北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

数学(理科)

本试卷共 4 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4<0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

A. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$　　B. $\{x\mid x<-2$ 或 $x>2\}$

C. $\{x\mid -2<x<2\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 下列函数中为奇函数的是

A. $y=x+\cos x$　　B. $y=x+\sin x$　　C. $y=\sqrt{x}$　　D. $y=e^{-|x|}$

3. 若 x,y 满足 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y\leqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”的

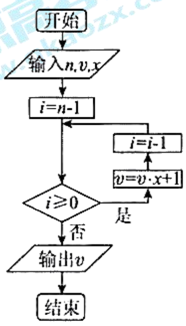
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1+a_5=\frac{17}{2}$，$a_2a_4=4$，则 $S_6=$

A. $\frac{27}{16}$　　B. $\frac{27}{8}$　　C. $\frac{63}{4}$　　D. $\frac{63}{2}$

6. 我国南宋时期的数学家秦九韶(约 1202—1261)在他的著作《数书九章》中提出了多项式求值的秦九韶算法. 如图所示的框图给出了利用秦九韶算法求多项式的一个实例. 若输入的 $n=5$，$v=1$，$x=2$，则程序框图计算的是



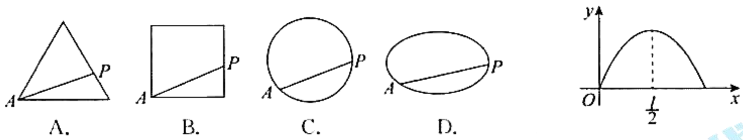
A. $2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$

B. $2^5+2^4+2^3+2^2+2+5$

C. $2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$

D. $2^4+2^3+2^2+2+1$

7. 动点 P 从点 A 出发，按逆时针方向沿周长为 l 的平面图形运动一周，A，P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示，那么动点 P 所走的图形可能是



A.　　B.　　C.　　D.

8. 据统计某超市两种蔬菜 A，B 连续 n 天价格分别为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$，令 $M=\{m \mid a_m<b_m, m=1,2,\cdots,n\}$，若 M 中元素个数大于 $\frac{3}{4}n$，则称蔬菜 A 在这 n 天的价格低于蔬菜 B 的价格，记作：$A \prec B$，现有三种蔬菜 A，B，C，下列说法正确的是

A. 若 $A \prec B$，$B \prec C$，则 $A \prec C$

B. 若 $A \prec B$，$B \prec C$ 同时不成立，则 $A \prec C$ 不成立

C. $A \prec B$，$B \prec A$ 可同时不成立

D. $A \prec B$，$B \prec A$ 可同时成立

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

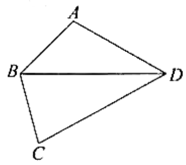
二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 复数 $i(2-i)$ 在复平面内所对应的点的坐标为____.

10. 在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$ 与圆 $\rho=2a\cos\theta(a>0)$ 相切，则 $a=$____.

11. 某校开设 A 类选修课 4 门，B 类选修课 2 门，每位同学需从两类选修课中共选 4 门. 若要求至少选一门 B 类课程，则不同的选法共有____种.（用数字作答）

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=45°$，$\angle ADB=30°$，$BC=1$，$DC=2$，$\cos\angle BCD=\frac{1}{4}$，则 $BD=$____；三角形 ABD 的面积为____.



13. 在直角坐标系中 xOy 中，直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与该抛物线相交于 A，B 两点，其中点 A 在 x 轴上方. 若直线 l 的倾斜角为 $60°$，则 $|OA|=$____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, x\in(0,2], \\ \min\{|x-1|,|x-3|\}, x\in(2,4], \\ \min\{|x-3|,|x-5|\}, x\in(4,+\infty).\end{cases}$

① 若 $f(x)=a$ 有且只有 1 个实根，则实数 a 的取值范围是____；

② 若关于 x 的方程 $f(x+T)=f(x)$ 有且只有 3 个不同的实根，则实数 T 的取值范围是____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

15.（本小题共 13 分）

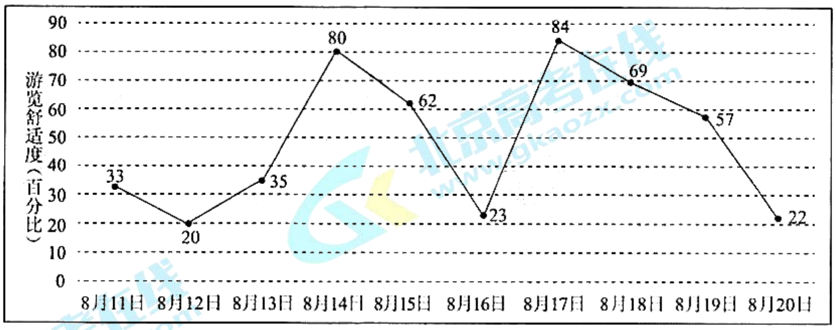
已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+a\cdot\cos 2x(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $f(\frac{\pi}{6})=2$，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减，求 $f(x)$ 的最大值.

