2023北京北师大实验中学高二（上）期中

数　　学

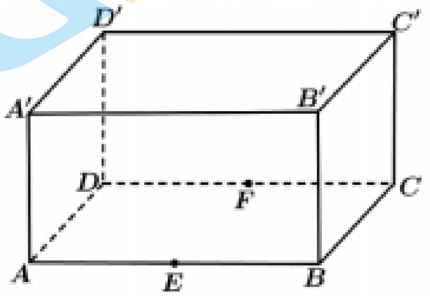
班级______姓名______学号______成绩______

考生须知	
	1．本试卷共4页，共五道大题，24道小题，答题卡共8页，满分150分，考试时间120分钟．
	2．在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号．
	3．试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效．
	4．在答题卡上，选择题须用2B铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答．

第Ⅰ卷（共100分）

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1．如图，E,F 分别是长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AB,CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$ 等于（　）



（A）$\overrightarrow{AD'}$　（B）$\overrightarrow{AC'}$　（C）$\overrightarrow{DE}$　（D）$\overrightarrow{AE}$

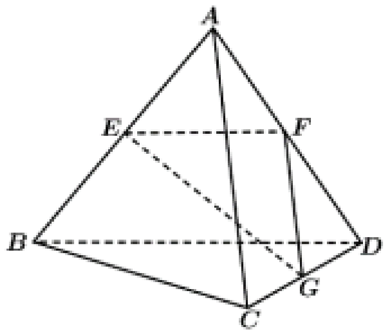
2．直线 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角是（　）

（A）$30°$　（B）$60°$　（C）$120°$　（D）$150°$

3．若抛物线 $x^2=ay$ 的焦点坐标为 $(0,1)$，则其准线方程为（　）

（A）$x=-1$（B）$x=1$　（C）$y=-1$（D）$y=1$

4．如图，已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都等于 a,E,F,G 分别是棱 AB,AD,DC 的中点．则 $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 分别等于（　）



（A）$-\frac{a^2}{2}$和$\frac{a^2}{4}$ （B）$\frac{a^2}{2}$和$-\frac{a^2}{4}$ （C）$\frac{a^2}{2}$和$\frac{a^2}{4}$ （D）$-\frac{a^2}{2}$和$\frac{a^2}{2}$

5．设椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点为$F_1,F_2$，过点$F_1$的直线交椭圆于$A,B$两点，如果$|AB|=8$，那么$|AF_2|+|BF_2|$的值为（ ）

（A）2 （B）10 （C）12 （D）14

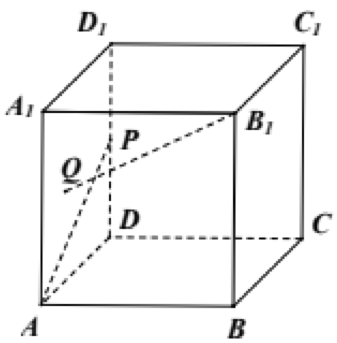
6．抛物线$y^2=4x$上的点到其焦点的距离的最小值为（ ）

（A）$\frac{1}{2}$ （B）1 （C）2 （D）4

7．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点$F(3,0)$到其渐近线的距离为$\sqrt{5}$，则双曲线的方程为（ ）

（A）$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ （B）$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ （C）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ （D）$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

8．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P为棱DD_1的中点，点Q为面ADD_1A_1内一点，$B_1Q\perp AP$，则（ ）



（A）$S_{\triangle A_1D_1Q}=2S_{\triangle A_1AQ}$ （B）$2S_{\triangle A_1D_1Q}=S_{\triangle A_1AQ}$

（C）$2S_{\triangle A_1D_1Q}=3S_{\triangle A_1AQ}$ （D）$3S_{\triangle A_1D_1Q}=2S_{\triangle A_1AQ}$

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9．若经过点$(3,a),(-2,0)$的直线与直线$x-2y+3=0$垂直，则$a=$______.

