2021 北京海淀高三（上）期中

数　　学

2021.11

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟，考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分　(选择题　共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)在复平面内，复数 $z=i(2+i)$ 对应的点的坐标为

A.(1，2)　　B.(-1，2)　　C. (2，1)　　D.(2，-1)

(2)已知向量 $a=(x,2),b=(-1,1)$，若 $a//b$，则 $x=$

A. 1　　B.-l　　C. 2　　D.-2

(3)已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{3\}$，则集合 B 可能是

A. {4}　　B.{1,4}　　C.{2，4}　　D.{1，2，3}

(4)已知命题 $p:\forall a\in(0,+\infty)$，$a+\dfrac{1}{a}>2$，则 $\neg p$ 是

A. $\exists a\in(0,+\infty),a+\dfrac{1}{a}>2$　　B. $\exists a\notin(0,+\infty),a+\dfrac{1}{a}>2$

C. $\exists a\in(0,+\infty),a+\dfrac{1}{a}\le 2$　　D. $\exists a\notin(0,+\infty),a+\dfrac{1}{a}\le 2$

(5)下列函数中，是奇函数且在其定义域上为增函数的是

A. $y=\sin x$　　B. $y=x|x|$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=x-\dfrac{1}{x}$

(6)“$a>b>c$”是“$ab>ac$”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

(7)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.若 $\{a_n\}$ 为递增数列且 $a_2<0$,则

A. $q<-1$　　B. $-1<q<0$　　C. $0<q<1$　　D. $q>1$

(8)将函数 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $f(x)$ 的图像，则下列说法正确的是

A. $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

B. $x=-\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的图像的一条对称轴

C. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上是减函数

D. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 上是增函数

(9)下列不等关系中正确的是

A. $\ln 2+\ln 3>2\ln\frac{5}{2}$

B. $\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$

C. $\ln 2\cdot\ln 3>1$

D. $\frac{\ln 3}{\ln 2}<\frac{3}{2}$

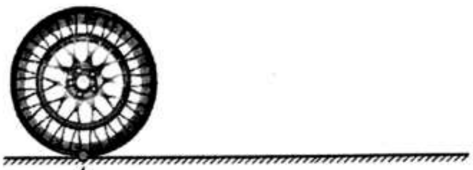
(10)如图，A 是轮子外边沿上的一点，轮子半径为 0.3m.若轮子从图中位置向右无滑动滚动，则当滚动的水平距离为 2.2m 时，下列描述正确的是(参考数据：7π≈21.991)

A.点 A 在轮子的左下位置，距离地面约为 0.15m

B. 点 A 在轮子的右下位置，距离地面约为 0.15m

C. 点 A 在轮子的左下位置，距离地面约为 0.26m

D. 点 A 在轮子的右下位置，距离地面约为 0.04m



第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.若 $S_n=2n$，则 $a_2=$__________.

(12)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^x, x<1,\\ x^2-2x, x\geq 1,\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的零点个数为__________.

(13)已知 ΔABC 中，$|\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{AC}|=1, \angle BAC=120^\circ$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

(14)已知命题 p:若 ΔABC 满足 $\sin A=\cos B$，则 ΔABC 是直角三角形.说明 p 为假命题的一组角为 A=__________,B=__________.

(15)某生物种群的数量 Q 与时间 t 的关系近似地符合 $Q(t)=\frac{10e^t}{e^t+9}$

给出下列四个结论：

①该生物种群的数量不会超过 10；

②该生物种群数量的增长速度先逐渐变大后逐渐变小；

③该生物种群数量的增长速度与种群数量成正比；

④该生物种群数量的增长速度最大的时间 $t_0 \in (2,3)$.

根据上述关系，其中所有正确结论的序号是___________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题共 14 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=4n+2$.

(I)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II)若数列 $\{b_n-a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，且 $b_1=3$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(17)(本小题共 14 分)

已知函数 $f(x)=2\cos(x-\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

(I)求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

(II)设函数 $g(x)=f(x)-\cos x$，求 $g(x)$ 的值域.

(18)(本小题共 14 分)

已知函数 $f(x)=\ln x, g(x)=\dfrac{e}{x}$.

(I)直接写出曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的公共点坐标，并求曲线 $y=f(x)$ 在公共点处的切线方程；

(II)已知直线 $x=a$ 分别交曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 于点 A，B.当 $a(0,e)$时，设 ΔOAB 的面积为 $S(a)$，其中 O 是坐标原点，求 $S(a)$ 的最大值.