16.（本小题共 13 分）

小明计划在 8 月 11 日至 8 月 20 日期间游览某主题公园. 根据旅游局统计数据，该主题公园在此期间"游览舒适度"（即在园人数与景区主管部门核定的最大瞬时容量之比，40％以下为舒适，40％—60％为一般，60％以上为拥挤）情况如图所示. 小明随机选择 8 月 11 日至 8 月 19 日中的某一天到达该主题公园，并游览 2 天.



（Ⅰ）求小明连续两天都遇上拥挤的概率；

（Ⅱ）设 X 是小明游览期间遇上舒适的天数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）由图判断从哪天开始连续三天游览舒适度的方差最大？（结论不要求证明）

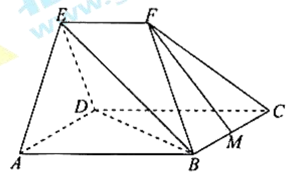
17.（本小题共 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB=60°$，$EA=ED=AB=2EF$，$EF/\!/AB$，M 为 BC 中点.

（Ⅰ）求证：$FM/\!/$平面 BDE；

（Ⅱ）求直线 CF 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 CF 上是否存在点 G，使 $BG\perp DE$？若存在，求 $\frac{CG}{CF}$ 的值；若不存在，说明理由.



18.（本小题共 13 分）

设函数 $f(x)=(x^2+ax-a)\cdot e^{-x}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=x^2-x-1$，若对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$ 使得 $f(s)\geqslant g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，右焦点为 $F(1,0)$，点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A,B 的一点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 AM 与直线 $x=2$ 交于点 N，线段 BN 的中点为 E. 证明：点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上.

20.（本小题共 13 分）

对于 n 维向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 均有 $a_i=0$ 或 $a_i=1$，则称 A 为 n 维 T 向量. 对于两个 n 维 T 向量 A,B，定义 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

（Ⅰ）若 $A=(1,0,1,0,1)$，$B=(0,1,1,1,0)$，求 $d(A,B)$ 的值.

（Ⅱ）现有一个 5 维 T 向量序列：$A_1,A_2,A_3\cdots$，若 $A_1=(1,1,1,1,1)$ 且满足：$d(A_i,A_{i+1})=2$，$i\in\mathbf{N}^*$. 求证：该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0,0,0,0,0)$.

（Ⅲ）现有一个 12 维 T 向量序列：$A_1,A_2,A_3\cdots$，若 $A_1=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{12个})$ 且满足：$d(A_i,A_{i+1})=m$，$m\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,3,\cdots$，若存在正整数 j 使得 $A_j=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{12个})$，$A_j$ 为 12 维 T 向量序列中的项，求出所有的 m.

北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

高三数学(理科)参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1.A 2.B 3.C 4.B 5.D 6.A 7.C 8.C

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

9.(1,2) 10.1 11.14 12.2 $\sqrt{3}-1$ 13.$\sqrt{21}$ 14.$(1,+\infty)$ $(-4,-2)\cup(2,4)$

三、解答题(本大题共 6 小题,共 80 分)

15.(共 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}+a\cdot\cos 2\cdot\frac{\pi}{6}=2$,

所以 $\frac{3}{2}+a\cdot\frac{1}{2}=2$.

所以 $a=1$. …………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)由题意 $f(x)=\sqrt{3+a^2}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}}\sin 2x+\frac{a}{\sqrt{3+a^2}}\cos 2x)$

$=\sqrt{3+a^2}\sin(2x+\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

所以 $T=\pi$,且 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,

所以当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时,$y_{\max}=f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{3+a^2}\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)$.

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $\tan\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,$a=3$.

所以 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$. ………………………………………………… 13 分

16.(共 13 分)

解:设 A_i 表示事件"小明 8 月 11 日起第 i 日连续两天游览主题公园"($i=1,2,\cdots,9$).

根据题意,$P(A_i)=\frac{1}{9}$,且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$.