10．已知平面α的法向量为$(2,-4,-2)$，平面β的法向量为$(-1,2,k)$，若$\alpha//\beta$，则$k=$______.

11．已知两圆 $C_1: x^2+y^2+2x+3y+1=0$ 和 $C_2: x^2+y^2+4x+3y+2=0$ 相交，则圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程为______．

12．设 $\vec{v}_1=1,2,-2, \vec{v}_2=-2,3,2$ 分别是空间两直线 l_1, l_2 的方向向量，则直线 l_1, l_2 所成角的大小为______．

13．已知 $P(2,3)$ 是直线 l 上一点，且 $\vec{n}=(1,-2)$ 是直线 l 的一个法向量，则直线 l 的方程为______．

14．设点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点，点 P 是椭圆 C 上任意一点，若使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=m$ 成立的点恰好是 4 个，则实数 m 的一个取值可以为______．

三、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

15．（本小题满分 10 分）

已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(8,5), B(4,-2), C(-6,3)$，求经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程．

16．（本小题满分 10 分）

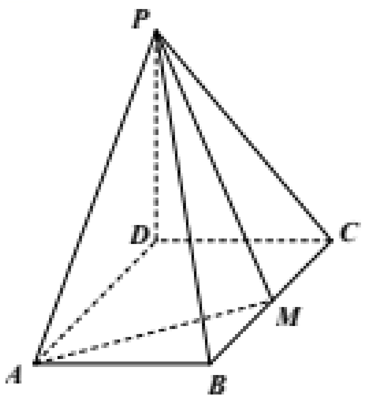
已知直线 $l: x+my-3=0$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y+3)^2=9$．

（Ⅰ）若直线 l 与圆 C 相切，求实数 m 的值；

（Ⅱ）当 $m=-2$ 时，直线 l 与圆 C 交于点 E, F，设 O 为原点，求 $\triangle EOF$ 的面积．

17．（本小题满分 10 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=1, AD=2, M$ 为 BC 的中点．



（Ⅰ）求证：$AD//$ 平面 PBC；

（Ⅱ）求平面 PAM 与平面 PCD 所成的角的余弦值．

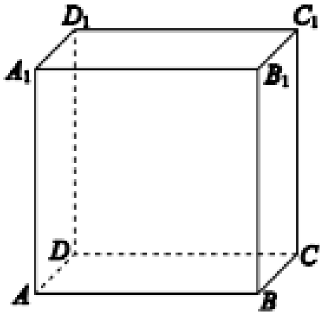
第 II 卷（共 50 分）

四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

18．在空间直角坐标系中，已知点 $A(1,m,1), B(-1,1,2), C(3,-2,1), D(1,-3,2)$，若 A, B, C, D 四点共面，则 $m=$______．

19．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过点 F 作 x 轴的垂线 l，l 在第一象限与双曲线及其渐近线分别交于 A, B 两点．若点 A 是线段 FB 的中点，则双曲线的离心率为______．

20．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2, BC=1$，点 P 在侧面 A_1ABB_1 上．若点 P 到直线 AA_1 和 CD 的距离相等，则 A_1P 的最小值是______．



21．在平面直角坐标系中，到两个点 $A(-2,0)$ 和 $B(2,0)$ 的距离之积等于 4 的轨迹记作曲线 Ω，对于曲线 Ω 及其上一点 P，有下列四个结论：

①曲线 Ω 关于 x 轴对称；

②曲线上有且仅有一点 P，满足 $|PA|=|PB|$；

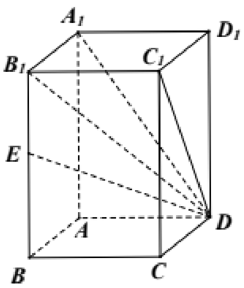
③曲线 Ω 上所有的点的横坐标 $x\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$，纵坐标 $y\in[-1,1]$；

④$|PA|+|PB|$ 的取值范围是 $\left[2\sqrt{2},5\right]$．

其中，所有正确结论的序号是______．

五、解答题（本大题共 3 小题，共 34 分）

22．（本小题满分 12 分）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，点 E 在棱 BB_1 上



