

2023 北京人大附中高一（上）期中

数 学

2023 年 11 月 1 日

说明：本试卷分 I 卷和 II 卷，I 卷 18 道题，共 100 分；II 卷 8 道题，共 50 分。

I 卷、II 卷共 26 题，合计 150 分，考试时间 120 分钟。

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效

I 卷（共 18 道题，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 3\}$

2. 已知命题 $p: \exists x < 0, x^2 + x \leq -\frac{1}{2}$ ，则 $\neg p$ 是 ()

- A. $\forall x \geq 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$ B. $\exists x \geq 0, x^2 + x \leq \frac{1}{2}$
C. $\forall x < 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$ D. $\exists x < 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$

3. 下列函数中，在定义域上单调递减的是 ()

- A. $y = x - 1$ B. $y = -|x|$ C. $y = -x^2 - 2x - 1$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

4. 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ ，若 $x^2 + y^2 = 2$ ，则 ()

- A. xy 的最大值为 1 B. xy 的最大值为 2 C. xy 的最小值为 1 D. xy 的最小值为 2

5. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x + a = 0$ 的两个实根为 x_1, x_2 ，且 $|x_1 - x_2| = 1$ ，则 a 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 已知函数 $f(x) = x^2 - 1$ ， $g(x) = (x+1)^2$ ，下表列出了 $x = m$ 时各函数的取值，则 ()

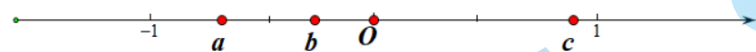
x	$f(x)$	$g(x)$	$f[g(x)]$
m	8	4	n

- A. $m = 3, n = 15$ B. $m = -3, n = 15$
C. $m = 3, n = 81$ D. $m = -3, n = 81$

7. “函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上不是增函数”的一个充要条件是 ()

- A. “存在 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) = f(b)$ ”
- B. “存在 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) \geq f(b)$ ”
- C. “存在 $a \in (1, 2]$, 使得 $f(a) \leq f(1)$ ”
- D. “存在 $a \in (1, 2)$, 使得 $f(a) \geq f(2)$ ”

8. 如图, 数轴上给出了表示实数 a, b, c 的三个点, 下列判断正确的是 ()

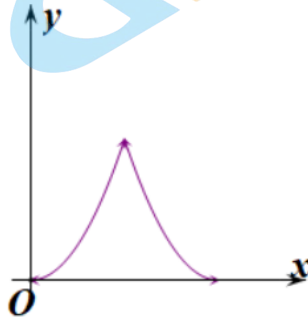
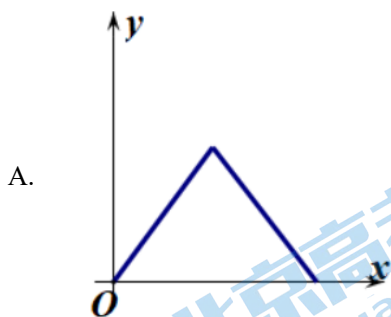
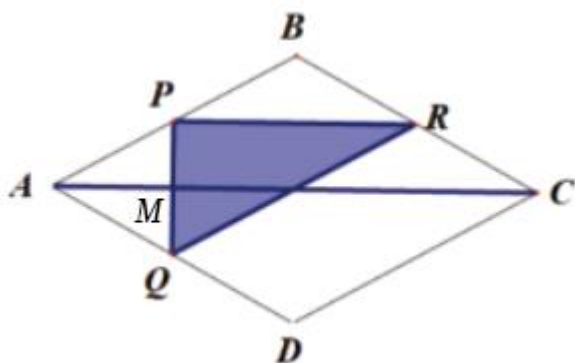


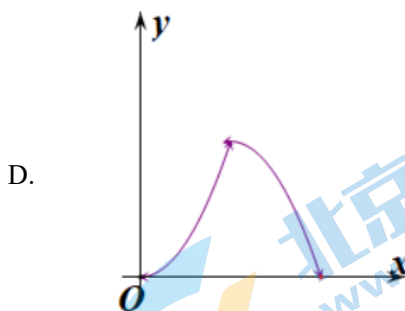
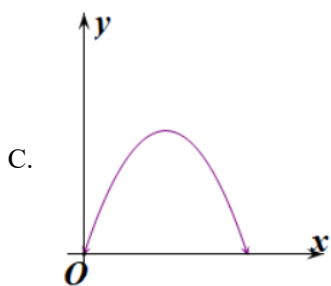
- A. $ab > c$
- B. $abc > \frac{1}{2}$
- C. $c + 2b < a$
- D. $a + c > 2b$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均有 $xf(x) \leq g(x)$, 则函数 $g(x)$ 可以是 ()

- A. $g(x) = \frac{1}{x}$
- B. $g(x) = x$
- C. $g(x) = x^2$
- D. $g(x) = |x|$

10. 如图, 给定菱形 $ABCD$, 点 P 从 A 出发, 沿 $A-B-C$ 在菱形的上运动, 运动到 C 停止, 点 P 关于 AC 的对称点为 Q , PQ 与 AC 相交于点 M , R 为菱形 $ABCD$ 边上的动点 (不与 P, Q 重合), 当 $AM = x$ 时, $\triangle PQR$ 面积的最大值为 y , 则 y 关于 x 的函数图象大致是 ()





二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。请将结果填在答题纸上的相应位置）

11. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ 的定义域是_____.