(Ⅰ)设 B 为事件"小明连续两天都遇上拥挤",

则 $B=A_4\cup A_7$.

所以 $P(B)=P(A_4\cup A_7)=P(A_4)+P(A_7)=\frac{2}{9}$. ………………………… 5 分

（Ⅱ）由题意，可知 X 的所有可能取值为 0，1，2，且

$P(X=0)=P(A_4\cup A_7\cup A_8)=P(A_4)+P(A_7)+P(A_8)=\frac{1}{3}$，

$P(X=1)=P(A_3\cup A_5\cup A_6\cup A_9)=P(A_3)+P(A_5)+P(A_6)+P(A_9)=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{9}$.

所以 X 的分布列为

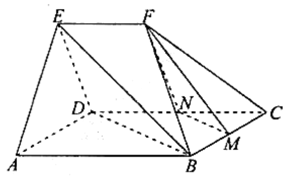
X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

故 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$. ………………………… 11 分

（Ⅲ）从 8 月 16 日开始连续三天游览舒适度的方差最大. ………………………… 13 分

17.（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 CD 中点 N，连结 MN，FN.



因为 N，M 分别为 CD，BC 中点，

所以 $MN/\!/BD$.

又 $BD\subset$平面 BDE 且 $MN\not\subset$平面 BDE，

所以 $MN/\!/$平面 BDE.

因为 $EF/\!/AB$，$AB=2EF$，

所以 $EF/\!/CD$，$EF=DN$.

所以四边形 $EFND$ 为平行四边形. 所以 $FN/\!/ED$.

又 $ED\subset$平面 BDE 且 $FN\not\subset$平面 BDE，

所以 $FN/\!/$平面 BDE.

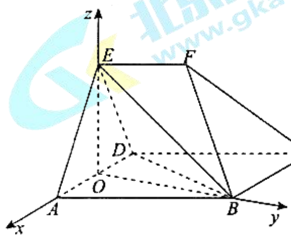
又 $FN\cap MN=N$，

所以平面 $MFN/\!/$平面 BDE.

又 $FM\subset$平面 MFN，

所以 $FM/\!/$平面 BDE. …………………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）取 AD 中点 O，连结 EO，BO.



因为 $EA=ED$，所以 $EO\perp AD$.

因为平面 $ADE\perp$平面 $ABCD$，

所以 $EO\perp$平面 $ABCD$，$EO\perp BO$.

因为 $AD=AB$，$\angle DAB=60°$，

所以$\triangle ADB$ 为等边三角形.

因为 O 为 AD 中点，

所以 $AD\perp BO$.

因为 EO，BO，AO 两两垂直，设 $AB=4$，以 O 为原点，OA，OB，OE 为 x，y，z 轴，

如图建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$. ………………………………………………… 6 分

由题意,得 $A(2,0,0)$,$B(0,2\sqrt{3},0)$,$C(-4,2\sqrt{3},0)$,$D(-2,0,0)$,

$E(0,0,2\sqrt{3})$,$F(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{CF}=(3,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DE}=(2,0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BE}=(0,-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y-z=0,\\ x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$,则 $y=1$,$x=-\sqrt{3}$.

所以 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,1)$.

设直线 CF 与平面 BDE 成角为 α,

$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{CF},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………… 10 分

(Ⅲ)设 G 是 CF 上一点,且$\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CF}$,$\lambda\in[0,1]$.

因此点 $G(3\lambda-4,-\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3},2\sqrt{3}\lambda)$.

$\overrightarrow{BG}=(3\lambda-4,-\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$.

由$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DE}=0$,解得 $\lambda=\dfrac{4}{9}$.

所以在棱 CF 上存在点 G 使得 $BG\perp DE$,此时$\dfrac{CG}{CF}=\dfrac{4}{9}$. ………………… 14 分

18.(共 13 分)

解:(Ⅰ)当 $a=0$ 时,因为 $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$,

所以 $f'(x)=(-x^2+2x)\cdot e^{-x}$,$f'(-1)=-3e$.

又因为 $f(-1)=e$,

所以曲线 $y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为

$y-e=-3e(x+1)$,即 $3ex+y+2e=0$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)“对任意的 $t\in[0,2]$,存在 $s\in[0,2]$使得 $f(s)\geqslant g(t)$成立”等价于“在区间$[0,2]$上,$f(x)$的最大值大于或等于 $g(x)$的最大值”.

因为 $g(x)=x^2-x-1=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}$,

所以 $g(x)$在$[0,2]$上的最大值为 $g(2)=1$.

