

2023 北京育才学校高二（上）期中

数 学

（120 分钟 150 满分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1. 直线 $y = -x + 2$ 的倾斜角为（ ）

- A. 45° B. 60° C. 120° D. 135°

2. 已知向量 $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ （ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. 14 C. $\sqrt{26}$ D. $\sqrt{14}$

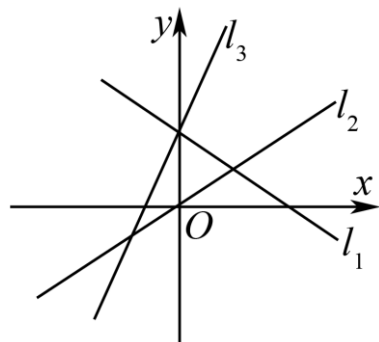
3. 两个不同的平面 α 和 β , 平面 α 的一个法向量为 $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, 平面 β 的一个法向量 $\vec{v}_2 = (2, 4, 2)$, 则平面 α 与平面 β （ ）

- A. 平行 B. 垂直 C. 相交 D. 不能确定

4. 已知圆 $M: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $N: (x-2)^2 + y^2 = 9$, 则两圆的位置关系是

- A. 相交 B. 相离 C. 内切 D. 外切

5. 若图中的直线 l_1, l_2, l_3 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 则（ ）



- A. $k_1 < k_2 < k_3$ B. $k_2 < k_1 < k_3$ C. $k_2 < k_3 < k_1$ D. $k_1 < k_3 < k_2$

6. 若椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到一个焦点的距离为 4, 则点 P 到另一个焦点的距离是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

7. “ $a = 1$ ”是“直线 $l_1: ax + y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: x + ay + 2 = 0$ 平行”的（ ）

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3, 4)$, 则其圆心到原点的距离的最小值为（ ）.

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

9. 过点 $A(1, 2)$ 且与原点距离最大的直线方程是（ ）

A. $x+2y-5=0$

B. $2x+y-4=0$

C. $x+3y-7=0$

D. $3x+y-5=0$

10. 已知 MN 是正方体内切球（球在正方体内且与正方体的六个面都相切）的一条直径，点 P 在正方体表面上运动，正方体的棱长是 2，则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围为（ ）

A. $[0,4]$

B. $[1,4]$

C. $[0,2]$

D. $[1,2\sqrt{2}]$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 圆 $x^2 + y^2 + 2y = 1$ 的圆心坐标为_____，半径为_____.

12. 一个椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则该椭圆的离心率为_____.

13. 点 P 在直线 $x+y-4=0$ 上， O 为原点，则 $|OP|$ 的最小值是_____.

14. 试给出一组实数 a, b 的值，使得两条直线 $l_1: 2x-y=0$ 与 $l_2: ax+by-3=0$ 互相垂直.

15. 已知 M 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点， N 为椭圆长轴上一点， O 为坐标原点. 给出下列结论：

① 存在点 M, N ，使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形；

② 不存在点 M, N ，使得 $\triangle OMN$ 为等边三角形；

③ 存在点 M, N ，使得 $\angle OMN = 90^\circ$ ；

④ 不存在点 M, N ，使得 $\angle OMN = 90^\circ$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(-1,5)$ 、 $B(-2,-1)$ 、 $C(4,3)$.

(1) 求 BC 边的中线长；

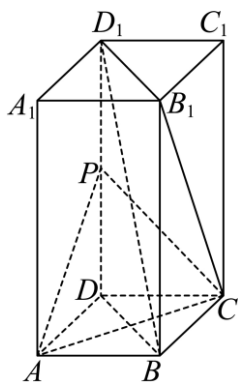
(2) 求 AB 边的高线所在直线方程.

17. 求下列各圆的标准方程：

(1) 圆心在直线 $y = -x$ 上且过 $M(2,0)$ 、 $N(0,-4)$ 两点的圆的方程；

(2) 经过 $A(-1,-1)$ 、 $B(-8,0)$ 、 $C(0,6)$ 三点的圆的方程.

18. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=AD=1$ ， $AA_1=2$ ，点 P 为 DD_1 的中点.



