

北京市八一学校 2022~2023 学年度第一学期 10 月月考试卷

高三 数学

制卷人：荣 贺

审卷人：王明辉

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ ， $B = \{\frac{\pi}{6}, m\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，则 m 等于()

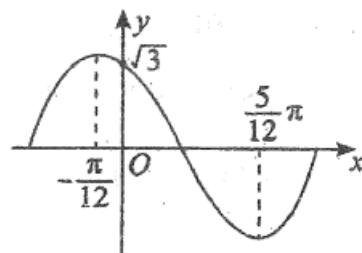
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$

2. 若 α 为第一象限角，则()

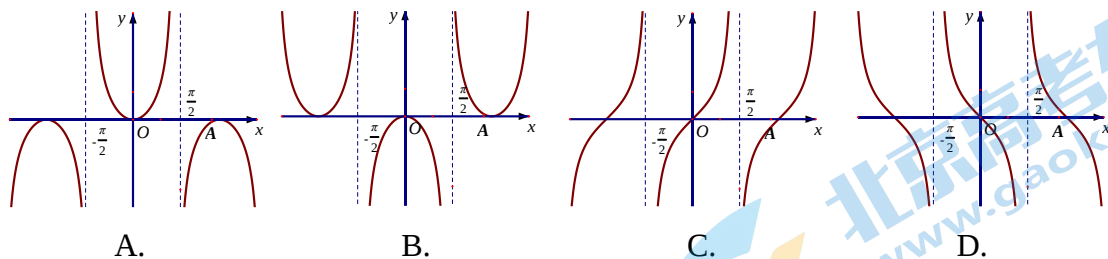
- A. $\cos 2\alpha > 0$ B. $\cos 2\alpha < 0$ C. $\sin 2\alpha > 0$ D. $\sin 2\alpha < 0$

3. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示，则 $f(x) =$ ()

- A. $2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ B. $2\sin(2x + \frac{2\pi}{3})$
C. $\sqrt{6}\sin(3x + \frac{\pi}{4})$ D. $\sqrt{6}\sin(3x + \frac{3\pi}{4})$



4. 函数 $f(x) = \sin x \cdot \tan x$ 的图像大致为()



5. “ $\sin x - \cos x \leq 1$ ”是“ $\sin x \cdot \cos x \geq 0$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对比分别为 a, b, c ，满足 $c = a \cdot \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 一定是()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

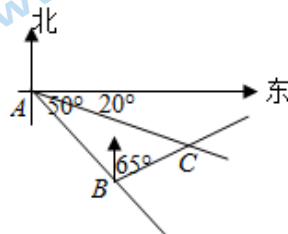
7. 点声源在空间中传播时，衰减量 ΔL 与传播距离 r (单位：米) 的关系式为 $\Delta L = 10 \lg \frac{\pi r^2}{4}$ (单位：dB)，取 $\lg 5 \approx 0.7$ ，则 r 从 8 米变化到 40 米时，衰减量的增加值约为()

- A. 14dB B. 18dB C. 21dB D. 28dB

8. 要得到 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ 的图像, 只需要将 $g(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图像()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

9. 一艘海轮从 A 处出发, 以每小时 40 海里的速度沿南偏东 40° 的方向直线航行, 1 小时后到达 B 处, 在 C 处有一座灯塔, 海轮在 A 处观察灯塔, 其方向是南偏东 70° , 在 B 处观察灯塔, 其方向是北偏东 65° , 那么 B, C 两点间的距离约为()



- A. $10\sqrt{2}$ 海里
B. $10\sqrt{3}$ 海里
C. $20\sqrt{2}$ 海里
D. $20\sqrt{3}$ 海里

10. 关于函数 $y = \sin(\frac{\pi}{2}x + \varphi)$ 有如下四个命题:

- ①该函数在 $[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}]$ 上单调递增;
②该函数图像向左平移 $\frac{5}{3}$ 个单位长度得到一个偶函数;
③该函数图像的一条对称轴方程为 $x = -\frac{7}{3}$;
④该函数图像的一个对称中心为 $(\frac{4}{3}, 0)$.

如果只有一个假命题, 则该命题是()

- A. ①
B. ②
C. ③
D. ④

第二部分 (非选择题 共 110 分)

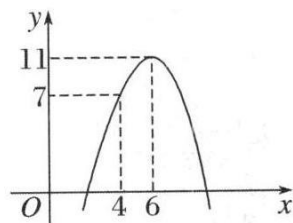
二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知复数 $z = \cos 120^\circ + i \cdot \sin(-60^\circ)$, 则复数 z 的实部为_____.

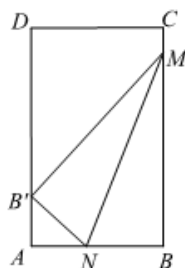
12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2, b = 5, \cos C = \frac{4}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

13. 已知角 α 的终边经过点 $(3, 4)$, 将角 α 的终边绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到角 β 的终边, 则 $\tan \beta =$ _____.