（Ⅰ）求证：$A_1C_1\perp DB_1$；

（Ⅱ）从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 $DB_1\perp$ 平面 EA_1C_1，并给出证明．

条件①：E 为 BB_1 的中点；

条件②：BD_1 // 平面 EA_1C_1；

条件③：$DB_1\perp BD_1$．

（Ⅲ）若 E 为 BB_1 的中点，且点 D 到平面 EA_1C_1 的距离为 1，求 BB_1 的长度．

23．（本小题满分 12 分）

已知椭圆$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右顶点分别为$A_1,A_2$，上、下顶点分别为$B_2,B_1,\left|B_1B_2\right|=2\sqrt{2}$，四边形$A_1B_1A_2B_2$的周长为$8\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆Γ的方程；

（Ⅱ）设点F为椭圆Γ的左焦点，点$T\left(-3,m\right)$，过点F作TF的垂线交椭圆Γ于点P,Q，连接OT与PQ交于点H．试判断$\dfrac{|PH|}{|HQ|}$是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，说明理由.

24.（本小题满分 10 分）

n个有次序的实数$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$所组成的有序数组$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\right)$称为一个$\vec{n}$维向量，其中$\vec{a}_i\left(i=1,2\cdots,\vec{n}\right)$称为该向量的第$i$个分量．特别地，对一个$\vec{n}$维向量$\vec{a}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\right)$，若$\left|\vec{a}_i\right|=1,\mathrm{i}=1,2\cdots\vec{n}$，称$\vec{a}$为$\vec{n}$维信号向量．设$\vec{a}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n\right),\vec{b}=\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n\right)$，则$\vec{a}$和$\vec{b}$的内积定义为$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i\vec{b}_i$，且$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

（Ⅰ）直接写出 4 个两两垂直的 4 维信号向量.

（Ⅱ）证明：不存在 14 个两两垂直的 14 维信号向量.

（Ⅲ）已知k个两两垂直的 2024 维信号向量$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k$满足它们的前$m$个分量都是相同的，求证：$\sqrt{km}<45$.

参考答案

第Ⅰ卷（共100分）

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. D　2. D　3. C　4. A

5. C　6. B　7. A　8. A

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

9. -10　10. 1　11. $2x+1=0$　12. $\dfrac{\pi}{2}$

13. $x-2y+4=0$

三、解答题（本大题共3小题，共35分）

15.（本小题满分13分）

解：设 AB 和 AC 的中点分别为 D,E，

因为 $A(8,5),B(4,-2),C(-6,3)$，所以 $D\left(6,\dfrac{3}{2}\right),E(1,4)$

（或求一点，BC 斜率）所以直线 DE 的方程为：$\dfrac{y-4}{x-1}=\dfrac{\frac{3}{2}-4}{6-1}$，

整理得：$x+2y-9=0$，

经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程为 $x+2y-9=0$．

16.（本小题满分12分）

解：（Ⅰ）$m=\dfrac{4}{3}$．

（Ⅱ）当 $m=-2$ 时直线 $l:x-2y-3=0$，

点 C 到直线 l 的距离为 $\sqrt{5}$．求得 $|EF|=4$，

原点 O 到直线 l 的距离为 $h=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$\triangle EOF$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|EF|\cdot h=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$．

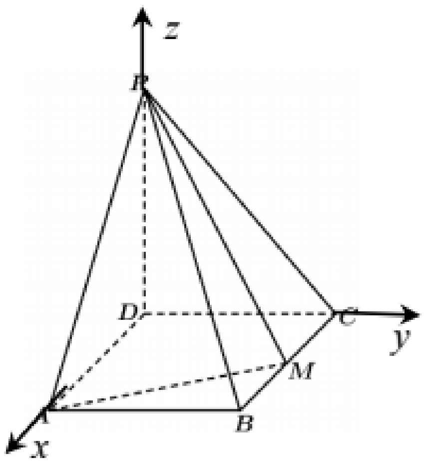
17.（本小题满分10分）

解：（Ⅰ）证明：因为四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，

所以 $AD//BC$，又因为 $AD\not\subset$ 平面 $PBC, BC\subset$ 平面 PBC，

所以 $AD//$ 平面 PBC

（Ⅱ）解：以点 D 为坐标原点，DA、DC、DP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，



$\because PD=DC=1, AD=2, M$ 为 BC 的中点.