12. 不等式 $|2x-3| < 3$ 的解集是_____.

13. $A = \{y | y = \sqrt{x}\}$, $B = \{x | x^2 - (a+1)x + a = 0\}$, $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值集合是_____.

14. 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使得 $x^2 - ax + 9 = 0$, 则实数 a 的取值集合是_____.

15. 对集合 A, B , 定义 $A \otimes B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

①若 $A \otimes B$ 的元素个数为 4, 则 A, B 可以为: $A =$ _____, $B =$ _____ (写出一组即可)

②若集合 M 满足: 存在 M 的子集 A, B , 使得 $A \otimes B$ 的元素个数不小于 100, 且对任意 $(a, b) \in A \otimes B$, 均有 $(b, a) \in A \otimes B$, 则集合 M 的元素个数的最小值是_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分。解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置。）

16. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = (-\infty, m)$, 其中 $m \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $B \subseteq A$, 求 m 的取值集合;

(2) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 m 的取值集合.

17. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $y = -3x + 6$ 与 $y = f(x)$ 的图象相交于点 $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并用单调性的定义证明.

18. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x - 3$.

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 求 a 的值;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 求 $x_1 + x_2$ 的取值范围;

(3) 若当 $x \in [3, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

II 卷 (共 8 道题, 满分 50 分)

一. 选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

19. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 4\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ ()

- A. $(1, 3)$ B. $[1, 3]$ C. $[-4, 1] \cup [3, 4]$ D. $(-4, 1) \cup (3, 4)$

20. 若 $xy \neq 0$, 则“ $x + y = 1$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{1}{xy}$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

21. 若 $x_0^3 + y_0^3 = a$ ($x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$), 则称 (x_0, y_0) 是关于 x, y 的方程 $x^3 + y^3 = a$ 的整数解. 关于该方程, 下列判断错误的是 ()

- A. $\exists a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 有无限组整数解
B. $\exists a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 有且只有两组整数解
C. $\forall a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 至少有一组整数解
D. $\forall a \neq 0$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 至多有有限组整数解

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置.)

22. 函数 $y = |x - 1| + |x + 1|$ 的最小值为_____.

23. 若 $\forall x \in [a, a + 1]$, $\exists y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 使得 $xy = 1$, 则实数 $a =$ _____.

24. 若 (x_0, y_0) 是方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$ 的一组解, 则代数式 $\frac{\sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}}{|3y_0 - 1|}$ 的值为_____.

25. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -a \\ -x^2 + a^2, & -a \leq x \leq a \\ -\sqrt{x} - 1, & x > a \end{cases}$, 给出下列四个结论:

- ① 当 $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;
② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
③ 设 $M(x_1, f(x_1))$ ($x_1 \leq a$), $N(x_2, f(x_2))$ ($x_2 > a$), 则 $|MN| > 1$;
④ 若 $y = f(x)$, $y = -x$ 的函数图象有三个公共点, 则 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本大题共 1 小题，共 12 分．解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置．）

26. 对非空数集 T ，给出如下定义，

定义 1：若 $\forall x, y \in T$ ，当 $x+y \neq x-y$ 时， $\{x+y, x-y\} \cap T \neq \emptyset$ ，则称 T 为强和差集；

定义 2：若 $\forall x, y \in T$ ，当 $x+y \neq |x-y|$ 时， $\{x+y, |x-y|\} \cap T \neq \emptyset$ ，则称 T 为弱和差集．

(1) 分别判断 $\{0, 1\}$ 是否为强和差集， $\{1, 2\}$ 是否是弱和差集，并说明理由；

(2) 若集合 $A = \{1, a, b\}$ 是弱和差集，求 A ；

(3) 若强和差集 B 的元素个数为 12，且 $1 \in B$ ，求满足条件的集合 B 的个数．

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置．）

1. 【答案】C

【分析】根据 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 求解即可．

【详解】因为 $A = 0, 1, 2, 3$ ， $B = -1, 0, 1, 2$ ，所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ ．

故选：C

2. 【答案】C

【分析】直接写出存在量词命题的否定．

【详解】命题 $p: \exists x < 0, x^2 + x \leq -\frac{1}{2}$ 则 $\neg p$ 是 $\forall x < 0, x^2 + x > -\frac{1}{2}$ ，

故选：C.

