文科数学

（考试时间：120分钟　　全卷满分：150分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码.

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将答题卡交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求.

1. 设集合 $A=\{x|-5<x<2\}$，$B=\{x|-3<x<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-3<x<2\}$　B. $\{x|-5<x<2\}$　C. $\{x|-3<x<3\}$　D. $\{x|-5<x<3\}$

2. 已知i为虚数单位，且 $z=\dfrac{2i}{1+i^3}$，则 $z=$

A. $1-i$　B. $-1+i$　C. $1+i$　D. $-1-i$

3. 设函数 $f(x)=3^{x+1}$，则 $f(\log_3 8)=$

A. 8　B. 9　C. 11　D. 24

4. 从某中学甲、乙两班各随机抽取10名同学的数学成绩，所得数据用茎叶图表示如下．由此可估计甲，乙两班同学的数学成绩情况，则下列结论不正确的是

A. 甲班数学成绩的极差比乙班大

B. 甲班数学成绩的中位数比乙班大

C. 甲班数学成绩的平均值比乙班小

D. 甲班数学成绩的方差比乙班小

甲班		乙班
1	5	1 2
3 2 0	6	3 3 7
6 3 3	7	2
2 1	8	1 2 3
3	9	2

5. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的是

A. $y=|x|$　B. $y=x^3$　C. $y=\log_2 x$　D. $y=\tan x$

6. 已知点 (x,y) 满足不等式组 $\begin{cases}x+y-4\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值为

A. -3　B. -1　C. 5　D. 7

7. 某种病毒的繁殖速度快、存活时间长，a 个这种病毒在 t 天后将繁殖到 $ae^{\lambda t}$ 个．已知经过4天后病毒的数量会达到原来的2倍．且再过 m 天后病毒的数量将达到原来的16倍，则 $m=$

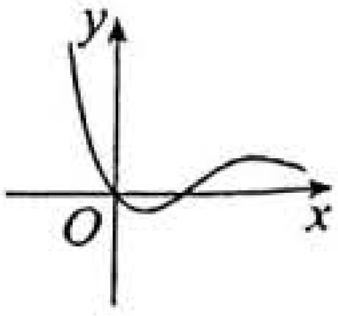
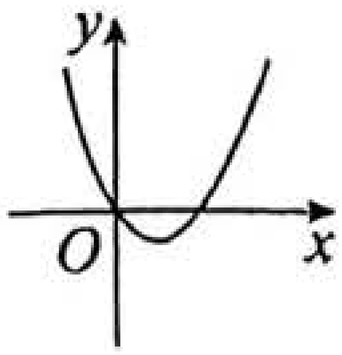
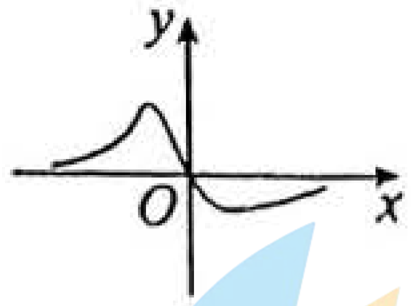
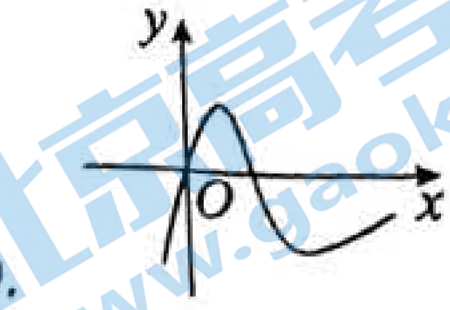
A. 4　B. 8　C. 12　D. 16

8. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=1$，$S_n=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$，则

A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列　B. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

