2023 北京交大附中高一（下）期中

数　　学

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

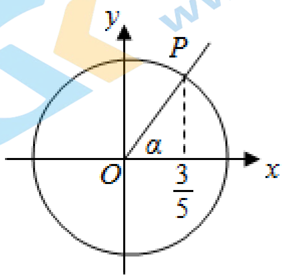
1．已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$-\frac{3}{4}$　　C．$\frac{4}{3}$　　D．$-\frac{4}{3}$

2．已知向量 $\vec{a}=(t,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数 t 的值为（　　）

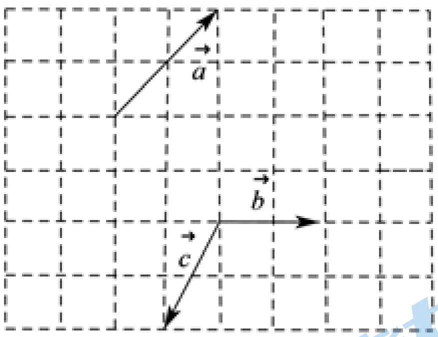
A．－2　　B．2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

3．如图，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与单位圆 O 相交于点 P，且点 P 的横坐标为 $\frac{3}{5}$，则 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 的值为（　　）



A．$-\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{5}$　　C．$-\frac{4}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

4．向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则 $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=$（　　）



A．－4　　B．4　　C．2　　D．－8

5．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$，且 $|\vec{a}-\vec{b}|=2$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

6．设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})+k\ (\omega>0)$，若 $f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{3})$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的一个可取值为（　　）

A．4　　B．5　　C．7　　D．8

7．已知 P 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，则（　　）

A．$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$　　B．$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

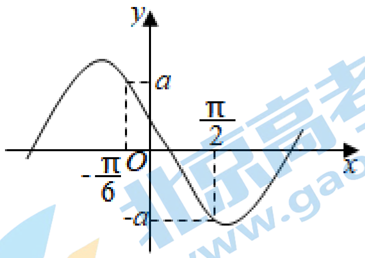
C．$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D．$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

8．设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“α 是第一象限角”是“$\sin\alpha+\cos\alpha>1$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

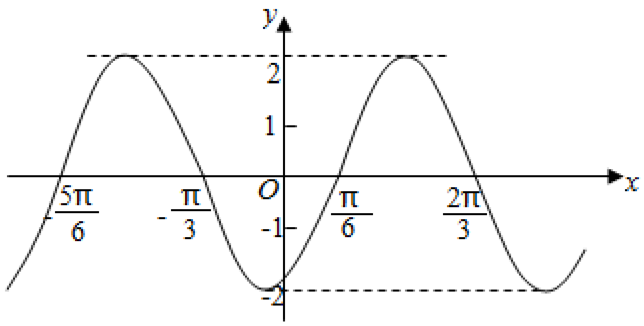
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

9．已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 t（$t>0$）个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 的图象．若函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称，则 t 的最小值（　　）



A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

10．函数 $f(x)$ 的图象如图所示，为了得到 $y=2\sin x$ 函数的图象，可以把函数 $f(x)$ 的图象（　　）



A．每个点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位

B．每个点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位

C．先向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）

D．先向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，再把所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$（纵坐标不变）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.

11．已知$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$，若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则实数 x 的值为______.

12．在平行四边形 $ABCD$ 中，已知向量$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,\ 3)$，则$\overrightarrow{AC}$=________.

13．已知向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（3，1），则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角的大小为_______.

14．直线 $y=kx$ 与函数 $y=\tan x$（$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$）的图象交于 M，N（不与坐标原点 O 重合）两点，点 A 的坐标为（$-\frac{\pi}{2}$，0），则（$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$）$\cdot\overrightarrow{AO}$=____________.