3. 【答案】D

【分析】根据基本函数的单调性逐项判断即可．

【详解】A 选项， $y = x - 1$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，不符合题意；

B 选项， $y = -|x|$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，不符合题意；

C 选项， $y = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增，在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减，不符合题意；

D 选项，要使函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 有意义，则 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq 0$ ，

所以函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，

因为 $y = \sqrt{x+1}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增， $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以由函数单调性性质得 $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，符合题意．

故选：D

4. 【答案】A

【分析】利用重要不等式求解．

【详解】由不等式可知， $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ，所以 $xy \leq 1$ ，

当且仅当 $x = y = \pm 1$ 时取得等号，所以 xy 的最大值为 1，A 正确，B 错误；

由不等式可知， $x^2 + y^2 \geq -2xy$ ，所以 $xy \geq -1$ ，

当且仅当 $x=1, y=-1$ 或 $x=-1, y=1$ 时取得等号,

所以 xy 的最小值为 -1 , CD 错误;

故选:A.

5. 【答案】B

【分析】由韦达定理得到两根之和, 两根之积, 从而得到方程, 求出 a 的值, 检验后得到答案.

【详解】由韦达定理得 $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = a$,

$$\text{故 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{3^2 - 4a} = 1, \text{ 解得 } a = 2,$$

当 $a = 2$ 时, 满足 $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$, 故 a 的值为 2.

故选: B

6. 【答案】B

【分析】根据表格列出关于 m 等式并解出, 代入 $f[g(m)]$ 求出 n 即可.

【详解】由表知, $f(m) = m^2 - 1 = 8, g(m) = (m+1)^2 = 4$, 解得 $m = -3$,

$$\text{所以 } f[g(m)] = f(4) = 16 - 1 = 15 = n,$$

所以 $m = -3, n = 15$.

故选: B

7. 【答案】B

【分析】由增函数的定义, 结合全称命题的否定形式, 即可判断选项.

【详解】若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 是增函数,

即任意 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) < f(b)$,

则若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 不是增函数,

即存在 $a, b \in [1, 2]$, 使得 $a < b$ 且 $f(a) \geq f(b)$.

故选: B

8. 【答案】D

【分析】先在数轴上读出 a, b, c 的范围及大小关系, 再结合不等式性质即可判定选项.

【详解】由数轴可得 $-1 < a < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < b < 0, \frac{1}{2} < c < 1$,

所以 $\frac{1}{2} < -a < 1, 0 < -b < \frac{1}{2}$, 则 $0 < ab < \frac{1}{2} < c$, 故选项 A 错误;

$0 < abc < \frac{1}{2}$, 故选项 B 错误;

因为 $-\frac{1}{2} < b < 0$, 即 $-1 < 2b < 0$,

又 $\frac{1}{2} < c < 1$, 所以 $-\frac{1}{2} < c + 2b < 1$,

又 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 所以 $c + 2b > a$, 故选项 C 错误;

因为 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < c < 1$, 且由图可知 $|a| < |c|$, 即 $-a < c$

所以 $0 < a + c < \frac{1}{2}$,

又 $-1 < 2b < 0$

所以 $a + c > 2b$, 故选项 D 正确;

故选: D.

9. 【答案】D

【分析】根据题意, 取特殊值验证的方法判断 A, B, C, 根据 $g(x)$ 满足的条件判断 D.

【详解】对于 A, $g(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, 不妨取 $x = 2$, 则 $f(2) = 1$,

此时 $2 \leq \frac{1}{2}$ 不成立, 即 $xf(x) \leq g(x)$ 不成立, A 错误;

对于 B, $g(x) = x$, 当 $x \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ 时, 不妨取 $x = -\sqrt{2}$, 则 $f(-\sqrt{2}) = 0$,

则 $0 \leq -\sqrt{2}$ 不成立, 即 $xf(x) \leq g(x)$ 不成立, B 错误;

对于 C, $g(x) = x^2$, 不妨取 $x = \frac{1}{2}$, 则 $f(\frac{1}{2}) = 1$,

此时 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}$ 不成立, 即 $xf(x) \leq g(x)$ 不成立, C 错误;

对于 D, $g(x) = |x|$, 当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, 则 $f(x) = 1$,

此时 $x \leq |x|$ 恒成立, 即 $xf(x) \leq g(x)$ 成立,

当 $x \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ 时, 则 $f(x) = 0$, 此时 $0 \leq |x|$ 恒成立, 即 $xf(x) \leq g(x)$ 成立,

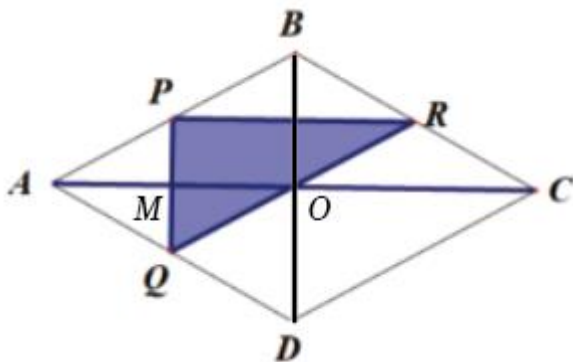
故对任意 $x \in \mathbb{R}$, 均有 $xf(x) \leq g(x)$, D 正确,

故选: D

10. 【答案】C

【分析】分 $AM = x \leq AO$ 和 $AO < AM = x \leq AC$ 两种情况讨论 $\triangle PQR$ 面积的最大值, 然后根据解析式判断图象即可.