C. 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列　D. 数列 $\{S_n\}$ 是等差数列

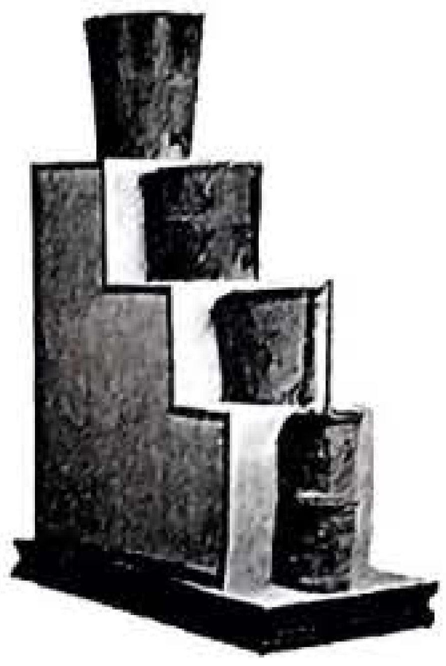
9. 函数$f(x)=\dfrac{x^2-4x}{e^x}$的图象大致是

A. 
B. 
C. 
D. 

10. 将函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图像向左平移$\dfrac{\pi}{2}$个单位长度后得到曲线$C$,若$C$关于原点对称,则$\omega$的最小值是

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{5}{3}$　　D. $\dfrac{11}{3}$

11. 漏刻是中国古代科学家发明的一种计时系统,"漏"是指带孔的壶,"刻"是指附有刻度的浮箭。《说文解字》中记载:"漏以铜壶盛水,刻节,昼夜百刻."某展览馆根据史书记载,复原唐代四级漏壶计时器.如图,计时器由三个圆台形漏水壶和一个圆柱形受水壶组成,水从最上层的漏壶孔流出,最终全部均匀流入受水壶.当最上层漏水壶盛满水时,漂浮在最底层受水壶中的浮箭刻度为0 当最上层漏水壶中水全部漏完时,漂浮在最底层受水壶中的浮箭刻度为100. 已知最上层漏水壶口径与底径之比为5:2,则当最上层漏水壶水面下降至其高度的三分之一时,浮箭刻度约为(四舍五入精确到个位)



A. 88　　B. 84　　C. 78　　D. 72

12. 已知函数$g(x)$为定义在R上的奇函数,$g(1)=1$,且$g(1+x)=g(1-x)$,$f(x)=g(3-x)+1$,则下列说法正确的个数为

①$g(-3)=g(5)$　②$g(2024)=0$　③$f(2)+f(4)=-4$　④$\sum\limits_{n=1}^{2024}f(n)=2024$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题:本大题共4个小题,每小题5分,共20分

13. 已知$\overrightarrow{AC}=(2,1)$,$\overrightarrow{AB}=(1,t)$,且$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3$,则$t=$ ______.

14. 若函数$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+ax-2\ln x$在$x=1$处的切线平行于$x$轴,则$a=$ ______.

15. 已知ΔABC的三个内角A、B、C所对应的边分别是a、b、c,其中A、C、B成等差数列,$a=2\sqrt{2}$,$\sin(C-A)=\cos B$,则ΔABC的面积为______.

16. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\dfrac{2\pi}{3}$,集合$S=\left\{\sin a_n \middle| n\in N^*\right\}$,若$S=\{a,b\}$,则$a^2+b^2=$______.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17－21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必做题:共60分.

17. (12分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$a_2+a_7=9$,$S_9=45$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

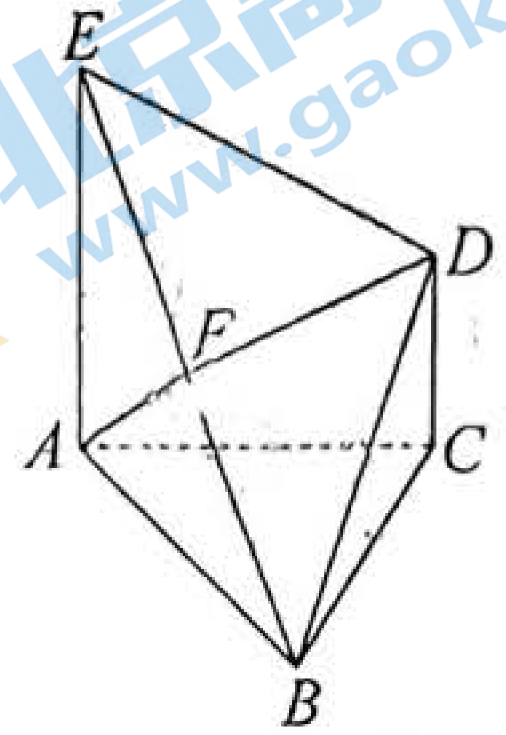
(2)若$b_n=2^n a_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18．（12分）