(1) 求证：直线 $BD_1 \parallel$ 平面 PAC ；

(2) 求 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角大小；

(3) 求点 B_1 到平面 PAC 的距离。

19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 ，点 P 在椭圆 C 上，且 $PF_1 \perp F_1F_2$ ，

$$|PF_1| = 3, |PF_2| = 5.$$

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 点 M 在椭圆 C 上，且 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，求点 M 的坐标。

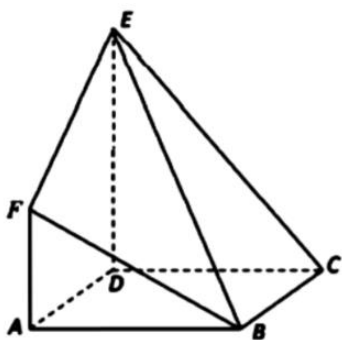
20. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ ，直线 $l: ax + y + 2a = 0$ 。

(1) 当 a 为何值时，直线 l 与圆 C 相交；

(2) 当直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点，且 $|AB| = 2\sqrt{2}$ 时，求直线 l 的方程

21. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直， $AF \parallel DE$ ，

$$DE \perp AD, AD \perp BD, AF = AD = BD = \frac{1}{2}DE = 1.$$



(1) 求证： $DE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值；

(3) 判断线段 DE 上是否存在点 Q ，使得直线 $CQ \parallel$ 平面 BEF ？若存在，求出 $\frac{EQ}{DQ}$ 的值，若不存在，说明理由。

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1. 【答案】D

【分析】根据直线的斜率与倾斜角的关系进行求解即可．

【详解】由 $y = -x + 2$ 可知该直线的斜率为 -1 ，所以该直线的倾斜角 135° ，

故选：D

2. 【答案】D

【分析】根据空间向量的加法运算求得 $\vec{a} + \vec{b}$ 的坐标，根据模的计算公式，即得答案．

【详解】由题意知向量 $\vec{a} = (1, -3, 2)$ ， $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ ，

则 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, -2, 3)$ ，

故 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ ，

故选：D

3. 【答案】A

【分析】根据 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 的坐标，判断二者共线，即可判断平面 α 与平面 β 的位置关系．

【详解】由题意知 $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ ， $\vec{v}_2 = (2, 4, 2)$ ，

则 $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$ ，即 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 共线，则 $\alpha // \beta$ ，

故选：A

4. 【答案】C

【详解】分析：求出圆心的距离 $|\overline{MN}|$ ，与半径的和差的绝对值比较得出结论．

详解：圆 $M(0, 0)$ ， $r_M = 1$ ，圆 $N(2, 0)$ ， $r_N = 3$ ， $|\overline{MN}| = 2 = |r_N - r_M|$ ，所以内切．故选 C

点睛：两圆的位置关系判断如下：设圆心距为 $|\overline{MN}|$ ，半径分别为 r_M ， r_N ，则：

$|\overline{MN}| < |r_N - r_M|$ ，内含； $|\overline{MN}| = |r_N - r_M|$ ，内切； $|r_N - r_M| < |\overline{MN}| < |r_N + r_M|$ ，相交； $|\overline{MN}| = |r_N + r_M|$ ，

外切； $|\overline{MN}| > |r_N + r_M|$ ，外离．

5. 【答案】A

【分析】由倾斜角与斜率的关系即可求解．

【详解】设直线 l_1, l_2, l_3 的倾斜角分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ，

则 $k_1 = \tan \alpha_1, k_2 = \tan \alpha_2, k_3 = \tan \alpha_3$ ，

由图可知： $0 < \alpha_2 < \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$ ，

所以 $k_1 < k_2 < k_3$.

故选: A

6. 【答案】D

【分析】

利用椭圆的定义直接求解即可.

【详解】设椭圆的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 则由椭圆定义可知 $|PF_1| + |PF_2| = 10$,

不妨设 $|PF_1| = 4$, 故 $|PF_2| = 6$.

故选: D.

7. 【答案】D

【分析】先根据两直线平行求出 a , 再根据充分条件和必要条件的定义即可得解.

【详解】因为直线 $l_1: ax + y + 2 = 0$ 与直线 $l_2: x + ay + 2 = 0$ 平行,

所以 $a^2 - 1 = 0$, 解得 $a = \pm 1$,

经检验当 $a = 1$ 时, 两直线重合,

所以 $a = -1$,

所以 “ $a = 1$ ” 是 “直线 l_1 与直线 l_2 平行” 的既不充分也不必要条件.