【详解】



连接 BD 交 AC 于点 O ,

当 $AM = x \leq AO$ 时, 点 R 在点 C 处时 $\triangle PQR$ 面积最大, 此时

$$y = \frac{1}{2} PQ \cdot CM = x \tan \angle BAC \cdot (AC - x),$$

当 $AO < AM = x \leq AC$ 时, 点 R 在点 A 处 $\triangle PQR$ 面积最大, 此时

$$y = \frac{1}{2} PQ \cdot AM = (AC - x) \tan \angle BCA \cdot x,$$

$\angle BAC = \angle BCA$ 且为定值, AC 为定值, 设 $\tan \angle BAC = \tan \angle BCA = a$, $AC = b$,

所以 y 关于 x 的函数为 $y = a(b - x)x$.

故选: C.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置)

11. 【答案】 $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$

【分析】解分式不等式求得正确答案.

【详解】依题意,
$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x < -1 \text{ 或 } x \geq 2,$$

所以 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$.

故答案为: $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$

12. 【答案】 $(0, 3)$

【分析】由题意可得 $-3 < 2x - 3 < 3$, 求解即可.

【详解】解: 因为 $|2x - 3| < 3$,

所以 $-3 < 2x - 3 < 3$, $0 < 2x < 6$,

即 $0 < x < 3$,

所以不等式 $|2x - 3| < 3$ 的解集为 $(0, 3)$.

故答案为: $(0, 3)$

13. 【答案】 $\{a | a \geq 0\}$

【分析】先求得集合 A ，结合一元二次方程的根及包含关系求解即可。

【详解】由题意， $A = \{y | y = \sqrt{x}\} = \{y | y \geq 0\}$ ，

$$B = \{x | x^2 - (a+1)x + a = 0\} = \{x | (x-a)(x-1) = 0\},$$

当 $a=1$ 时， $B = \{1\}$ ，满足 $B \subseteq A$ ，符合题意；

当 $a \neq 1$ 时， $B = \{1, a\}$ ，要使得 $B \subseteq A$ ，则 $a \geq 0$ ，且 $a \neq 1$ 。

综上所述，实数 a 的取值集合是 $\{a | a \geq 0\}$ 。

故答案为： $\{a | a \geq 0\}$ 。

14. 【答案】 $\{a | a \geq 6\}$

【分析】分析可得原题意等价于存在 $x \in (0, +\infty)$ ，使得 $a = x + \frac{9}{x}$ ，结合基本不等式运算求解。

【详解】因为 $x > 0$ ， $x^2 - ax + 9 = 0$ ，整理得 $a = x + \frac{9}{x}$ ，

原题意等价于存在 $x \in (0, +\infty)$ ，使得 $a = x + \frac{9}{x}$ ，

又因为 $x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6$ ，当且仅当 $x = \frac{9}{x}$ ，即 $x = 3$ 时，等号成立，

可得 $a \geq 6$ ，所以实数 a 的取值集合是 $\{a | a \geq 6\}$ 。

故答案为： $\{a | a \geq 6\}$ 。

15. 【答案】 ①. $\{1, 2\}$ （答案不唯一） ②. $\{3, 4\}$ （答案不唯一） ③. 10

【分析】根据题目中集合的新定义，结合元素与集合的关系求解即可。

【详解】设集合 A 中元素个数为 m ，集合 B 中元素个数为 n ，

根据题意可知集合 $A \otimes B$ 的元素个数为 mn ，

若 $A \otimes B$ 的元素个数为 4，则 A, B 可以为 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，

若对任意 $(a, b) \in A \otimes B$ ，均有 $(b, a) \in A \otimes B$ ，则 $A = B$ ， $m = n$ ，

又 $A \otimes B$ 的元素个数不小于 100，则 $mn = m^2 \geq 100$ ，解得 $m \geq 10$ ，

因为 A, B 是集合 M 的子集，所以集合 M 的元素个数的最小值是 10。

故答案为： $\{1, 2\}$ （答案不唯一）， $\{3, 4\}$ （答案不唯一），10

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分。解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置。）

16. 【答案】(1) $(-\infty, -2]$

(2) $[3, +\infty)$

【分析】(1)先求出集合 A ，再由 $B \subseteq A$ 可得 m 的范围；

(2)结合(1)中求出的 A 集合以及并集的概念可得 m 的范围。

【小问 1 详解】

$$A = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\} = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}, \text{ 由于 } B = (-\infty, m) \text{ 且 } B \subseteq A,$$