如图所示，ΔABC是正三角形，$AE\perp$平面ABC，$AE\parallel CD$，$AE=AB=2$，$CD=1$，且F为BE的中点．

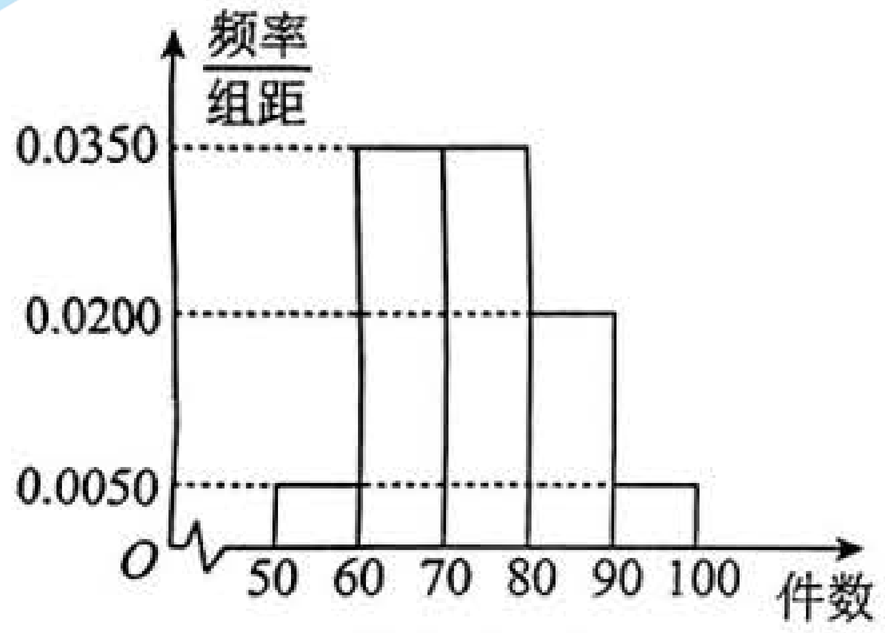
(1) 求证：$DF\parallel$平面ABC；

(2) 求三棱锥$F-ABD$的体积．

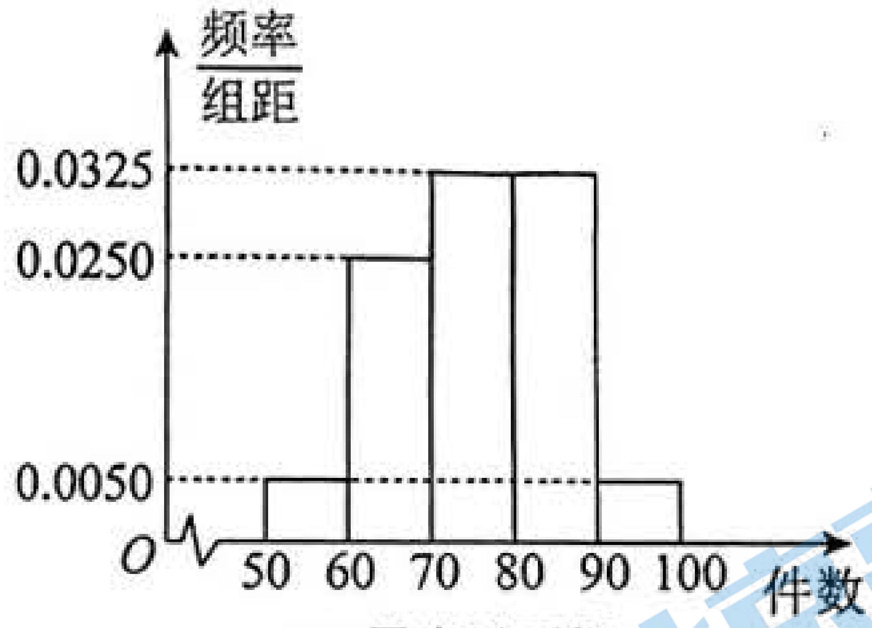


19．（12分）

某工厂有25周岁以上（含25周岁）工人200名，25周岁以下工人100名．为研究工人的日平均生产量是否与年龄有关，现采用分层抽样的方法，从中抽取了120名工人，先统计了他们某月的日平均生产件数，然后按工人年龄在“25周岁以上（含25周岁）”和“25周岁以下”分为两组，再将两组工人的日平均生产件数分成5组：$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，分别加以统计得到如图所示的频率分布直方图：



（25周岁以上组）



（25周岁以下组）

(1) 从样本中日平均生产件数不低于90件的工人中随机抽取2人，求至少抽到一名“25周岁以下”工人的概率；

(2) 规定日平均生产件数不少于80件者为“生产能手”，请根据已知条件填写2×2列联表，并判断是否有90%的把握认为“生产能手”与“工人所在的年龄组”有关？

	生产能手	非生产能手	合计
25周岁以上			
25周岁以下			
合计			

附：

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

其中$n=a+b+c+d$．

20. (12分)

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$

(1) 求$f(x)$的极值；

(2) 证明：当$x>0$时，$f(x)\leqslant e^{x}-\dfrac{1}{x}$.

21. (12分)

已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$，$P(4,y_0\ (y_0>0))$为E上一点，P到E的焦点F的距离为5.

(1) 求E的标准方程；

(2) 设O为坐标原点，A，B为抛物线E上异于P的两点，且满足$PA\perp PB$.

(i) 判断直线AB是否过定点，若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由；

(ii) 求$|FA|\cdot|FB|$的最小值.

(二) 选做题：共10分.请考生在第22、23题中选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修4－4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系xOy中，射线l的方程为$y=x(x\geqslant 0)$，曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 以坐标原点为极点，x轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求射线l和曲线C的极坐标方程；