故选: D.

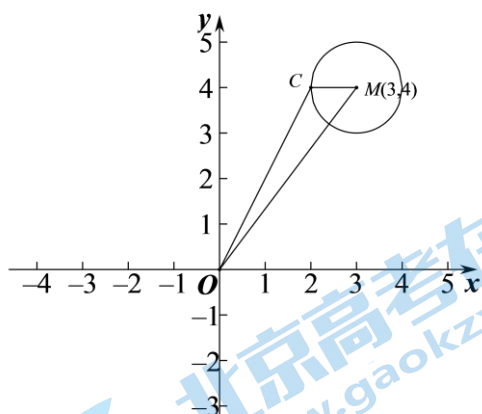
8. 【答案】A

【分析】求出圆心 C 的轨迹方程后, 根据圆心 M 到原点 O 的距离减去半径 1 可得答案.

【详解】设圆心 $C(x, y)$, 则 $\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 1$,

化简得 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$,

所以圆心 C 的轨迹是以 $M(3, 4)$ 为圆心, 1 为半径的圆,



所以 $|OC| + 1 \geq |OM| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 所以 $|OC| \geq 5 - 1 = 4$,

当且仅当 C 在线段 OM 上时取得等号,

故选: A.

【点睛】本题考查了圆的标准方程，属于基础题.

9. 【答案】A

【分析】首先根据题意得到过点 $A(1,2)$ 且与 OA 垂直的直线为所求直线，再求直线方程即可.

【详解】由题知：过点 $A(1,2)$ 且与原点距离最大的直线为过点 $A(1,2)$ 且与 OA 垂直的直线.

因为 $k_{OA} = 2$ ，故所求直线为 $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ ，即 $x + 2y - 5 = 0$.

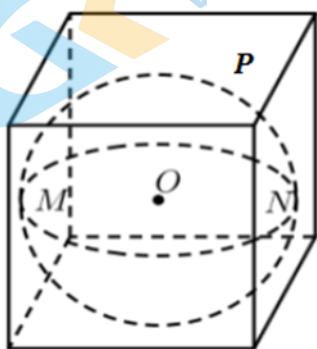
故选：A

【点睛】本题主要考查直线方程的求解，数形结合为解题的关键，属于简单题.

10. 【答案】C

【分析】确定正方体内切球半径，根据空间向量的运算化简 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 为 $|\overrightarrow{PO}|^2 - 1$ ，结合题意得 $|\overrightarrow{PO}|$ 的取值范围，即可得答案.

【详解】由题意设正方体中心为 O ，即为正方体内切球球心，
则 O 为 MN 的中点，因为正方体的棱长是 2，故 $MN = 2$ ，
则内切球半径为 1；



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) \\ &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM}) \\ &= |\overrightarrow{PO}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2 \\ &= |\overrightarrow{PO}|^2 - 1,\end{aligned}$$

由于点 P 在正方体表面上运动，故 $|\overrightarrow{PO}|_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$ ， $|\overrightarrow{PO}|_{\min} = 1$ ，

即当 P 位于正方体顶点时取得最大值，位于内切球与正方体的切点处时取最小值，

则 $|\overrightarrow{PO}|^2 - 1 \in [0, 2]$ ，

即 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围为 $[0, 2]$ ，

故选：C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 【答案】 ①. $(0, -1)$ ②. $\sqrt{2}$

【分析】将圆的一般方程化为标准方程，即可得答案.

【详解】由题意知圆 $x^2 + y^2 + 2y = 1$ 即圆 $x^2 + (y+1)^2 = 2$,

故该圆的圆心为 $(0, -1)$ ，半径为 $\sqrt{2}$ ，

故答案为: $(0, -1)$; $\sqrt{2}$

12. 【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】

根据已知可知: $a = 2b$ ，再代入离心率公式 $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 即可.

【详解】由题知: $2a = 2 \times 2b$ ，即 $a = 2b$.

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】本题主要考查离心率的求法，根据题意找到关系式为解题的关键，属于简单题.

13. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【详解】解: 因为点 P 在直线 $x + y - 4 = 0$ 上，则点 P 到原点距离的最小值即为原点到直线的距离公式可

$$\text{知为 } d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

14. 【答案】 $a = 1, b = 2$ (满足 $b = 2a$ 且不为零的实数 a, b 的值均符合)

【分析】由直线相互垂直可得 a, b 满足的等式关系，求符合条件的一组 a, b 的值即可.

【详解】解: 两条直线 $l_1: 2x - y = 0$ 与 $l_2: ax + by - 3 = 0$ 互相垂直

则有 $2a + (-1) \times b = 0$ ，即 $b = 2a$

故答案为: $a = 1, b = 2$ (满足 $b = 2a$ 且不为零的实数 a, b 的值均符合)

15. 【答案】 ①④

【分析】①②设 $M(a, \sqrt{3}a)$ ，根据 M 在椭圆上求参数 a ，由 N 在长轴上有 $2a \leq 2$ 判断正误；③④假设 $M(x_0, y_0)$ 、 $N(m, 0)$ 存在，利用垂直关系的坐标表示及 M 在椭圆上得到一元二次方程，由方程求参数 m ，结合 $-2 \leq m \leq 2$ 确定存在性.

【详解】设 $M(a, \sqrt{3}a)$ 代入椭圆方程得 $a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，由 $N(2a, 0)$ 且 $2a = \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$. 故①对，②错；

令 $M(x_0, y_0)$ ， $N(m, 0)$ 且 $-2 \leq m \leq 2$ ，若 $\angle OMN = 90^\circ$ 成立，

则 $(x_0, y_0) \cdot (m - x_0, -y_0) = 0$, 整理得 $mx_0 - x_0^2 - y_0^2 = 0, (1)$.

又 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, (2)$ 上, 联立 (1)(2) 整理得: $x_0^2 - 4mx_0 + 12 = 0$,

易知 $x_0 \neq 0$, 则 $m = \frac{x_0}{4} + \frac{3}{x_0}$,

因为 $x_0 \in (-2, 0) \cup (0, 2)$, 所以 $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, 故③错, ④对.

故答案为: ①④

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

16. 【答案】(1) $2\sqrt{5}$

(2) $x + 6y - 22 = 0$

【分析】(1) 根据中线的定义, 结合中点坐标公式和两点间距离公式进行求解即可;

(2) 根据互相垂直直线的斜率关系, 结合直线点斜式方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

设 BC 边的中点为 D , 因为 $B(-2, -1)$ 、 $C(4, 3)$,

所以点 D 的坐标为 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$, 即 $D(1, 1)$,

所以 BC 边的中线长 $|AD| = \sqrt{(1+1)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5}$

【小问 2 详解】

因为 $k_{AB} = \frac{-1-5}{-2+1} = 6$, 所以 AB 边的高线所在直线的斜率为 $-\frac{1}{6}$,

因此 AB 边的高线所在直线方程为 $y - 3 = -\frac{1}{6}(x - 4) \Rightarrow x + 6y - 22 = 0$.

17. 【答案】(1) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 10$

(2) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

【分析】(1) 根据 M, N 两点和圆坐标关系代入圆的方程, 求解未知数即可;

(2) 将 A, B, C 三点坐标代入圆方程求解未知数即可;

【小问 1 详解】

设圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

其中 $D^2 + E^2 + 4F > 0$, 圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$,

因为圆心在直线 $y = -x$ 上且过 $M(2, 0)$ 、 $N(0, -4)$ 两点,

$$\text{所以} \begin{cases} -\frac{E}{2} = \frac{D}{2} \\ 2^2 + 2D + F = 0 \\ (-4)^2 - 4E + F = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} D = -6 \\ E = 6 \\ F = 8 \end{cases},$$

所以圆的一般方程为 $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 8 = 0$,

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 10$;

【小问 2 详解】

设圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

其中 $D^2 + E^2 + 4F > 0$,

因为经过 $A(-1, -1)$ 、 $B(-8, 0)$ 、 $C(0, 6)$ 三点,

$$\text{所以} \begin{cases} (-1)^2 + (-1)^2 - D - E + F = 0 \\ (-8)^2 - 8D + F = 0 \\ 6^2 + 6E + F = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} D = 8 \\ E = -6 \\ F = 0 \end{cases},$$

所以圆的一般方程为 $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$,

所以圆的标准方程为 $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$;