15．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$），曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\sqrt{3}$ 相交，若存在相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{6}$，则 ω 的所有可能值为________.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

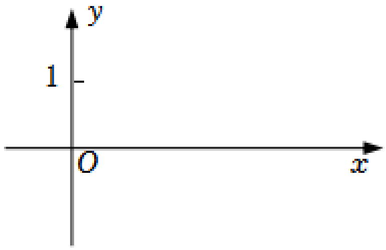
16．（10 分）函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（1）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间和最小正周期；

（2）请用“五点法”画出函数 $f(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的简图（先在所给的表格中填上所需的数值，再画图）；

x						
$2x-\frac{\pi}{6}$	0					
y						

（3）求函数 $f(x)$ 在[$-\frac{\pi}{12}$，$\frac{2}{3}\pi$]上的最大值和最小值，并指出相应的 x 的值.



17．（10 分）已知函数 $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递减区间及对称轴方程；

（2）设 $x=m$（$m\in\mathbf{R}$）是函数 $y=f(x)$ 图像的对称轴，求 $\sin 4m$ 的值；

（3）把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 φ 个单位，与 $f(x)$ 的图像重合，直接写出一个 φ 的值；

（4）把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 φ 个单位，所得函数为偶函数，直接写出 φ 的最小值；

（5）当 $x\in[0,t]$时，函数 $f(x)$ 的取值范围为[－1，1]，直接写出 t 的最小值；

（6）已知函数 $f(x)$ 在[0，t]上是一个中心对称图形，直接写出一个符合题意的 t 的值；

（7）设函数 $g(x)=\dfrac{f(x)\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\pi)}$，直接写出函数 $g(x)$ 在[0，2π]上的单调递减区间.

18．（10 分）已知函数 $f(x)=\sin^2 x+3\cos x+3$，（$x\in\mathbf{R}$）.

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并说明理由；

（2）求 $f(x)$ 的最小值并指出函数取得最小值时 x 的值；

（3）直接写出函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的零点．

19．（10 分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若存在常数 $T\neq0$，使得 $f(x)=Tf(x+T)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是 Ω 函数．

（1）判断函数 $F(x)=x$，$h(x)=\sin\pi x$ 是否是 Ω 函数，不必说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 是 Ω 函数，且 $f(x)$ 是偶函数，求证：函数 $f(x)$ 是周期函数；

（3）若函数 $f(x)=\sin kx$ 是 Ω 函数．求实数 k 的取值范围；

（4）定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$ 同时满足以下三条性质：

①存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $g(x_0)\neq0$；

②对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $g(x+2)=9g(x)$．

③$f(x)$ 不是单调函数，但是它图像连续不断，

写出满足上述三个性质的一个函数 $g(x)$，则 $g(x)=$_____．（不必说明理由）

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【解答】解：$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

∴$\cos\alpha<0$，

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$，

∴$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

故选：B.

2.【解答】解：∵向量$\vec{a}=(t,1)$，$\vec{b}=(1,2)$，若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=t+2=0$，

∴实数$t=-2$，

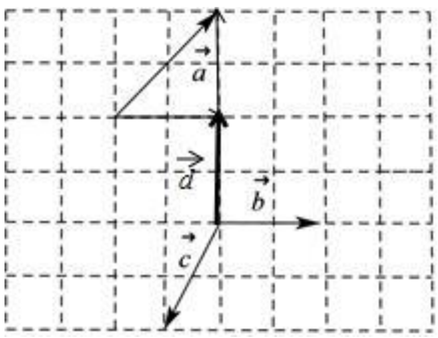
故选：A.

3.【解答】解：角 α 以 Ox 为始边，它的终边与单位圆 O 相交于点 P，且点 P 的横坐标为$\frac{3}{5}$，则

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

故选：B.

4.【解答】解：如图，



把向量$\vec{a}$，$\vec{b}$平移到同一起点，得出$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$，然后把$\vec{c}$，$\vec{d}$平移到同一起点，则：

$|\vec{c}|=\sqrt{5}$，$|\vec{d}|=2$，$\cos<\vec{c},\vec{d}>=-\frac{2}{\sqrt{5}}$，

∴$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}||\vec{c}|\cos<\vec{d},\vec{c}>=\sqrt{5}\times2\times(-\frac{2}{\sqrt{5}})=-4$.

