

2018 北京八中高二（上）期末

数 学（理）

2018.1

本试卷共 8 页，满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

A 卷（满分 100 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知命题 p, q ，若命题 $\neg p$ 与命题 $p \vee q$ 均为真命题，下列结论正确的是

- (A) p, q 均为真命题 (B) p, q 均为假命题
(C) p 为真命题， q 为假命题 (D) p 为假命题， q 为真命题

2. 已知点 $A(-3, 1, 4)$ ，则点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为

- (A) $(-3, -1, -4)$ (B) $(-3, -1, 4)$ (C) $(3, 1, 4)$ (D) $(3, -1, -4)$

3. 在空间四边形中 $OABC$ 中， $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ 等于

- (A) $\overrightarrow{OA}$ (B) $\overrightarrow{AB}$ (C) $\overrightarrow{OC}$ (D) $\overrightarrow{AC}$

4. 方程的曲线 $\frac{x^2}{k-5} + \frac{y^2}{7-k} = 1$ 为椭圆，实数 k 的取值范围是

- (A) $(5, 7)$ (B) $(5, 6)$
(C) $(6, 7)$ (D) $(5, 6) \cup (6, 7)$

5. 设 $x, y \in \mathbf{R}$ ，则“ $x + y - 4 < 0$ ”是“ $x < 0$ 且 $y < 0$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 既不充分也不必要条件 (D) 充分必要条件

6. 抛物线 $y^2 = 4ax$ ($a < 0$) 的焦点坐标为

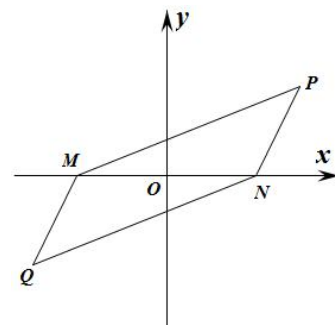
- (A) $(a, 0)$ (B) $(-a, 0)$ (C) $(0, a)$ (D) $(0, -a)$

7. 已知平面 α, β 的法向量分别为 $\vec{\mu} = (-2, 3, -5), \vec{\nu} = (3, -1, 4)$ 则

- (A) $\alpha // \beta$ (B) $\alpha \perp \beta$
(C) α, β 相交但是不垂直 (D) 以上都不正确

8. 某荒漠上有相距 4km 的 M, N 两点, 要围垦出以 MN 为一条对角线的平行四边形区域, 建成农艺园, 按照规划, 围墙总长为 12km , 在设计图纸上, 建立平面直角坐标系如图 (O 为 MN 的中点), 那么平行四边形另外两个顶点 P, Q 的坐标满足的方程是

- (A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$ (B) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{32} = 1$
(C) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (D) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$



9. 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 则底面 $ABCD$ 为矩形, $AB = 1, AD = 2, AA_1 = 3, \angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$, 则 AC_1 的长为

- (A) $4\sqrt{2}$ (B) 23 (C) $\sqrt{23}$ (D) 32

10. 对于曲线 C_1, C_2 , 若存在点 P 和常数 $k (k \neq 0)$, 过点 P 任意引射线分别交 C_1, C_2 于点 M_1, M_2 , 若 $\frac{|PM_1|}{|PM_2|} = k$, 那

么称曲线 C_1 与 C_2 相似, 相似比为 k , 点 P 为相似中心, 则下面各组曲线中, 原点是其相似中心的相似曲线有

- ① $y^2 = 4x, y^2 = 2x$; ② $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$;
③ $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1, x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$; ④ $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2$.

- (A) 1对 (B) 2对 (C) 3对 (D) 4对

二、填空题(共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

11. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > 0$ ” 的否定是 _____.

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2, 3)$ 和 $\vec{b} = (x, y, 9)$ 共线, 则 $x + y =$ _____.

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 与抛物线 $y^2 = 8x$ 有一个公共焦点 F , 且两个曲线的一个交点为 P , 若 $|PF| = 5$, 则双曲线渐近线方程为 _____

14. 已知矩形 $ABCD$, $AB = 1$, $BC = x$, 将 $\triangle ABD$ 沿矩形对角线 BD 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中, 则 _____.