18. 【答案】(1) 证明过程见解析

$$(2) \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \sqrt{3}$$

【分析】(1) 利用三角形中位线定理, 结合线面平行的判定定理进行证明即可;

(2) 根据线面垂直的判定定理, 结合线面角定义进行求解即可;

(3) 建立空间直角坐标系, 利用空间点到面距离公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

设 $AC \cap BD = O$, 显然 O 是 BD 中点, 连接 OP ,

因为点 P 为 DD_1 的中点,

所以 $BD_1 // OP$, 而 $BD_1 \not\subset$ 平面 PAC , $OP \subset$ 平面 PAC ,

所以直线 $BD_1 \parallel$ 平面 PAC ;

【小问 2 详解】

因为 $AB = AD = 1$,

所以矩形 $ABCD$ 是正方形, 因此 $AC \perp BD$,

又因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $DD_1 \perp AC$, 而 $DD_1 \cap DB = D, DD_1, DB \subset$ 平面 BDD_1B_1 ,

所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 ,

所以 $\angle CPO$ 是 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角,

因为 $AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$, 点 P 为 DD_1 的中点.

$$\text{所以 } CP = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad CO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{在直角三角形 } CPO \text{ 中, } \sin \angle CPO = \frac{CO}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle CPO = \frac{\pi}{6},$$

所以 CP 与平面 BDD_1B_1 所成的角大小为 $\frac{\pi}{6}$;

【小问 3 详解】

建立如图所示的空间直角坐标系,

$$P(0,0,1), A(1,0,0), C(0,1,0), B_1(1,1,2),$$

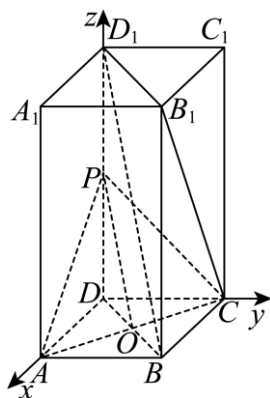
设平面 PAC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\vec{PA} = (1, 0, -1), \vec{PC} = (0, 1, -1),$$

$$\text{则有 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PA} = x - z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, 1),$$

$$\vec{AB_1} = (0, 1, 2),$$

$$\text{点 } B_1 \text{ 到平面 } PAC \text{ 的距离 } d = |\vec{AB_1}| \cdot \left| \cos \langle \vec{AB_1}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{AB_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1 + 1 \times 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}.$$



19. 【答案】(1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

(2) $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

【分析】(1) 根据椭圆定义，结合勾股定理进行求解即可；

(2) 根据三角形面积公式进行求解即可.

【小问1详解】

因为点 P 在椭圆 C 上，

所以 $|PF_1| + |PF_2| = 3 + 5 = 2a \Rightarrow a = 4$,

因为 $PF_1 \perp F_1F_2$, $|PF_1| = 3$, $|PF_2| = 5$.

所以 $|PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 = |PF_2|^2 \Rightarrow |F_1F_2|^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow |F_1F_2| = 4 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 12$, 即椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$;

【小问2详解】

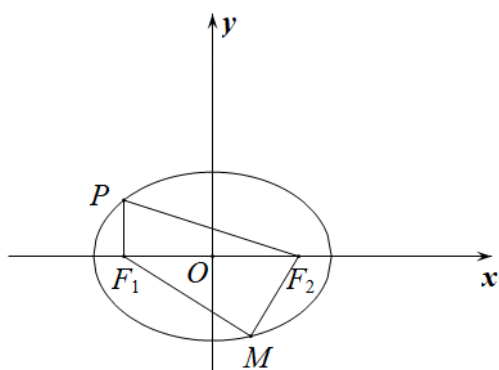
设 $M(x_0, y_0)$, 因为 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{2} \cdot |F_2F_1| \cdot |y_0| = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times |y_0| = 2\sqrt{3} \Rightarrow |y_0| = \sqrt{3}$,

因为点 M 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{x_0^2}{16} + \frac{3}{12} = 1 \Rightarrow x_0^2 = 12 \Rightarrow x_0 = \pm 2\sqrt{3}$,

所以点 M 的坐标为 $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 或 $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.