$f'(x)=(2x+a)\cdot e^{-x}-(x^2+ax-a)\cdot e^{-x}$

$\quad=-e^{-x}[x^2+(a-2)x-2a]$

$\quad=-e^{-x}(x-2)(x+a)$

令 $f'(x)=0$,得 $x=2$ 或 $x=-a$.

①当$-a\leqslant 0$,即 $a\geqslant 0$ 时,

$f'(x)\geqslant 0$ 在$[0,2]$上恒成立，$f(x)$在$[0,2]$上为单调递增函数，

$f(x)$的最大值为 $f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}$，

由$(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}\geqslant 1$，得 $a\geqslant e^2-4$.

②当 $0<-a<2$，即 $-2<a<0$ 时，

当 $x\in(0,-a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减函数；

当 $x\in(-a,2)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为单调递增函数.

所以 $f(x)$的最大值为 $f(0)=-a$ 或 $f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}$，

由$-a\geqslant 1$，得 $a\leqslant -1$；由$(4+a)\cdot\frac{1}{e^2}\geqslant 1$，得 $a\geqslant e^2-4$.

又因为$-2<a<0$，所以$-2<a\leqslant -1$.

③当$-a\geqslant 2$，即 $a\leqslant -2$ 时，

$f'(x)\leqslant 0$ 在$[0,2]$上恒成立，$f(x)$在$[0,2]$上为单调递减函数，

所以 $f(x)$的最大值为 $f(0)=-a$.

由$-a\geqslant 1$，得 $a\leqslant -1$，

又因为 $a\leqslant -2$，所以 $a\leqslant -2$.

综上所述，实数 a 的值范围是 $a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant e^2-4$. ………………………… 13 分

19.（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意，得$\begin{cases}b=\sqrt{3},\\c=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 5 分

（Ⅱ）“点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上”等价于“EF 平分$\angle MFB$”.

设直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$，则 $N(2,4k)$，$E(2,2k)$.

设点 $M(x_0,y_0)$，由$\begin{cases}y=k(x+2),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

得$\begin{cases}x_0=\frac{-8k^2+6}{3+4k^2},\\y_0=\frac{12k}{3+4k^2}.\end{cases}$

① 当 $MF\perp x$ 轴时，$x_0=1$，此时 $k=\pm\frac{1}{2}$，

所以 $M(1,\pm\frac{3}{2})$，$N(2,\pm 2)$，$E(2,\pm 1)$.

此时，点 E 在$\angle BFM$ 的角平分线所在的直线 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$ 上，

即 EF 平分$\angle MFB$.

②当 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，直线 MF 的斜率为 $k_{MF}=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4k}{1-4k^2}$，

所以直线 MF 的方程为 $4kx+(4k^2-1)y-4k=0$.

所以点 E 到直线 MF 的距离

$$d=\frac{|8k+2k(4k^2-1)-4k|}{\sqrt{16k^2+(4k^2-1)^2}}=\frac{|4k+2k(4k^2-1)|}{\sqrt{(4k^2+1)^2}}$$

$$=\frac{|2k(4k^2+1)|}{|4k^2+1|}=|2k|=|BE|.$$

即点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上. …………………………… 14 分

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）由于 $A=(1,0,1,0,1)$，$B=(0,1,1,1,0)$，由定义 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$，

可得 $d(A,B)=4$. ………………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）反证法：若结论不成立，即存在一个含 5 维 T 向量序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m$，

使得 $A_1=(1,1,1,1,1)$，$A_m=(0,0,0,0,0)$.

因为向量 $A_1=(1,1,1,1,1)$ 的每一个分量变为 0，都需要奇数次变化，

不妨设 A_1 的第 $i(i=1,2,3,4,5)$ 个分量 1 变化了 $2n_i-1$ 次之后变成 0，

所以将 A_1 中所有分量 1 变化为 0 共需要

$(2n_1-1)+(2n_2-1)+(2n_3-1)+(2n_4-1)+(2n_5-1)=$

$2(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5-2)-1$ 次，此数为奇数.

又因为 $d(A_i,A_{i+1})=2$，$i\in\mathbf{N}^*$，说明 A_i 中的分量有 2 个数值发生改变，

进而变化到 A_{i+1}，所以共需要改变数值 $2(m-1)$ 次，此数为偶数，所以矛盾.

所以该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0,0,0,0,0)$. …………………………… 9 分

（Ⅲ）此时 $m=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$. …………………………………… 13 分