(19)(本小题共 14 分)

设 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$

(I)求角 A 大小；

(II)再从以下三组条件中选择一组条件作为已知条件，使三角形存在且唯一确定，并求 ΔABC 的面积

第①组条件：$a=\sqrt{19}, c=5$；

第②组条件：$\cos C=\dfrac{1}{3}, c=4\sqrt{2}$

第③组条件：AB 边上的高 $h=\sqrt{3}, a=3$

注：如果选择的条件不符合要求，第(II)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(20)(本小题共 14 分)

设函数 $f(x)=x(x^2-3x+a), a\in \mathrm{R}$

(I)当 a=-9 时，求函数 $f(x)$ 的单调增区间；

(II)若函数 $f(x)$ 在区间(1,2)上为减函数，求 a 的取值范围；

(III)若函数在区间(0,2)内存在两个极值点 x_1, x_2，且满足 $|f(x_1)-f(x_2)|>|f(x_1)+f(x_2)|$，请直接写出 a 的取值范围.

(21)(本小题 15 分)

设正整数 $n\geq 3$，集合 $A=\{a\,|\,a=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_k\in\mathrm{R}，k=1,2,\cdots,n\}$，对应集合 A 中的任意元素 $a=(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 和 $b=(y_1,y_2,\cdots y_n)$，及实数 λ，定义：当且仅当 $x_k=y_k(k=1,2,\cdots,n)$ 时 $a=b;a+b=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots x_n+y_n);\lambda a=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots\lambda x_n)$.若 A 的子集 $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ 满足：当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3=(0,0,\cdots,0)$，则称 B 为 A 的完美子集.

(I)当 $n=3$ 时，已知集合 $B_1=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},B_2=\{(1,2,3),(2,3,4),(4,5,6)\}$，分别判断这两个集合是否为 A 的完美子集，并说明理由；

(II)当 $n=3$ 时，已知集合 $B=\{(2m,m,m-1),(m,2m,m-1),(m,m-1,2m)\}$.若 B 不是 A 的完美子集，求 m 的值；

(III)已知集合 $B=\{a_1,a_2,a_3\}\subseteq A$，其中 $a_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots x_{in})(i=1,2,3)$.若 $2|x_{ii}|>|x_{1i}|+|x_{2i}|+|x_{3i}|$ 对任意 $i=1,2,3$ 都成立，判断 B 是否一定为 A 的完美子集.若是，请说明理由；若不是，请给出反例.

(考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效)

2021 北京海淀高三(上)期中数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	B	D	C	C	B	D	C	D	B	A

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
答案	2	2	$-1,-5$	$\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}$	①②④

说明：13 题两空前 3 后 2；15 题全选对 5 分，漏选 3 分，其他情况 0 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

(16)(本小题共 14 分)

解：(I) 因为 $a_{n+1}+a_n=4n+2$，

所以当 $n=1$ 时，$a_2+a_1=6$． ①

当 $n=2$ 时，$a_3+a_2=10$， ②

②—①得 $a_3-a_1=4$．

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，

所以 $2d=a_3-a_1=4$，则 $d=2$，

由①可得 $2a_1+d=6$，所以 $a_1=2$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n(n=1,2,\cdots)$．

(II) 因为 $\{b_n-a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，又知 $b_1=3$，

所以 $b_n-a_n=(b_1-a_1)\times3^{n-1}=(3-2)\times3^{n-1}=3^{n-1}$，

所以 $b_n=3^{n-1}+a_n=3^{n-1}+2n$，

所以 $S_n=(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})+2(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{1-3^n}{1-3}+\dfrac{2n(1+n)}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(3^n-1)+n(n+1)$.

（17）（本小题共 14 分）

解：（I）因为 $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=2\cos[(x+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{\pi}{2}]\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})$

$=\cos 2x$

或者 $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$

$=2(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{4})(\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4})$

$=2(\dfrac{1}{2}\cos^2 x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x)$

$=\cos 2x$

所以 $f(x)$ 的最小周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（II）因为 $g(x)=f(x)-\cos x$，

所以 $g(x)=\cos 2x-\cos x$

$=2\cos^2 x-\cos x-1$

$=2(\cos x-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{8}$

因为 $\cos x\in[-1,1]$，

所以依据二次函数的性质可得 $g(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{9}{8},2]$.

（18）（本小题共 14 分）

解：（I）公共点 $(\mathrm{e},1)$.

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}$，

所以 $f'(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以切线的方程为 $y-1=\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})$，即 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$.

（II）$S(a)=\frac{1}{2}a\cdot|AB|=\frac{1}{2}a|\frac{\mathrm{e}}{a}-\ln a|$，$a\in(0,\mathrm{e})$.

