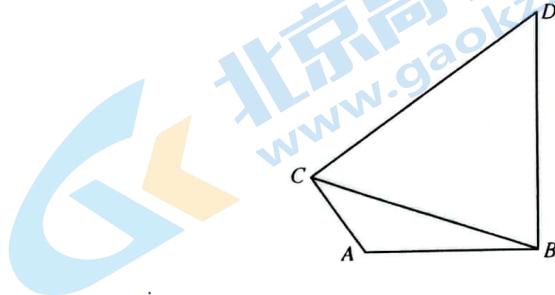
四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=1$, 过 B , C 分别作 AB , AC 的垂线交于点 D .

(1)若 $BD=3$, 求 $\cos A$;

(2)若 $\angle D=60^\circ$, 求 CD .



18.(本小题满分 12 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, $\Pi_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$, 且 $a_n + \Pi_n = 1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $\frac{1}{3} \leq S_n < \frac{3}{4}$.

19.(本小题满分 12 分)

已知动点 P 到点 $F(\sqrt{5}, 0)$ 的距离是到直线 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 的距离的 $\sqrt{5}$ 倍, 记动点 P 的轨迹为曲线 Γ .

(1)求 Γ 的方程;

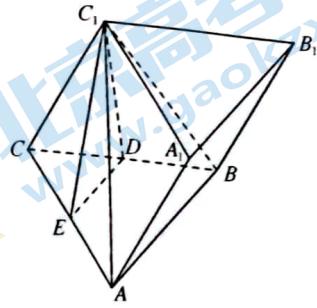
(2)过点 $A(1, 1)$ 能否作一条直线 l , 使得 l 与 Γ 交于 B, C 两点, 且 A 是线段 BC 的中点? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB=2$, $CA \perp CB$, D, E 分别是 CB, CA 的中点, $C_1D=C_1E=2$.

(1) 若平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 求点 C_1 到平面 ABC 的距离;

(2) 若 $CC_1=\sqrt{2}$, 求平面 ACC_1A_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x^2-ax-1(a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a=-2$ 时, 存在 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_1)-f(x_2) \geq M$, 求 M 的最大值;

(2) 已知 m, n 是 $f(x)$ 的两个零点, 记 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 若 $m, n \in (0, +\infty)$, 且 $m < n$,

证明: $f'\left(\frac{m+n}{2}\right) < 0$.

22.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 $2\sqrt{5}$, 离心率为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 Γ 有两个

不同的交点 A, B .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 若直线 l 的方程为 $y=x+t$, 点 $M(0, 1)$ 关于直线 l 的对称点 N (与 M 不重合) 在椭圆 Γ 上, 求 t 的值;

(3) 设 $P(-3, 0)$, 直线 PA 与椭圆 Γ 的另一个交点为 C , 直线 PB 与椭圆 Γ 的另一个交点为 D , 若点

C, D 和点 $Q\left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 三点共线, 求 k 的值.