故选：A.

5.【解答】解：向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(-2,1)$，且$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，

$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4$，

即$1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5=4$，

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

故选：C.

6.【解答】解：$\because f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{3})$对任意的实数 x 都成立，

故$\sin(\omega\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=1$，

则$\omega\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2m\pi$，　$m\in Z$，

故 $\omega=2+6m$，$m\in\mathbf{Z}$，故当 $m=1$ 时，一个可能取值为 8.

故选：D.

7.【解答】解：由于$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CP}$，

利用向量的线性运算，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{AC}$，

整理得：$\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

故选：A.

8.【解答】解：充分性：

$\because\alpha$ 是第一象限角，$\therefore\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha>1$，是充分条件，

必要性：

$\because\sin\alpha+\cos\alpha>1$，$\therefore\alpha$ 不是第三象限角，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha>1$，

$\therefore\sin\alpha\cos\alpha>0$，$\therefore\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

$\therefore\alpha$ 是第一象限角，

故选：C.

9.【解答】解：由图象可得 $x=\frac{\pi}{6}$时，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数值为 0，即$\frac{\omega\pi}{6}+\varphi=k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

$\therefore\varphi=-\frac{\omega\pi}{6}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），

$\therefore y=A\sin(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+k\pi)$，将此函数向左平移 t 个单位得，$f(x)=A\sin[\omega(x+t)-\frac{\omega\pi}{6}+k\pi]$，

又$\because f(x)$ 为奇函数，

$\therefore\omega t-\frac{\omega\pi}{6}+k\pi=k_1\pi$（$k_1\in\mathbf{Z}$），

$\therefore t=\frac{\pi}{6}+\frac{k_1-k}{\omega}\pi$（$k\in\mathbf{Z}$，$k_1\in\mathbf{Z}$），

$\therefore t$ 的最小值是$\frac{\pi}{6}$.

故选：B.

10．【解答】解：根据函数 $f(x)$ 的图象，设 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，

可得 $A=2$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$，$\therefore\omega=2$．

再根据五点法作图可得 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=0$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

故可以把函数 $f(x)$ 的图象先向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=2\sin 2x$ 的图象，

再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），即可得到 $y=2\sin x$ 函数的图象，

故选：C．

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.

11．【解答】解：$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$，

则 $1\cdot x=(-2)\times(-2)$，解得 $x=4$．

故答案为：4．

12．【解答】解：在平行四边形 $ABCD$ 中，

因为向量 $\overrightarrow{AB}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,\ 3)$，

所以：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(3,\ 5)$．

故答案为：$(3,\ 5)$．

13．【解答】解：∵平面向量 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$，

$\therefore\cos<\vec{a},\ \vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore<\vec{a},\ \vec{b}>=45°$．

∴向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 45°．

故答案为：45°．

14．【解答】解：直线 $y=kx$ 与函数 $y=\tan x\ (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$ 的图象交于 M，N（不与坐标原点 O 重合）

两点，

函数 $y=\tan x$ 的图象关于原点对称，直线 $y=kx$ 也关于原点对称，

则 O 为线段 MN 的中点，$\therefore\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AO}$，

∵点 A 的坐标为 $(-\frac{\pi}{2},\ 0)$，则 $(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AO}^2=2\cdot(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{2}$，

故答案为：$\frac{\pi^2}{2}$．

15．【解答】解：由函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\phi)$ 的图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 的相邻的两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 $2\sin(\omega x+\varphi)=\sqrt{3}\Rightarrow\sin(\omega x+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$；

∵曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\sqrt{3}$ 相交，若存在相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{6}$，

结合正弦函数的图象和性质：

∴ $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\omega(x_2-x_1)$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，$x_2-x_1=\frac{\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=2$；

∴ $\frac{7\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}+2k\pi=\omega(x_2-x_1)$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，$x_2-x_1=\frac{5\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=10$；

则 ω 的所有可能取值为 2 或 10．

故答案为：2 或 10．

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.【解答】解：（1）函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