所以 $m \leq -2$ ，即 $m \in (-\infty, -2]$ ；

【小问 2 详解】

因为 $A \cup B = \mathbf{R}$ ，所以 $m \geq 3$ ，即 $m \in [3, +\infty)$ 。

17. 【答案】(1) $f(x) = -x + \frac{4}{x}$

(2) 单调递减；证明见解析

【分析】(1) 根据已知条件求出点 A 与点 B 坐标，然后代入函数 $f(x)$ 的解析式中，列出方程组求解 a ， b 的值进而求解函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 根据单调性的定义，先作差，再因式分解，根据各因子的符号确定差的符号，进而根据定义确定函数单调性

【小问 1 详解】

已知 $A(1, f(1))$ ， $B(2, f(2))$ 为函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 与 $y = -3x + 6$ 的交点，

$$\text{因此可得：} f(1) = a + b = -3 + 6 = 3, \quad f(2) = 2a + \frac{b}{2} = -3 \times 2 + 6 = 0,$$

$$\text{解得：} a = -1, \quad b = 4, \text{ 即得：} f(x) = -x + \frac{4}{x}.$$

【小问 2 详解】

函数 $f(x) = -x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

证明：设任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，

$$\begin{aligned} \therefore f(x_1) - f(x_2) &= \left(-x_1 + \frac{4}{x_1}\right) - \left(-x_2 + \frac{4}{x_2}\right) = (x_2 - x_1) + \left(\frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2}\right) \\ &= (x_2 - x_1) + \left(\frac{4x_2 - 4x_1}{x_1x_2}\right) = (x_2 - x_1) \left(1 + \frac{4}{x_1x_2}\right) = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 + 4)}{x_1x_2} \end{aligned}$$

由于 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，得 $x_1x_2 > 0$ ， $x_1x_2 + 4 > 0$ ，

由 $x_1 < x_2$ ，得 $x_2 - x_1 > 0$ ，

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0, \text{ 即 } f(x_1) > f(x_2)$$

∴ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

18. 【答案】(1) 1 (2) $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

(3) $[1, +\infty)$

【分析】(1) 由题意可得 -1 和 3 为方程 $ax^2 - 2x - 3 = 0$ 的两根, 且 $a > 0$, 进而结合韦达定理求解即可;

(2) 结合一元二次方程的根的判别式和韦达定理求解即可;

(3) 将问题转化为 $a \geq \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}$ 对于 $x \in [3, +\infty)$ 恒成立, 令 $t = \frac{1}{x} \left(0 < t \leq \frac{1}{3} \right)$, 进而结合二次函数的性质

可得 $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} \right)_{\max}$, 进而求解即可.

【小问 1 详解】

由题意, -1 和 3 为方程 $ax^2 - 2x - 3 = 0$ 的两根, 且 $a > 0$,

$$\text{则} \begin{cases} -1+3=\frac{2}{a} \\ -1 \times 3 = -\frac{3}{a} \end{cases}, \text{解得 } a=1.$$

【小问 2 详解】

由题意方程 $ax^2 - 2x - 3 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ,

$$\text{则} \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4a \times (-3) > 0 \end{cases}, \text{即 } a > -\frac{1}{3} \text{ 且 } a \neq 0,$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 = \frac{2}{a},$$

$$\text{则当 } -\frac{1}{3} < a < 0 \text{ 时, } \frac{2}{a} < -6;$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \frac{2}{a} > 0,$$

综上所述, $x_1 + x_2$ 的取值范围为 $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$.

【小问 3 详解】

由 $f(x) \geq 0, x \in [3, +\infty)$, 即 $ax^2 - 2x - 3 \geq 0$,

即 $a \geq \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}$ 对于 $x \in [3, +\infty)$ 恒成立,

$$\text{令 } t = \frac{1}{x} \left(0 < t \leq \frac{1}{3} \right),$$

$$\text{则 } \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} = 3t^2 + 2t,$$

因为函数 $y = 3x^2 + 2x$ 在 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递增,

所以当 $t = \frac{1}{3}$ 时, $(3t^2 + 2t)_{\max} = 1$, 即 $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}\right)_{\max} = 1$,

所以 $a \geq 1$, 即 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

II 卷 (共 8 道题, 满分 50 分)

一. 选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置.)

19. 【答案】B

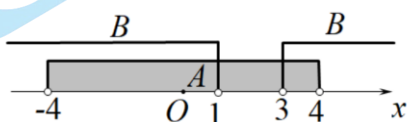
【分析】化简集合 A, B , 求出 $A \cap B$, 再由所求集合性质 $x \in A$ 且 $x \notin A \cap B$ 求解即可.

【详解】由题意得, $A = \{x | -4 < x < 4\}$, $B = \{x | x < 1, \text{ 或 } x > 3\}$,

则 $A \cap B = \{x | -4 < x < 1, \text{ 或 } 3 < x < 4\}$,

则 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$,

故选: B.



20. 【答案】A

【分析】化简 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{1}{xy}$ 得 $x + y = 1$ 或 $x + y = -1$, 即可根据充分不必要条件的定义求解.