20. 【答案】(1) $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$

(2) $x - y + 2 = 0$ 或 $7x - y + 14 = 0$

【分析】(1) 先求出圆心及半径，再根据直线 l 与圆 C 相交可得圆心到直线 l 的距离小于半径，即可得解；

(2) 根据圆的弦长及弦长公式求出圆心到直线 l 的距离，进而可得出答案.

【小问 1 详解】

将圆 $C: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ 化为标准方程得 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$,

则圆心 $C(0, 4)$ ，半径 $r = 2$ ，

当直线 l 与圆 C 相交时，

圆心 $C(0, 4)$ 到直线 l 的距离 $\frac{|4 + 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} < 2$ ，解得 $a < -\frac{3}{4}$ ，

所以当 $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$ 时，直线 l 与圆 C 相交；

【小问 2 详解】

设圆心 $C(0, 4)$ 到直线 l 的距离为 d ，

则 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ ，即 $2\sqrt{2} = 2\sqrt{4 - d^2}$ ，解得 $d = \sqrt{2}$ ，

所以 $d = \frac{|4 + 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{2}$ ，解得 $a = -1$ 或 $a = -7$ ，

所以直线 l 的方程为 $x - y + 2 = 0$ 或 $7x - y + 14 = 0$.

21. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(3) 存在；1

【分析】(1) 根据面面垂直的性质定理即可证明结论；

(2) 建立空间直角坐标系，求得相关点坐标，求出平面 BEF 的一个法向量，确定平面 DEF 的一个法向

量, 根据空间角的向量求法, 即可求得二面角 $B-EF-D$ 的余弦值;

(3) 假设线段 DE 上存在点 Q , 设其坐标, 利用 $\overrightarrow{CQ} \cdot \vec{m} = 0$ 可求得 t 的值, 即可得结论, 并求得 $\frac{EQ}{DQ}$ 的值.

【小问 1 详解】

由题意知梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直,

且平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $DE \perp AD$, $DE \subset$ 平面 $ADEF$,

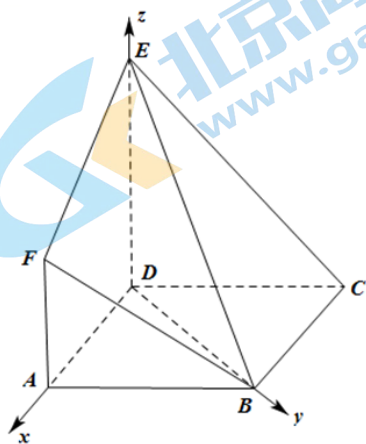
故 $DE \perp$ 平面 $ABCD$;

【小问 2 详解】

由于 $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $DC \subset$ 平面 $ABCD$, 故 $DE \perp DC$,

而 $DE \perp AD$, $AD \perp BD$,

故以 D 为坐标原点, 以 DA, DB, DE 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



$AF = AD = BD = \frac{1}{2}DE = 1$, 则 $D(0,0,0), B(0,1,0), F(1,0,1), E(0,0,2)$,

则 $\overrightarrow{BE} = (0, -1, 2), \overrightarrow{BF} = (1, -1, 1)$,

设平面 BEF 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \overrightarrow{BE} \cdot \vec{m} = -y + 2z = 0 \\ \overrightarrow{BF} \cdot \vec{m} = x - y + z = 0 \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $\vec{m} = (1, 2, 1)$,

平面 DEF 的一个法向量可取为 $\vec{n} = (0, 1, 0)$,

则 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

由图可知二面角 $B-EF-D$ 为锐角, 故其余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

【小问 3 详解】

假设线段 DE 上存在点 Q , 使得直线 $CQ \parallel$ 平面 BEF ,

又 $C(-1,1,0)$ ，设 $Q(0,0,t), 0 \leq t \leq 2$ ，则 $\overrightarrow{CQ} = (1, -1, t)$ ，

则 $\overrightarrow{CQ} \cdot \vec{m} = (1, -1, t) \cdot (1, 2, 1) = 0$ ，即 $1 - 2 + t = 0, \therefore t = 1$ ，

即 $Q(0,0,1)$ ，故 $\frac{EQ}{DQ} = 1$ ，

即线段 DE 上存在点 Q ，即为 DE 的中点，使得直线 $CQ \parallel$ 平面 BEF ，则 $\frac{EQ}{DQ} = 1$ 。

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题 &答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