14. 某汽车运输公司购买了一批豪华大客车投入营运, 据市场分析, 每辆客车营运的总利润 y 万元与营运年数 x 的关系如图所示 (抛物线的一段), 则为其营运年平均利润最大, 每辆客车营运年数为_____.



15. 如图, 在矩形 $ABCD$ 的 BC, AB 边上各取一点 M, N , 沿 MN 将 $\triangle BMN$ 翻折到 $\triangle B'MN$, 点 B' 恰好在边 AD 上, 且 $\frac{|AB|}{|BM|} = \frac{2}{3}$, 记 $\angle BMN = \alpha$, 则 $\cos^2 \alpha =$ _____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值及函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 设 $g(x) = f(\frac{\pi}{4} - x) + \sqrt{3}\cos 2x$, 当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 时, 求 $g(x)$ 的值域.

17. (本小题满分 14 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b\sin A + a\cos B = \sqrt{2}a$.

(I) 求 B ;

(II) 若 $b = 2$, _____, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

在① $C - B = 2A$, ② $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 这两个条件中任选一个, 补充在横线上.

18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

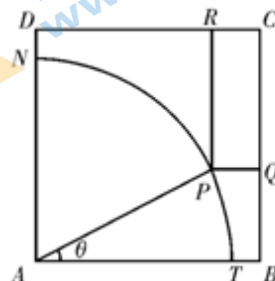
(II) 当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间

19. (本小题满分 15 分)

如图所示, $ABCD$ 是一块边长为 7 米的正方形铁皮, 其中 ATN 是一半径为 6 米的扇形, 已经被腐蚀不能使用, 其余部分完好可利用. 工人师傅想在未被腐蚀部分截下一个有边落在 BC 与 CD 上的长方形铁皮 $PQCR$, 其中 P 是弧 TN 上一点. 设 $\angle TAP = \theta$, 长方形 $PQCR$ 的面积为 S 平方米.

(I) 求 S 关于 θ 的函数解析式;

(II) 求 S 的最大值.



20. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{m}{x} + \ln x$, $g(x) = \sin x$.

(I) 若 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极值, 求 m 的值;

(II) 若对于任意的 $s, t \in [\frac{1}{2}, 2]$, 都有 $f(s) \geq g(t)$, 求实数 m 的取值范围.

21. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$, 记集合 $T = \{S(i, j) | S(i, j) = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j, 1 \leq i < j, i, j \in \mathbb{N}^*\}$.

(I) 对于数列 $\{a_n\}: 1, 2, 3, 4$, 写出集合 T ;

(II) 若 $a_n = 2n$, 是否存在 $i, j \in \mathbb{N}^*$, 使得 $S(i, j) = 1024$? 若存在, 求出一组符合条件的 i, j ; 若不存在, 说明理由;

(III) 若 $a_n = 2n - 2$, 把集合 T 中的元素从小到大排列, 得到的新数列为 $\{b_n\}: b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$, 若 $b_m \leq 2022$, 求 m 的最大值.

10 月月考参考答案

高三数学

一、选择题：DCBAB CADCD

二、填空题：11. $-\frac{1}{2}$; 12. 3; 13. $-\frac{3}{4}$; 14. 5; 15. $\frac{3+\sqrt{5}}{6}$.

三、解答题

16 解：(1) $\because$ 函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \because g(x) = f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} \cos 2x = \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{3} \cos 2x$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right],$$

$$\therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right],$$

$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\therefore g(x) \text{ 的值域为 } [-1, 2]. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

17. 解：(1) 由正弦定理得 $\sin B \sin A + \sin A \cos B = \sqrt{2} \sin A$,

在三角形中, $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin B + \cos B = \sqrt{2}$,

$$\text{所以 } \sin B + \cos B = \sqrt{2} \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 即 } \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\text{由 } B + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \text{ 则 } B + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 选择条件①:

$$\text{因为 } C - B = 2A, \quad A + B + C = \pi, \text{ 所以 } C = \frac{7\pi}{12}, \quad A = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \sin C = \sin(A + B) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin A = \frac{1}{2}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又因为 } b = 2, \text{ 正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 解得 } a = \sqrt{2}, c = \sqrt{3} + 1,$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } \sqrt{2} + \sqrt{3} + 3, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

选择条件②:

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, 得 $ac = 2 - \sqrt{2}$,

由余弦定理得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即 $4 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$,

所以 $4 = (a+c)^2 - 2ac - \sqrt{2}ac$,

所以 $a+c = \sqrt{6}$,

因为 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{6} + 2$.

.....14 分

18. (1) 解: $f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cdot \cos x$.

所以 $f(0) = e^0(\cos 0 + \sin 0) = 1$,

$f'(0) = 2e^0 \cos 0 = 2$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$, 即 $y=2x+1$.