【详解】由 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{1}{xy}$ 可得 $\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = \frac{1}{xy} \Rightarrow (x + y)^2 = 1$,

所以 $x + y = 1$ 或 $x + y = -1$,

所以“ $x + y = 1$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{1}{xy}$ ”的充分而不必要条件,

故选: A

21. 【答案】C

【分析】由 $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, 结合整数 a 的分解形式转化为求解方程组的整数解的情况即可.

【详解】选项 A, 当 $a = 0$ 时, 由 $x^3 + y^3 = 0$ 得 $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$,

解得 $y = -x$,

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $(x, -x)$ 都是方程 $x^3 + y^3 = a$ 的整数解,

故 $\exists a \in \mathbb{Z}$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 有无限组整数解. A 项判断正确;

选项 B, 当 $a=1$ 时, 由 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=1$,

由 $x, y \in \mathbf{Z}$, 则 $x+y \in \mathbf{Z}$, $x^2-xy+y^2 \in \mathbf{Z}$,

$$\text{又 } x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0,$$

由 $1=(-1) \times (-1)$ 与 $1=1 \times 1$, 1 仅有这 2 种整数分解的方法,

$$\text{所以 } \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2-xy+y^2=-1 \end{cases} \quad (\text{舍}), \text{ 或 } \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases};$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}, \text{ 故方程 } x^3+y^3=1 \text{ 有且仅有 } (1,0), (0,1) \text{ 两组整数解,}$$

即 $\exists a \in \mathbf{Z}$, 方程 $x^3+y^3=a$ 有且只有两组整数解, 故 B 项判断正确;

选项 C, 当 $a=3$ 时, 由 $3=1 \times 3$, $3=3 \times 1$, $3=(-3) \times (-1)$, $3=(-1) \times (-3)$,

3 仅有这 4 种整数分解的方法, 又 $x^2-xy+y^2 \geq 0$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x+y=-3 \\ x^2-xy+y^2=-1 \end{cases} \quad (\text{舍}), \text{ 或 } \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2-xy+y^2=-3 \end{cases} \quad (\text{舍}),$$

$$\text{或 } \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases} \quad \text{①}, \text{ 或 } \begin{cases} x+y=3 \\ x^2-xy+y^2=1 \end{cases} \quad \text{②};$$

$$\text{方程组①消 } y \text{ 得, } 3x^2-3x-2=0, \quad x=\frac{3 \pm \sqrt{33}}{6}, \text{ 无整数解;}$$

$$\text{方程组②消 } y \text{ 得, } 3x^2-9x+8=0, \text{ 此方程无解;}$$

故当 $a=3$ 时, 方程 $x^3+y^3=a$ 无整数解, 所以选项 C 判断不正确;

选项 D, 若关于 x, y 的方程 $x^3+y^3=a$ 不存在整数解,

则满足至多有有限组整数解;

若关于 x, y 的方程 $x^3+y^3=a$ 存在整数解 (x_0, y_0) .

由 $x_0 \in \mathbf{Z}, y_0 \in \mathbf{Z}$, 则 $a \in \mathbf{Z}$,

$\forall a \neq 0$, 整数 a 至多有有限组分解方法, 可设所有分解形式为 $a=b_i c_i (i=1, 2, 3, \dots, n; b_i, c_i \in \mathbf{Z})$,

$$\text{由 } a=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

$$\text{得 } \begin{cases} x+y=b_i \\ x^2-xy+y^2=c_i \end{cases}, i=1, 2, \dots, n,$$

$$\text{消 } y \text{ 得, } 3x^2-3b_i x+b_i^2-c_i=0, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

对于 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的每一个确定取值, 此关于 x 的二次方程最多有 2 个整数解,

即方程组至多有 2 组整数解;

故 $\forall a \neq 0$, 方程 $x^3 + y^3 = a$ 至多有 $2n$ 组整数解, 故 D 项判断正确.

故选: C.

二. 填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将结果填在答题纸上的相应位置.)

22. 【答案】 2

【分析】 根据绝对值的定义, 分类讨论, 结合函数的单调性, 即可求解.

【详解】 由函数 $y = |x-1| + |x+1|$,

当 $x > 1$ 时, 函数 $y = 2x$ 为单调递增函数, 可得 $y > 2$;

当 $-1 < x \leq 1$ 时, 函数 $y = 2$;

当 $x \leq -1$ 时, 函数 $y = -2x$ 为单调递减函数, 可得 $y \geq 2$,

综上, 可得函数的最小值为 2.

故答案为: 2.

23. 【答案】 2

【分析】 由 $xy = 1$, 转化为 $y = \frac{1}{x}$, 再根据 x 的取值范围可确定 y 的取值范围, 然后结合 $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 分别讨论 a 的范围, 列出不等式组即可求解.