$\therefore D(0,0,0), A(2,0,0), M(1,1,0), P(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(2,0,-1), \overrightarrow{PM}=(1,1,-1)$，

设平面 PAM 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0, \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x-z=0, \\ x+y-z=0, \end{cases}$

令 $z=2$，则 $x=1, y=1$ $\therefore \vec{n}=(1,1,2)$

$\because$ 平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，

$\therefore \cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1\times1+0\times1+0\times2}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$，

$\therefore$ 平面 PAM 与平面 PCD 所成的角的余弦值 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

第 II 卷（共 50 分）

四、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

18．2　19．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　20．$\sqrt{3}$

五、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分）

22.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）连结 BD, B_1D_1.

由直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 知，$BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

又 $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $BB_1\perp A_1C_1$.

因为 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，所以 $A_1C_1\perp B_1D_1$. 又 $B_1D_1\cap BB_1=B_1$，

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 D_1DBB_1.

又 $DB_1 \subset$ 平面 D_1DBB_1，所以 $A_1C_1 \perp DB_1$.

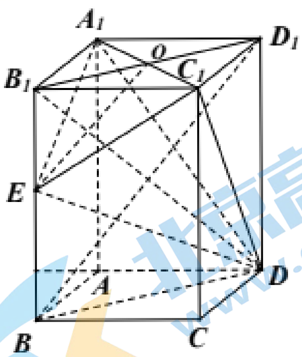
（Ⅱ）选条件①、条件③，可使 $DB_1 \perp$ 平面 EA_1C_1. 证明如下：设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连结 OE, BD_1.

又 E, O 分别是 BB_1, B_1D_1 的中点，所以 $OE // BD_1$.

因为 $DB_1 \perp BD_1$，所以 $DB_1 \perp OE$.

由（Ⅰ）知 $A_1C_1 \perp$ 平面 D_1DBB_1，所以 $A_1C_1 \perp DB_1$.

又 $A_1C_1 \cap OE = O$，所以 $DB_1 \perp$ 平面 EA_1C_1.



（Ⅱ）选条件②、条件③，可使 $DB_1 \perp$ 平面 EA_1C_1. 证明如下：

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连结 OE.

因为 $BD_1 //$ 平面 $EA_1C_1, BD_1 \subset$ 平面 D_1DBB_1，平面 $D_1DBB_1 \cap$ 平面 $EA_1C_1 = OE$，所以 $BD_1 // OE$.

因为 $DB_1 \perp BD_1$，所以 $DB_1 \perp OE$.

由（Ⅰ）知 $A_1C_1 \perp$ 平面 D_1DBB_1，所以 $A_1C_1 \perp DB_1$.

又 $A_1C_1 \cap OE = O$，所以 $DB_1 \perp$ 平面 EA_1C_1.

（Ⅲ）设 $BB_1 = 2t\left(t > 0\right)$.

因为 DA, DC, DD_1 两两垂直，

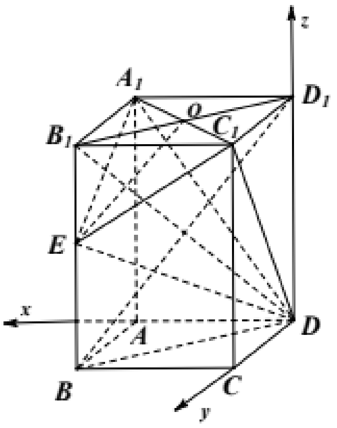
如图，以 D 为原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D\left(0,0,0\right), A_1\left(1,0,2t\right), C_1\left(0,1,2t\right), E\left(1,1,t\right)$，所以 $\overrightarrow{A_1C_1} = \left(-1,1,0\right), \overrightarrow{EA_1} = \left(0,-1,t\right)$.