.....7 分

(2) 解: $f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cdot \cos x$.

由 $2e^x > 0$, 知:

$x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos x < 0$, 即 $f'(x) < 0$,

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos x > 0$, 即 $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

.....13 分

19. 解: (1) 延长 RP 交 AB 于 E , 延长 QP 交 AD 于 F ,

由 $ABCD$ 是正方形, $PRCQ$ 是矩形, 可知 $PE \perp AB$, $PF \perp AD$,

由 $\angle TAP = \theta$, 可得 $EP = 6 \sin \theta$, $FP = 6 \cos \theta$,

$\therefore PR = 7 - 6 \sin \theta$, $PQ = 7 - 6 \cos \theta$,

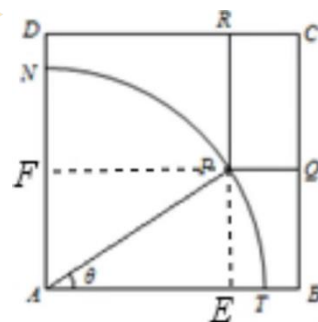
$\therefore S = PR \cdot PQ = (7 - 6 \sin \theta)(7 - 6 \cos \theta)$

$= 49 - 42(\sin \theta + \cos \theta) + 36 \sin \theta \cos \theta$

故 S 关于 θ 的函数解析式为

$S = 49 - 42(\sin \theta + \cos \theta) + 36 \sin \theta \cos \theta, (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$.

.....7 分



(2) 令 $\sin \theta + \cos \theta = t$, 可得

$$t^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta, \text{ 即 } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2},$$

$$\therefore S = 49 - 42t + 18(t^2 - 1) = 18t^2 - 42t + 31.$$

$$\text{又由 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 可得 } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{故 } t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \in [1, \sqrt{2}],$$

$$\therefore S \text{ 关于 } t \text{ 的表达式为 } S = 18t^2 - 42t + 31, (t \in [1, \sqrt{2}]),$$

$$\text{又由 } S = 18\left(t - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{13}{2}, \quad t \in [1, \sqrt{2}],$$

可知当 $t = \sqrt{2}$ 时, S 取最大值, 最大值为 $67 - 42\sqrt{2}$ 平方米.15 分

20 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = -\frac{m}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-m}{x^2},$$

若 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极值

$$\therefore f'(3) = 0, \text{ 即 } m=3,$$

经验证 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值,

所以 $m=3$7 分

$$(2) g(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right], \text{ 且 } \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right],$$

所以当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, $g(x)_{\max} = 1$,

对于任意的 $s, t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $f(s) \geq g(t)$ 恒成立, 即对任意 $s, t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $\frac{m}{x} + \ln x \geq 1$ 恒成立,

即 $m \geq x - x \ln x$ 恒成立.

$$\text{令 } h(x) = x - x \ln x, \text{ 则 } h'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x.$$

$\therefore$ 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增; 当 $x \in (1, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减,

$\therefore$ 当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, $h(x)$ 的最大值为 $h(1) = 1$,

$$\therefore m \geq 1,$$

即 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$15 分

21 解: (I) $a_1 + a_2 = 3$,

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,$$

$$a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5,$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 3 + 4 = 9,$$

$$a_3 + a_4 = 3 + 4 = 7,$$

$$\therefore T = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(II) 假设存在 $i, j \in N^*$, 使得 $S(i, j) = 1024$, 则有

$$1024 = a_i + a_{i+1} + \dots + a_j = 2i + 2(i+1) + \dots + 2j = (j-i+1)(i+j),$$

由于 $i+j$ 与 $j-i$ 奇偶性相同,

所以 $i+j$ 与 $j-i+1$ 奇偶性不同,

又因为 $i+j \geq 3$, $j-i+1 \geq 2$,

所以 1024 有大于等于 3 的奇数因子,

这与 1024 无 1 以外的奇数因子矛盾,

故不存在 $i, j \in N^*$, 使得 $S(i, j) = 1024$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$(III) \frac{(2j-2+2i-2)(j-i+1)}{2} = (j+i-2)(j-i+1),$$

当 $j=2$, $i=1$ 时, $b_1 = 2$,

除 $j=2$, $i=1$ 外 $j+i-2 \geq 2$, $j-i+1 \geq 2$,

其中 $j+i-2$ 与 $j-i+1$ 一奇一偶, 则 b_n 能拆成奇数与偶数之乘积,

在正偶数中, 只有 2^n 无法拆成一个大于 2 的奇数与一个不小于 2 的偶数之乘积,

又 T 中的元素均为偶数, 故 $T = \{2n \mid n \in N^*, n \neq 2^k, k \in N^*\}$,

故 2 至 2020 偶数中除去 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,

$$\text{故 } m = \frac{2022}{2} - 9 = 1002. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