解得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

即 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

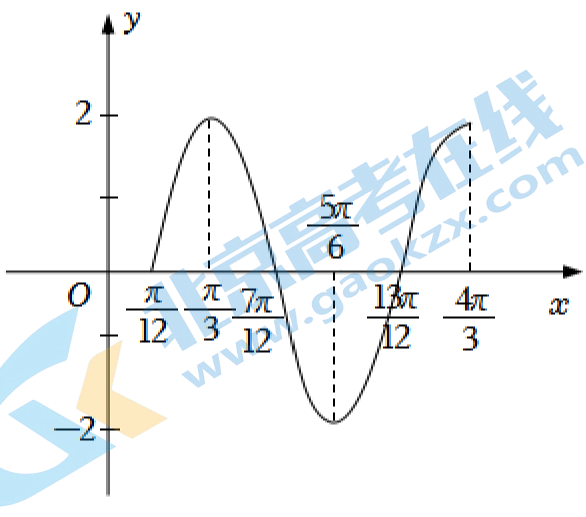
所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi，\frac{\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）填写表格如下；

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{3}$
$2x-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
y	0	2	0	-2	0	2

用“五点法”画出函数 $f(x)$ 在长度为一个周期的闭区间上的简图为；



（3）$x\in[-\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}]$，$\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，

所以函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 在$[-\frac{\pi}{12},\frac{2}{3}\pi]$上取得最大值为 2，最小值为 $-\sqrt{3}$，

且 $x=-\frac{\pi}{12}$时 $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$，$x=\frac{\pi}{3}$时 $f(x)$ 取得最大值 2.

17.【解答】解：（1）由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $4k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{7\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $f(x)$ 的单调递减区间为$[4k\pi+\frac{\pi}{3},4k\pi+\frac{7\pi}{3}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

由$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即函数的对称轴方程为 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）若 $x=m$（$m\in\mathbf{R}$）是函数 $y=f(x)$ 图像的对称轴，

则由（1）知 $m=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

则 $\sin 4m=\sin(8k\pi+\frac{4\pi}{3})=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（3）把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 φ 个单位，与 $f(x)$ 的图像重合，

则 φ 等于函数的一个周期即，即 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，则 $\varphi=4\pi$.

（4）把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 φ 个单位，得到 $y=\sin[\frac{1}{2}(x+\varphi)+\frac{\pi}{3}]=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\varphi+\frac{\pi}{3})$，

若所得函数为偶函数，则$\frac{1}{2}\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，则当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，即 φ 的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

（5）当 $x\in[0,t]$时，$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}+\frac{t}{2}]$，若函数 $f(x)$ 的取值范围为$[-1,1]$，

则，$\frac{\pi}{3}+\frac{t}{2}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，得 $t\geqslant\frac{7\pi}{3}$，则 t 的最小值为$\frac{7\pi}{3}$.

（6）由$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

则当 $k=1$ 时，$x=\frac{4\pi}{3}$，即函数关于（$\frac{4\pi}{3}$，0）对称，

若函数 $f(x)$ 在$[0,t]$上是一个中心对称图形，

则 $t=2\times\frac{4\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$，即符合题意的 $t=\frac{8\pi}{3}$即可.

（7）$g(x)=\frac{f(x)\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\pi)}=\frac{\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})(-\sin x)}{-\sin x}=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3})$，（$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$），

由（1）知 $f(x)$ 的单调递减区间为$[4k\pi+\frac{\pi}{3}，4k\pi+\frac{8\pi}{3}]$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8\pi}{3}$，$\because x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$），

$\therefore g(x)$ 在$[0，2\pi]$上的单调递减区间为$[\frac{\pi}{3}，\pi)$，$(\pi，2\pi)$.

18.【解答】解：（1）$f(x)=\sin^2x+3\cos x+3=1-\cos^2x+3\cos x+3=-\cos^2x+3\cos x+4$，

则 $f(-x)=-\cos^2(-x)+3\cos(-x)+4=-\cos^2x+3\cos x+4=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数.