设平面 DA_1C_1 的法向量为 $\vec{n} = \left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EA_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -y + tz = 0. \end{cases}$

令 $z = 1$，则 $x = y = t$，于是 $\vec{n} = \left(t,t,1\right), \overrightarrow{DE} = \left(1,1,t\right)$.

点 D 到平面 EA_1C_1 的距离为

则 $d = \dfrac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DE}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|3t\right|}{\sqrt{2t^2 + 1}} = 1$，解得 $t = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以 $BB_1 = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.



23.（本小题满分 12 分）

解：依题意可得：$\begin{cases}2b=2\sqrt{2},\\ 4\sqrt{a^2+b^2}=8\sqrt{2}\end{cases}$．解得 $a^2=6,b^2=2$．

所以椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$．

（Ⅱ）$\frac{|PH|}{|HQ|}$ 为定值 1，理由如下：

由 $T(-3,m),F(-2,0)$，显然斜率存在，$k_{TF}=-m$，

当 $m=0$ 时，$\frac{|PH|}{|HQ|}=1$．

当 $m\neq 0$ 时，直线 PQ 过点 F 且与直线 TF 垂直，则直线 PQ 方程为 $y=\frac{1}{m}(x+2)$．

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{m}(x+2),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(m^2+3)x^2+12x+12-6m^2=0$．

显然 $\Delta>0$．

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{12}{m^2+3},x_1x_2=\frac{12-6m^2}{m^2+3}$．

则 P,Q 中点 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{6}{m^2+3}$．直线 OT 的方程为 $y=-\frac{m}{3}x$，

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{m}(x+2),\\ y=-\frac{m}{3}x\end{cases}$ 得 $x_H=-\frac{6}{m^2+3}$，所以 H 为线段 PQ 的中点，所以 $\frac{|PH|}{|HQ|}=1$．综上 $\frac{|PH|}{|HQ|}$ 为定值 1．

24.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$(1,1,1,1),(-1,-1,1,1),(-1,1,-1,1),(-1,1,1,-1)$．

（Ⅱ）假设存在 14 个两两垂直的 14 维信号向量 $\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2},\cdots,\overrightarrow{y_{14}}$，

$\because$ 将这 14 个向量的某个分量同时变号或将某两个位置的分量同时互换位置，任意两个向量的内积不变，

$\therefore$ 不妨设 $\vec{y}_1=(1,1,\cdots,1),\vec{y}_2=(1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$，

$\because \vec{y}_1\cdot\vec{y}_3=0 \therefore \vec{y}_3$ 有 7 个分量为 -1

设 $\vec{y}_3$ 的前 7 个分量中有 r 个-1，则后 7 个分量中有 $7-r$ 个 -1

$\therefore \vec{y}_2\cdot\vec{y}_3=r\cdot(-1)+(7-r)+(7-r)+r\cdot(-1)=0 \therefore r=\dfrac{7}{2}$，矛盾

$\therefore$ 不存在 14 个两两垂直的 14 维信号向量.

（Ⅲ）任取 $i,j\in\{1,2,\ldots,k\}$，计算内积 $\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j$，将所有这些内积求和得到 S，则

$S=\vec{x}_1^2+\vec{x}_2^2+\cdots+\vec{x}_k^2=2024k$

设 $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_k$ 的第 k 个分量之和为 c_i，则从每个分量的角度考虑，每个分量为 S 的贡献为 c_i^2

$\therefore S=c_1^2+c_2^2+\cdots+c_{2024}^2\ge c_1^2+c_2^2+\cdots+c_m^2=k^2m$

$\therefore 2024k\ge k^2m \therefore km\le 2024<2025 \therefore \sqrt{km}<45$.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！