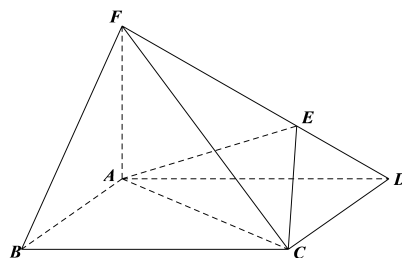
- ① $\forall x \in (0, 2)$, 都存在某个位置, 使得 $AB \perp CD$
 ② $\forall x \in (0, 2)$, 都不存在某个位置, 使得 $AB \perp CD$
 ③ $\forall x > 1$, 都存在某个位置, 使得 $AB \perp CD$
 ④ $\forall x > 1$, 都不存在某个位置, 使得 $AB \perp CD$

三、解答题(共 2 小题, 每小题 15 分, 共 30 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. (本小题满分 13 分)

在底面是正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = AB = 1$, $PB = PD = \sqrt{2}$, 点 E 在 PD 上, 且 $PE : ED = 2 : 1$.

- (I) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
 (II) 求二面角 $D-AC-E$ 的余弦值.



16. (本小题满分 14 分)

设 F_1, F_2 分别为椭圆 $W: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左右焦点, 斜率为 k 的直线 l 经过右焦点 F_2 , 且与椭圆 W 交于 A, B 两点.

- (I) 求 $\triangle ABF_1$ 的周长;
 (II) 如果以 AB 为直径的圆过 F_1 , 求直线 l 的斜率 k .

B 卷 (满分 50 分)

四、选择填空题(共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

17. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点, 若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹所在的曲线是 _____

- (A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

18. 若椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > b_1 > 0)$ 和椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > b_2 > 0)$ 的焦点相同且 $a_1 > a_2$. 给出如下四个结论:

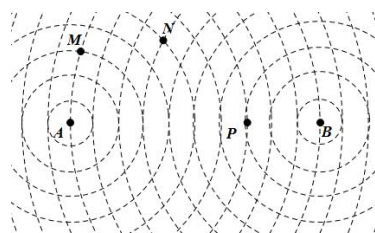
- ① 椭圆 C_1 和椭圆 C_2 一定没有公共点; ② $\frac{a_1}{a_2} > \frac{b_1}{b_2}$; ③ $a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2$; ④ $a_1 - a_2 < b_1 - b_2$.

其中, 所有正确结论的序号是

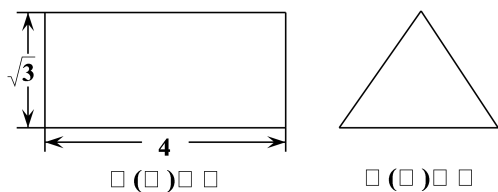
- (A) ②③④ (B) ①③④ (C) ①②④ (D) ①②③

19. 如图, 已知 $|AB| = 10$ 图中一系列圆是圆心分别为 A, B 的两组同心圆, 等组同心

圆的半径分别为 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, 利用这两组同心圆可以画出以 A, B 为焦点的双曲线, 若其中经过点 M, N, P 的双曲线的离心率分别为 e_M, e_N, e_P , 则它们的大小关系是 _____. (用 “<” 连接)



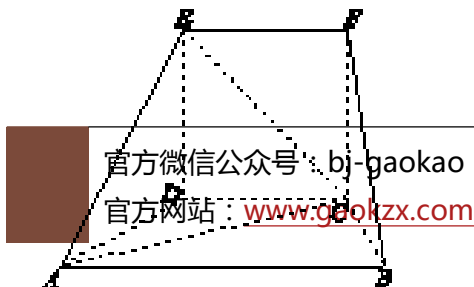
20. 已知正三棱柱 $ABC - A'B'C'$ 的正(主)视图和侧(左)视图如图所示, 设 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 的中心分别为 O, O' , 现将此三棱柱绕直线 OO' 旋转, 射线 OA 旋转所成角为 x 弧度 (x 可以取到任意一个实数), 对应的俯视图的面积为 $S(x)$, 则函数 $S(x)$ 的最大值为 _____, 最小正周期为 _____.



五、解答题(共 2 小题, 每小题 15 分, 共 30 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

21. 在如图所示的几何体中, 平面 $CDEF$ 为正方形, 面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 2BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AC \perp FB$.