【详解】 由 $xy = 1$, 得 $y = \frac{1}{x}$, 则该函数在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均为单调递减函数,

又因为 $x \in [a, a+1]$,

则当 $a > 0$ 时, 有 $y \in \left[\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a}\right]$, 又 $\exists y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 则有: $\begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 解得: $a = 2$;

当 $a = 0$ 时, 有 $x \in [0, 1]$, 由 $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 显然 $xy \neq 1$, 所以 $a = 0$ 不符合题意;

当 $-1 < a < 0$ 时, 有 $y \in \left(-\infty, \frac{1}{a}\right] \cup \left[\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$, 又 $\exists y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 则此时 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right] \cup \left[\frac{1}{a+1}, +\infty\right)$ 为 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 的子集, 显然不成立, 故此时 a 没有实数解;

当 $a = -1$ 时, 有 $x \in [-1, 0]$, 由 $y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 显然 $xy \neq 1$, 所以 $a = -1$ 不符合题意;

当 $a < -1$ 时, 有 $y \in \left[\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a}\right]$, 又 $\exists y \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, 得: $\begin{cases} \frac{1}{a+1} \geq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$, 此时 a 没有实数解;

综上所述, 实数 $a = 2$.

故答案为：2.

24. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】将 (x_0, y_0) 代入方程组，将所得等量关系代入所求代数式中化简消元即可求得结果.

$$\text{【详解】} \because \begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \\ x_0 - 3y_0 - 3 = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} y_0^2 = 3 - \frac{3}{4}x_0^2 \\ x_0 - 4 = 3y_0 - 1 \end{cases},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{(x_0-1)^2 + y_0^2}}{|3y_0-1|} = \frac{\sqrt{(x_0-1)^2 + 3 - \frac{3}{4}x_0^2}}{|x_0-4|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}x_0^2 - 2x_0 + 4}}{|x_0-4|} = \frac{\sqrt{\frac{(x_0-4)^2}{4}}}{|x_0-4|} = \frac{\frac{|x_0-4|}{2}}{|x_0-4|} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

25. 【答案】①②③④

【分析】先分析 $f(x)$ 的图像，再逐一分析各结论，对于①：结合图像即可判断；对于②：分段讨论 $f(x)$ 的取值范围，从而得以判断；对于③：结合图像分类讨论可知 $|MN|$ 的范围；对于④：分段讨论 $y=f(x)$ 与 $y=-x$ 的交点分布，进而列式求解.

【详解】依题意， $a > 0$,

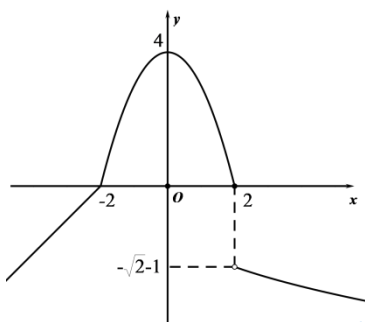
当 $x < -a$ 时， $f(x) = x + 2$ ，其图像为一条右端点取不到的单调递增的射线；

当 $-a \leq x \leq a$ 时， $f(x) = -x^2 + a^2$ ，开口向下，对称轴为 y 轴，与 x 轴交点为 $(-a, 0), (a, 0)$ ，

其图象为抛物线 $y = -x^2 + a^2$ 位于 x 轴上方（含 x 轴交点）部分；

当 $x > a$ 时， $f(x) = -\sqrt{x} - 1$ ，其图像是一条左端点取不到的单调递减的曲线；

对于①：若 $a = 2$ ，则 $f(x)$ 的图像如下，



由图像可知： $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，故①正确；

对于②：当 $a \geq 1$ 时，则有：

若 $x < -a$ 时， $f(x) = x + 2 < -a + 2 \leq 1$ ；

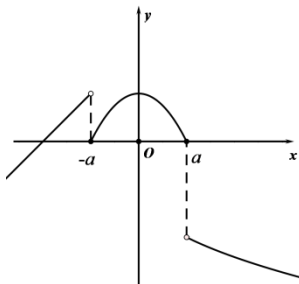
若 $-a \leq x \leq a$ 时， $f(x) = -x^2 + a^2$ 显然取得最大值 $a^2 \geq 1$ ；

若 $x > a$ 时, $f(x) = -\sqrt{x} - 1 < -\sqrt{a} - 1 \leq -2$,

综上所述: $f(x)$ 取得最大值 a^2 , 故②正确;

对于③: 当 $-a \leq x_1 \leq a$ 时, 结合图像, 易知在 $x_1 = a$, $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处,

$M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$ 的距离最小,



当 $x_1 = a$ 时, $y = f(x_1) = 0$, 当 $x_2 > a$ 且接近于 $x = a$ 处, $y_2 = f(x_2) < -\sqrt{a} - 1$,

此时 $|MN| > y_1 - y_2 > \sqrt{a} + 1 > 1$;

当 $x_1 < a$ 时,

若 $0 < a < 2$ 时, 部分射线在 x 轴上方, 此时 $|MN| > \sqrt{a} + 1 > 1$;

若 $a \geq 2$ 时, 此时 $|MN| > 2a \geq 4$;