（2）令 $t=\cos x$，则 $-1\leqslant t\leqslant 1$，

则函数等价为 $y=-t^2+3t+4$，对称轴为 $t=\frac{3}{2}$，抛物线开口向下，

则函数在$[-1，1]$上为增函数，

则当 $t=-1$ 时，即 $\sin x=-1$，$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最小值，最小值为 $-1-3+4=0$，此时

对应 x 的取值集合为$\{x|x=2k\pi-\frac{\pi}{2}，k\in\mathbf{Z}\}$.

（3）由 $f(x)=-\cos^2x+3\cos x+4=0$，得 $\cos^2x-3\cos x-4=0$ 得 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=4$（舍），

得 $x=\frac{\pi}{2}$或 $x=\frac{3\pi}{2}$，即函数 $f(x)$ 在$[0，2\pi]$上的零点为$\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$.

19.【解答】解：（1）函数 $F(x)=x$ 不是 Ω 函数，$h(x)=\sin\pi x$ 是 Ω 函数，

证明：假设函数 $F(x)=x$ 是 Ω 函数，则 $F(x)=TF(x+T)$，即 $x=T(x+T)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

令 $x=0$，得 $T^2=0$，所以 $T=0$，这与 $T\neq0$ 相矛盾，故假设不成立，

所以函数 $F(x)=x$ 不是 Ω 函数；

因为当 $T=-1$ 时，$Th(x+T)=-\sin[\pi(x-1)]=-\sin(\pi x-\pi)=\sin(\pi-\pi x)=\sin\pi x=h(x)$，

根据定义可知 $h(x)=\sin\pi x$ 是 Ω 函数.

（2）因为函数 $f(x)$ 是 Ω 函数，

所以存在常数 $T=0$，使得 $f(x)=Tf(x+T)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

所以 $f(-x)=Tf(-x+T)$，

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，

所以 $Tf(-x+T)=Tf(x+T)$，

因为 $T\neq0$，所以 $f(-x+T)=f(x+T)$，

又 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $f(-x+T)=f(x-T)$，

所以 $f(x-T)=f(x+T)$，

所以 $f(x)=f(x+2T)$，

因为 $T\neq0$，

所以 $f(x)$ 是周期为 $2T$ 的周期函数.

（3）因为函数 $f(x)=\sin kx$ 是 Ω 函数，

所以存在常数 $T\neq0$，使得 $f(x)=Tf(x+T)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

即 $\sin kx=T\sin k(x+T)=T\sin(kx+kT)$，

即 $\sin kx=T\sin kx\cos kT+T\cos kx\sin kT$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，

所以 $\begin{cases}T\cos kT=1\\T\sin kT=0\end{cases}$，因为 $T\neq0$，则 $\begin{cases}\cos kT=\dfrac{1}{T}\\\sin kT=0\end{cases}$，

又 $\sin^2kT+\cos^2kT=1$，所以 $\dfrac{1}{T}=\pm1$，即 $T=\pm1$，

此时 $k=t\pi$，$t\in\mathbf{Z}$，

即实数 k 的取值范围是 $\{k|k=t\pi，t\in\mathbf{Z}\}$.

（4）令 $g(x)=3^x\sin2\pi x$，

因为 $g(\frac{1}{4})=3^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi}{2}=3^{\frac{1}{4}}\neq0$，故满足①；

又 $g(x+2)=3^{x+2}\sin2\pi(x+2)=3^{x+2}\sin(2\pi x+4\pi)=3^{x+2}\sin2\pi x=9\times3^x\sin2\pi x=9g(x)$，故满足②；

因为 $y=\sin2\pi x$ 在定义域上不单调且最小正周期为 1，

函数在区间 $(k,\frac{1}{4}+k)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增，且函数值为正数，在区间 $(\frac{1}{2}+k,\frac{3}{4}+k)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减，且函数值为负数，

$y=3^x$ 在定义域上单调递增且函数值为正数，

所以 $g(x)=3^x\sin2\pi x$ 在定义域上不单调，显然函数是连续函数，故满足③；

故答案为：$g(x)=3^x\sin2\pi x$（答案不唯一）.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。