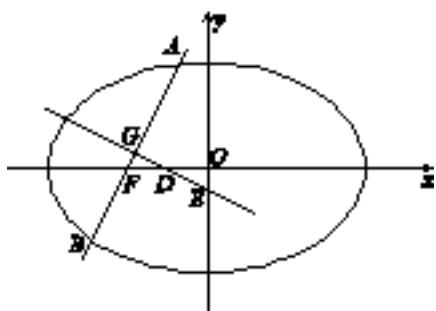
- (I) 求证: $AC \perp$ 平面 FBC ;
(II) 求 BC 与平面 EAC 所成角的正弦值;
(III) 线段 ED 上是否存在点 Q , 使平面 $EAC \perp$ 平面 QBC ? 证明你的结论.



22. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点. 当直线 AB 经过椭圆的一个顶点时, 其倾斜角恰为 60° .

(I) 求该椭圆的离心率;

(II) 设线段 AB 的中点为 G , AB 的中垂线与 x 轴和 y 轴分别交于 D, E 两点. 记 $\triangle GFD$ 的面积为 S_1 , $\triangle OED$ (O 为原点) 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.



数学试题答案

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	D	B	A	C	C	C	B

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 0$

12. -3

13. $y = \pm\sqrt{3}x$

14. ③

三、解答题:

15. (1) 略 (2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

16. (1) $4\sqrt{2}$, (2) $k = \pm \frac{\sqrt{7}}{7}$

四、选择填空题:

17. D

18. B

19. $e_M < e_p < e_N$

20. 8, $\frac{\pi}{3}$

五、解答题

21. 答案: (I) 证明: 因为 $AB = 2BC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $AC = \sqrt{3}BC$,

所以 $AC \perp BC$.

又因为 $AC \perp FB$,

所以 $AC \perp$ 平面 FBC .

(II) 解: 因为 $AC \perp$ 平面 FBC , 所以 $AC \perp FC$.

因为 $CD \perp FC$, 所以 $FC \perp$ 平面 $ABCD$.

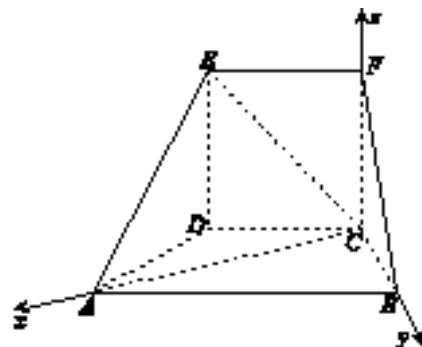
所以 CA, CF, CB 两两互相垂直, 如图建立的空间直角坐标系 $C - xyz$. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 可得 $CB = CD$.

设 $BC = 1$, 所以 $C(0,0,0), A(\sqrt{3},0,0), B(0,1,0), D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), E(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.

所以 $\overrightarrow{CE} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{CB} = (0, 1, 0)$.

设平面 EAC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0. \end{cases}$

所以 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + z = 0, \\ \sqrt{3}x = 0. \end{cases}$ 取 $z = 1$, 得 $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$.



(II) 解: 由 (I), 椭圆的方程可设为 $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

依题意, 直线 AB 不能与 x, y 轴垂直, 故设直线 AB 的方程为 $y = k(x + c)$, 将其代入

$$3x^2 + 4y^2 = 12c^2, \text{ 整理得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8ck^2x + 4k^2c^2 - 12c^2 = 0.$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8ck^2}{4k^2 + 3}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 + 2c) = \frac{6ck}{4k^2 + 3}, G\left(\frac{-4ck^2}{4k^2 + 3}, \frac{3ck}{4k^2 + 3}\right).$$

因为 $GD \perp AB$,

$$\text{所以 } \frac{\frac{3ck}{4k^2 + 3}}{\frac{-4ck^2}{4k^2 + 3} - x_D} \times k = -1, x_D = \frac{-ck^2}{4k^2 + 3}.$$

因为 $\angle GFD \sim \angle OED$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{S_1}{S_2} &= \frac{|GD|^2}{|OD|^2} = \frac{\left(\frac{-4ck^2}{4k^2 + 3} - \frac{-ck^2}{4k^2 + 3}\right)^2 + \left(\frac{3ck}{4k^2 + 3}\right)^2}{\left(\frac{-ck^2}{4k^2 + 3}\right)^2} \\ &= \frac{(3ck^2)^2 + (3ck)^2}{(ck^2)^2} = \frac{9c^2k^4 + 9c^2k^2}{c^2k^4} = 9 + \frac{9}{k^2} > 9. \end{aligned}$$

所以 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围是 $(9, +\infty)$.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生, 助力千万学子, 圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980