综上所述: $|MN| > 1$, 故③正确;

对于④: 当 $x < -a$ 时, 令 $x + 2 = -x$, 解得 $x = -1$,

可知此时 $y = f(x)$ 与 $y = -x$ 至多有 1 个交点;

当 $-a \leq x \leq a$ 时, 由图象 $f(x)$ 的图像可知: 此时 $y = f(x)$ 与 $y = -x$ 有且仅有 1 个交点;

当 $x > a$ 时, 令 $-\sqrt{x} - 1 = -x$, 整理得 $x - \sqrt{x} - 1 = 0$,

解得 $\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\sqrt{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去), 所以 $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

可知此时 $y = f(x)$ 与 $y = -x$ 至多有 1 个交点;

综上所述: 若 $y = f(x)$, $y = -x$ 的函数图象有三个公共点,

可知 $y = f(x)$ 与 $y = -x$ 在 $x < -a$ 和 $x > a$ 内均有 1 个交点;

$$\text{则} \begin{cases} a > 0 \\ -a > -1 \\ a < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}, \text{解得 } 0 < a < 1,$$

所以 a 的取值范围是 $(0, 1)$, 故④正确;

故答案为：①②③④.

三、解答题（本大题共 1 小题，共 12 分．解答应写出文字说明过程或演算步骤，请将答案写在答题纸上的相应位置．）

26. 【答案】（1）见解析；

$$(2) \{1, 0, -1\}, \left\{1, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, 0, 2\};$$

(3) 2 个；

【分析】（1）根据强和差集与弱和差集定义进行验证即可判断.

（2）根据弱和差集定义讨论参数取值，进行求解.

（3）根据强和差集定义，以及 B 的元素个数为 12，且 $1 \in B$ ，讨论 B 中元素关系，求出条件的集合 B .

【小问 1 详解】

由题 $\forall x, y \in \{0, 1\}$ ，根据强和差集定义，当 $x + y \neq x - y$ 时，

$$x \text{ 与 } y \text{ 的所有取值可能为 } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \text{ 都满足 } \{x+y, x-y\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset,$$

所以 $\{0, 1\}$ 是强和差集.

$\forall x, y \in \{1, 2\}$ ，根据弱和差集定义，当 $x + y \neq |x - y|$ 时，

$$x \text{ 与 } y \text{ 的所有取值可能为 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

$$\text{其中 } \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{ 时不满足 } \{x+y, |x-y|\} \cap \{1, 2\} \neq \emptyset,$$

所以 $\{1, 2\}$ 不是弱和差集.

【小问 2 详解】

若集合 $A = \{1, a, b\}$ 是弱和差集，则当 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 时 $\{x+y, |x-y|\} = \{2, 0\}$ ，

据题意有 $\{2, 0\} \cap \{1, a, b\} \neq \emptyset$ ，

若 $0 \notin \{1, a, b\}$ ，则 $2 \in \{1, a, b\}$ ，当 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 时 $\{4, 0\} \cap \{1, a, b\} \neq \emptyset \Rightarrow 4 \in \{1, a, b\}$

继续重复以上步骤 $8 \in \{1, a, b\}$ ，显然矛盾.

所以必有 $0 \in \{1, a, b\}$ ，不妨 $a = 0$ ，则 $A = \{1, 0, b\}, b \neq 0, b \neq 1$.

当 $\begin{cases} x=1 \\ y=b \end{cases}$ 有 $\{1+b, |1-b|\} \cap \{1, 0, b\} \neq \emptyset$ ，

若 $1+b=0 \Rightarrow b=-1$ ，此时 $A = \{1, 0, -1\}$ 为弱和差集.

若 $|1-b|=b \Rightarrow b=\frac{1}{2}$, 此时 $A=\left\{1,0,\frac{1}{2}\right\}$ 为弱和差集.

若 $|1-b|=1 \Rightarrow b=2$, 此时 $A=\{1,0,2\}$ 为弱和差集.

所以 $A=\{1,0,-1\}$ 或 $A=\left\{1,0,\frac{1}{2}\right\}$ 或 $A=\{1,0,2\}$

【小问 3 详解】

因为 B 为强和差集且 $1 \in B$, 如果 B 中有其它正数, 设其最大值为 $m(m > 1)$,

根据强和差集定义得 $m+1 \notin B, m-1 \in B, 1-m \in B$, 即集合 B 有一定的对称性,

当 $\begin{cases} x=m \\ y=m \end{cases}$ 时, $\{2m, 0\} \cap B \neq \emptyset$, 所以 $0 \in B$.

所以以 0, 1 为对称中心依次列出 12 元素的集合可得:

$\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 与 $\{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

另根据定义可验证得一个强和差集的一个倍数也是强和差集, 但必须满足 $1 \in B$,

故满足条件的集合 B 只有 2 个.

【点睛】 本题属于集合新定义题目, 抓住定义分析题目, 有理有据讨论即可.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