因为 $a\in(0,\mathrm{e})$ 时，$\frac{\mathrm{e}}{a}>1,\ln a<1$，所以 $\frac{\mathrm{e}}{a}>\ln a$，

所以 $S(a)=\frac{\mathrm{e}}{2}-\frac{1}{2}a\ln a$，$a\in(0,\mathrm{e})$，

$S'(a)=-\frac{1}{2}(1+\ln a)$，

令 $S'(a)=0$，得 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

所以 $S'(a),S(a)$ 的情况如下：

a	$(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$(\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e})$
$S'(a)$	+	0	−
$S(a)$	↗	极大值	↘

因此，$S(a)$ 的极大值，也是最大值为 $S(\frac{1}{\mathrm{e}})=\frac{\mathrm{e}}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

（19）（本小题共 14 分）

解：（I）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 及 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$ 得

$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$

所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（II）选②：

因为 $\cos C=\dfrac{1}{3}$， $C\in(0,\pi)$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=3\sqrt{3}$.

由 $A+B+C=\pi$ 得

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times4\sqrt{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}=4\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

选③：

因为 $A=\dfrac{\pi}{3}$， AB 边上的高 $h=\sqrt{3}$，

所以 $b=\dfrac{h}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $9=4+c^2-2c$， 即 $c^2-2c-5=0$，

解得 $c=1\pm\sqrt{6}$ （舍负）

所以 $c=1+\sqrt{6}$

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ch=\dfrac{1}{2}\times(1+\sqrt{6})\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}$.

（20）（本小题共 14 分）

解：（I）当 $a=-9$ 时， $f(x)=x(x^2-3x-9)$，

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$，

$f'(x), f(x)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

所以，函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$.

（II）由 $f(x)=x(x^2-3x+a)$ 得 $f'(x)=3x^2-6x+a$，

因为 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上为减函数，

所以 $f'(x)\le 0$ 在 $(1,2)$ 内恒成立，

因为 $f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$，

所以 $x\in(1,2)$ 时， $f'(x)\in(a-3,a)$，

所以 $a\in(-\infty,0]$.

（III）所以 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{9}{4})$.

（21）（本小题共 15 分）

解：（I） B_1 是完美集；

设 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=(0,0,0)$，

即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

所以 B_1 是完美集.

B_2 不是完美集.

设 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3=(0,0,0)$，

即 $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0,\\ 2\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3=0,\\ 3\lambda_1+4\lambda_2+6\lambda_3=0.\end{cases}$

令 $\lambda_3=1$， 则 $\lambda_1=2$， $\lambda_2=-3$.

所以 B_2 不是完美集.

（II）因为 B 不是完美集，

所以存在 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$，使得 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = (0,0,0)$，

即 $\begin{cases} 2m\lambda_1 + m\lambda_2 + m\lambda_3 = 0, \\ m\lambda_1 + 2m\lambda_2 + (m-1)\lambda_3 = 0, \\ (m-1)\lambda_1 + (m-1)\lambda_2 + 2m\lambda_3 = 0. \end{cases}$

因为 $B = \{(2m, m, m-1), (m, 2m, m-1), (m, m-1, 2m)\}$，

由集合的互异性得，$m \neq 0$ 且 $m \neq -1$.

所以 $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$，$\lambda_3 = -2\lambda_1 - \lambda_2$，$(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$.

所以 $\begin{cases} (-m+2)\lambda_1 + (m+1)\lambda_2 = 0, \\ (-3m-1)\lambda_1 + (-m-1)\lambda_2 = 0. \end{cases}$

所以 $(-4m+1)\lambda_1 = 0$.

所以 $m = \dfrac{1}{4}$ 或 $\lambda_1 = 0$.

检验：

当 $m = \dfrac{1}{4}$ 时，存在 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -7, \lambda_3 = -3$ 使得 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = (0,0,0)$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时，因为 $m \neq -1$，所以 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$，舍.

所以 $m = \dfrac{1}{4}$.

（III）B 一定是完美集.

假设存在不全为 0 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足 $\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3 = (0,0,\cdots,0)$，

不妨设 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$，则 $\lambda_1 \neq 0$（否则与假设矛盾）.

由 $\lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \lambda_3 x_{31} = 0$，得 $x_{11} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} x_{21} - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} x_{31}$.

所以 $|x_{11}| \leq \dfrac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}|x_{21}| + \dfrac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|}|x_{31}| \leq |x_{21}| + |x_{31}|$.

与 $2|x_{11}| > |x_{11}| + |x_{21}| + |x_{31}|$，即 $|x_{11}| > |x_{21}| + |x_{31}|$ 矛盾.

所以假设不成立.

所以 $\lambda_1 = 0$.

所以 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

所以 B 一定是完美集.