

第I卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 若集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | \frac{x-3}{x} > 0\}$, 则 $A \cap B = ()$

A. $\{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$

B. $\{x | -2 < x < 1\}$

C. $\{x | -2 < x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$

D. $\{x | -2 < x < 0\}$

2. 下列函数之中，在区间 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数的是 $()$

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = (x+1)^2$

C. $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{x} + 1$

D. $y = |x-1|$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = a_3$, 且 $a_3 \neq 0$, 则 $\frac{S_4}{S_3} = ()$

A. 1

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. 3

4. $\tan 105^\circ = ()$

A. $2 - \sqrt{3}$

B. $-2 - \sqrt{3}$

C. $\sqrt{3} - 2$

D. $-\sqrt{3}$

5. 不等式 $\frac{1}{x} > 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $()$

A. $0 < x < \frac{1}{2}$

B. $x > 1$

C. $0 < x < 1$

D. $x < 0$

6. 已知函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$, 给出下列四个结论:

①函数 $f(x)$ 是周期为 π 的偶函数;

②函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减;

③函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 -1 ;

④将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 所得图象与 $g(x) = \sin 2x$ 的图象重合.

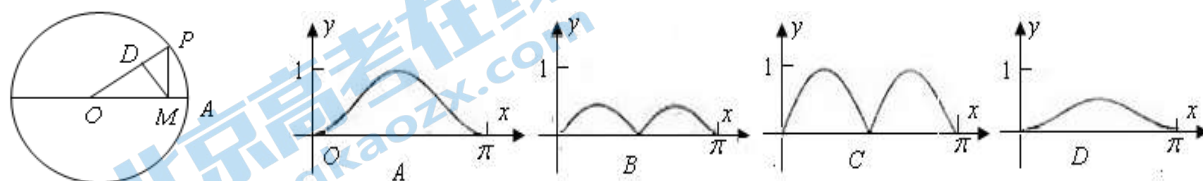
其中，所有正确结论的序号是（ ）

- A. ①③ B. ②③ C. ①④ D. ②④

7. 已知 $x \in (0, \pi)$ ，且 $3\cos 2x - 8\cos x = 5$ ，则 $\sin x =$ （ ）

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

8. 如图，圆 O 的半径为 1， A 是圆上的定点， P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA ，终边为射线 OP ，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M ，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$ ，则 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像大致为（ ）



9. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数。基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间。在新冠肺炎疫情初始阶段，可以用指数模型： $I(t) = e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位:天) 的变化规律，指数增长率 r 与 R_0 ， T 近似满足 $R_0 = 1 + rT$ 。有学者基于已有数据估计出 $R_0 = 3.28$ ， $T = 6$ 。据此，在新冠肺炎疫情初始阶段，累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2 \approx 0.69)$ （ ）

- A. 1.2 天 B. 1.8 天 C. 2.5 天 D. 3.5 天

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（ ）

- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ B. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

第II卷（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 函数 $f(x) = x - \sqrt{x} - 6$ 的零点个数是_____

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \log_2 n$ ，则 $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$ _____

13. 若函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x$ 为偶函数，则常数 φ 的一个取值为_____。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \ln n$, 若存在 $p \in R$, 使得 $a_n \leq pn$ 对任意 $n \in N^*$ 都成立, 则 p 的取值范围为_____

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \omega x, g(x) = \sqrt{2} \cos \omega x$, 其中 $\omega > 0$, A, B, C 是这两个函数图像的交点, 且不共线.

①当 $\omega = 1$ 时, $\triangle ABC$ 面积的最小值为_____;

②若存在 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 则 ω 的最小值为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2$, $C = 30^\circ$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使其能够确定唯一的三角形, 求:

(1) a 的值;

(2) $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $2b = \sqrt{3}a$. 条件②: $A = 45^\circ$; 条件③: $b = 2\sqrt{3}$. 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

17. (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = \sin x + \cos x (x \in R)$.

(1) 求函数 $y = [f(x + \frac{\pi}{2})]^2$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $y = f(x)f(x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

18. (本小题满分 14 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5 = 9$, $a_3 + a_9 = 22$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $b_1 = a_1$, 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中任选择两个作为已知条件, 求满足 $S_n < 2021$ 的 n 的最大值.

条件①: $b_3 = a_1 + a_2$; 条件②: $S_3 = 7$; 条件③: $b_{n+1} > b_n$.

19. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+a}$.

- (1) 若 $a=1$, 求 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处切线方程;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 以及最大值和最小值.

20. (本小题满分 15 分)

已知: 函数 $f(x) = \sin x - x \cos x$.

- (1) 求 $f'(\pi)$;
- (2) 求证: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) < \frac{1}{3}x^3$;
- (3) 若 $f(x) > kx - x \cos x$ 对 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 求实数 k 的最大值.

21. (本小题满分 14 分)

有限数列 $\{a_n\}$, 若满足 $|a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_3| \leq \dots \leq |a_1 - a_m|$, m 是项数, 则称 $\{a_n\}$ 满足性质 p .

- (1) 判断数列 3, 2, 5, 1 和 4, 3, 2, 5, 1 是否具有性质 p , 请说明理由.
- (2) 若 $a_1=1$, 公比为 q 的等比数列, 项数为 10, 具有性质 p , 求 q 的取值范围.
- (3) 若 a_n 是 $1, 2, 3, \dots, m$ 的一个排列 ($m \geq 4$), $b_k = a_{k+1}$ ($k=1, 2, \dots, m-1$), $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都具有性质 p , 求所有满足条件的 $\{a_n\}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号：bjgkzx

官方网站：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980

微信客服：gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。