(2) 若射线l与曲线C交于点P，将射线OP绕极点按逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{2}$交C于点Q，求$\triangle POQ$的面积.

23. (10分) [选修4－5：不等式选讲]

已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+1|$.

(1) 求不等式$f(x)\geqslant 3$的解集；

(2) 记函数$f(x)$的最小值为m，若a,b,c均为正实数，且$a+2b+3c=m$，求$\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}$的最小值.

宜宾市高2021级一诊考试文科数学参考答案

说明：

一、本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可比照评分意见制订相应的评分细则.

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半，如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	C	B	B	C	C	A	A	B	C

二、填空题

13. 1　　14. 3　　15. $3+\sqrt{3}$　　16. $\frac{5}{4}$

三、解答题

(一) 必考题：

17.解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为d，由 $a_2+a_7=9$ 得：

$(a_1+d)+(a_1+6d)=9$　　①

又 ∵ $S_9=45$

∴ $a_1+4d=5$　　②

联立①②有 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n$ ……………………………………(6分)

(2) 由 (1) 知 $a_n=n$

$\therefore b_n=2^n a_n=n\cdot 2^n$

所以 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，③

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$，④

由③－④有 $-T_n=2^1+2^2+3^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\dfrac{2\times[1-2^n]}{1-2}-n\times2^{n+1}$，

$=2^{n+1}-2-n\times2^{n+1}$，

$\therefore -T_n=(1-n)2^{n+1}-2, n\in N^*$.

$\therefore T_n=2+(n-1)2^{n+1}$ ……………………………………(12分)

18.证明：(1) 如图所示，取 AB 中点 G，连 CG、FG.

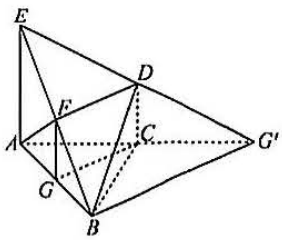
$\because EF=FB, AG=GB, \therefore FG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}EA$

$DC \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}EA, \therefore FG \mathrel{\underline{\parallel}} DC$

∴四边形 $CDFG$ 为平行四边形，$\therefore DF \parallel CG$

$\because DF \not\subset$ 平面 ABC，$CG \subset$ 平面 ABC

$\therefore DF \parallel$ 平面 ABC ……………………(6分)



(2) $\because F$是BE的中点

$\therefore V_{F-ABD}=V_{D-ABF}=V_{C-ABF}=\frac{1}{2}V_{C-ABE}=\frac{1}{2}V_{E-ABC}$

又 $V_{E-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\times2\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore V_{F-ABD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$……………………………………………………………………………………(12分)

19. (1) 由已知得，样本中有25周岁以上(含25周岁)工人80名，25周岁以下工人40名.

所以样本中日平均生产件数不足80件的工人中，25周岁以上(含25周岁)工人有$80\times0.05=4$(名)，记为A_1, A_2, A_3, A_4；

25周岁以下工人有$40\times0.05=2$(名)，记为B_1, B_2.

从中随机抽取2名工人，所有的可能结果共有15种，它们是(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,A_4)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_4,B_1)，(A_4,B_2)，(B_1,B_2)；

其中，至少有一名25周岁以下工人的可能结果共有9种，它们是(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_4,B_1)，(A_4,B_2)，(B_1,B_2)；

故所求概率$P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$……………………………………………………………………(6分)

(2) 由题中频率分布直方图可知，在抽取的100名工人中，25周岁以上(含25周岁)的生产能手有$80\times0.25=20$(名)，25周岁以下的生产能手有$40\times0.375=15$(名)，据此可得2×2列联表如下：

单位：名

	生产能手	非生产能手	合计
25周岁以上	20	60	80
25周岁以下	15	25	40
合计	35	85	120

由列联表中的数据，计算可得统计量$K^2=\frac{120\times(20\times25-60\times15)^2}{35\times85\times80\times40}\approx2.017<2.706$

所以没有90%的把握认为“生产能手”与“工人所在的年龄组”有关………………………………(12分)

20. 解：(1) 函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

令$f'(x)=0$，则$x=e$

函数$f(x)$的增区间为$(0,e)$，减区间为$(e,+\infty)$

所以$x=e$时$f(x)$极大值$=f(e)=\frac{1}{e}$，无极小值……………………………………………(5分)

(2) 证明：若证：$f(x)=\frac{\ln x}{x}+1\leqslant e^x-\frac{1}{x}$，即证$\ln x+x\leqslant xe^x-1$，即证$\ln x+x-xe^x+1\leqslant0$

令$h(x)=\ln x+x-xe^x+1(x>0)$，则$h'(x)=\frac{1}{x}+1-(x+1)e^x=(x+1)\left(\frac{1}{x}-e^x\right)$.

令$t(x)=\frac{1}{x}-e^x(x>0)$，则$t'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$恒成立，

所以$t(x)=\frac{1}{x}-e^x$在$(0,+\infty)$上单调递减.

又$t\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$t(1)=1-e<0$，所以存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$t(x_0)=\frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$.

当$x\in(0,x_0)$时，$t(x)>0$，则$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $t(x)<0$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

$h(x)_{max}=h(x_0)=\ln x_0+x_0-x_0e^{x_0}+1=-x_0+x_0-1+1=0$

$\therefore f(x)\leqslant e^x-\frac{1}{x}$……(12分)

21.解：(1) 点 P 到 E 的焦点 F 的距离为 5，即点 P 到 E 的准线的距离为 5，

故 $4+\frac{p}{2}=5$，解得 $p=2$.所以 E 的标准方程为 $y^2=4x$；……(5分)

(2)(i) 由 (1) 知，$y_0^2=4\times4$，且 $y_0>0$，解得 $y_0=4$，所以 $P(4,4)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{PA}=\frac{y_1-4}{x_1-4}=\frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4}=\frac{4}{y_1+4}$，同理可得，$k_{PB}=\frac{4}{y_2+4}$

则 $k_{PA}\times k_{PB}=\frac{4}{y_1+4}\times\frac{4}{y_2+4}=-1$，即 $4(y_1+y_2)+y_1y_2+32=0$.

①当直线 AB 斜率存在时，直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}\left(x-\frac{y_1^2}{4}\right)$

整理得 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$

所以 $4x-32-(y_1+y_2)(y+4)=0$，即 $y+4=\frac{4}{y_1+y_2}(x-8)$

所以直线 AB 过定点 $(8,-4)$；

②当直线 AB 的斜率不存在时 $y_1+y_2=0$，可得 $y_1^2=32$，$x_1=8$.

故直线 AB 过定点 $(8,-4)$.

(ii) 根据题意可知斜率不为 0，设直线 AB 斜率为 k，

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-8)-4=kx-8k-4$，

与抛物线 E 联立得 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx-8k-4\end{cases}$，

消去 y 得 $k^2x^2-(16k^2+8k+4)x+(8k+4)^2=0$，

因为直线过定点 $(8,-4)$ 可知 $\Delta>0$，所以 $x_1+x_2=\frac{16k^2+8k+4}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{(8k+4)^2}{k^2}$.

所以 $|FA|\cdot|FB|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{(8k+4)^2}{k^2}+\frac{16k^2+8k+4}{k^2}+1$

$=\frac{72k+20}{k^2}+81=20\left(\frac{1}{k}+\frac{9}{5}\right)^2+\frac{81}{5}\geqslant\frac{81}{5}$，

所以当 $\frac{1}{k}=-\frac{9}{5}$，$k=-\frac{5}{9}$ 时，$|FA|\cdot|FB|$ 的最小值为 $\frac{81}{5}$；

当直线 AB 斜率不存在时，$x_1=x_2=8$.

由抛物线定义知 $|FA|\cdot|FB|=(x_1+1)(x_2+1)=81$.

故 $|FA|\cdot|FB|$ 的最小值为 $\frac{81}{5}$……(12分)

(二) 选考题：

22.解：(1) 将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=x(x\geqslant0)$ 得 $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta$，

所以 $\tan\theta=1$，所以射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\geqslant0)$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $\rho^2\sin^2\theta+\frac{\rho^2\cos^2\theta}{4}=1$，

所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$……(5分)

(2) 由题意可设点 P 的极坐标为 $\left(\rho_1,\frac{\pi}{4}\right)$，点 Q 的极坐标为 $\left(\rho_2,\frac{3\pi}{4}\right)$，

则 $\rho_1^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\frac{\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，$\rho_2^2=\dfrac{4}{1+3\sin^2\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{8}{5}$，

因为 $\rho_1>0$，$\rho_2>0$，所以 $\rho_1=\rho_2=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，

所以 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{10}}{5}=\dfrac{4}{5}$……………………………………(10分)

23.解：(1) 由题意可得，$f(x)=|2x-1|+|2x+1|=\begin{cases}4x,x>\frac{1}{2}\\2,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\-4x,x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

则 $f(x)\geqslant 3$，即 $\begin{cases}4x\geqslant 3\\x>\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2\geqslant 3\\-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-4x\geqslant 3\\x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

解得 $x\geqslant\dfrac{3}{4}$ 或 $x\in\varnothing$ 或 $x<-\dfrac{3}{4}$，

所以不等式的解集为 $\left\{x\middle|x\leqslant-\dfrac{3}{4}\text{ 或 }x\geqslant\dfrac{3}{4}\right\}$……………………………………(5分)

(2) 由 (1) 可知，$f(x)_{\min}=2$，所以 $m=2$，则 $a+2b+3c=2$，

即 $a+c+2(b+c)=2$，$\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)[(a+c)+2(b+c)]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2(b+c)}{a+c}+\dfrac{a+c}{b+c}\right)+\dfrac{3}{2}\geqslant\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{2(b+c)}{a+c}=\dfrac{a+c}{b+c}$，$(a+c)^2=2(b+c)^2$，

即 $a+c=2\sqrt{2}-2$，$b+c=2-\sqrt{2}$ 时，等号成立.

故 $\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right)_{\min}=\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}$……………………………………(10分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！